



مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۰)

(قسمت دوم) قضایای سِوا، مِنائوس، و اصل سطح

Branko Grünbaum

G.C. Shephard

Mathematics Magazine vol. 68

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۲. هندسهٔ آفین و چندضلعیها

به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگیهای هندسی‌ای سرو کار دارد که ناوردای آفین "affine invariant" هستند، که بدین معنی است که تحت تبدیلهای آفین "affinities" (یعنی، تبدیلهای خطی نانکین ترکیب شده با انتقالها) ناوردا (یا تغییرناپذیر) اند.

از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به‌صورت دورانها، تقارنها، انتقالها و برشها، یا هر ترکیبی از اینها در نظر گرفت. نسبتهای طولهای واقع بر خطوط موازی و نسبتهای سطحها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و در نتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، درحالی که طولها، زاویه‌ها و سطحها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق‌اند، اما به‌طور وضوح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.

مقصود از چندضلعی "polygon" $P = [V_1, V_2, \dots, V_n]$ دنباله‌ای دوری از $n \geq 3$ نقطهٔ V_i در صفحهٔ آفین، همراه با n قطعه خط بسته $S_i = [V_i, V_{i+1}]$ است. نقاط V_i رأسهای "Vertices" P و قطعات S_i بالهای "edges" P اند. از اینجا به

بعد، همهٔ اندیسه‌های i به مدول n تحویل می‌شوند آنچنان که در $1 \leq i \leq n$ صدق کنند؛ گذشته از این، برای اجتناب از حالات خاص و تباهیدگیها همواره فرض می‌کنیم رأسهای V_i و V_{i+1} متمایزند. چندضلعی به‌صورت جهتدار در نظر گرفته می‌شود و توسط هرجابگشت دوری رأسها تغییر نمی‌کند؛ اما، ترتیب معکوس رأسها چندضلعی جدید P' ی ایجاد می‌کند، که گفته می‌شود از P و با به مخالف جهت رفتن به‌دست آمده است.

چندضلعی با n رأس، و بنابرین n یال، را n ضلعی می‌نامیم. توجه داشته باشید که این چندضلعیها بسیار عمومی‌اند؛ چه ممکن است رأسهای غیرمجاور منطبق باشند و یالها متقاطع شوند یا جزئاً یا کلاً روی هم قرار گیرند. قضایای ما در مورد چندضلعیهای چنین به‌کار می‌روند. گاهی ضروری می‌شود که محدودیتهای بیشتری بر مکان رأسها اعمال شود. این محدودیتها را هنگام ضرورت متذکر خواهیم شد.

بهتر است که مفهوم $V_i V_{i+1}$ ، یعنی ضلع "side" چندضلعی را نیز معرفی کنیم؛ این مفهوم خطی است. شامل یال $V_i V_{i+1}$ و قطر "diagonal" $V_i V_j$ $[V_i, V_{i+1}]$ چندضلعی خطی است

زمانی که مثلث به طور منفی جهتدار شده باشد؛ یعنی رئوس آن را در سنوی ساعتگرد نامیده باشیم. در مورد دو مثلث $[A, B, C]$ و $[D, E, F]$ واقع در صفحه، نسبت سطحهای علامتدارشان، یعنی $a(A, B, C)/a(D, E, F)$ ، ناوردایی آفین است که با $\lambda = [A \ B \ C / D \ E \ F]$ نمایش داده می شود. λ ، برحسب بردارهای مکان، با

$$(a \times b + b \times c + c \times a) = \lambda (d \times e + e \times f + f \times d)$$

تعریف می شود، که $\times$ آن یک حاصلضرب برداری را مشخص می کند. تمام این بردارهای حاصلضرب، از آنجا که جمیع این نقاط در صفحه قرار دارند، موازی اند. به گونه ای هم ارز، λ توسط

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف می شود، که در آن (a_1, a_2) مختصات نقطه A ، یعنی، مؤلفه های بردار مکانی a هستند، و غیره

از آنجا که جایگشت دوری رأسها سطح را تغییر نمی دهد، اما معکوس کردن ترتیب رئوس، تغییردهنده علامت سطح است، روابطی چون رابطه های زیر برقرارند:

$$\left[\frac{A}{D} \frac{B}{E} \frac{C}{F} \right] = \left[\frac{B}{D} \frac{C}{E} \frac{A}{F} \right] = \left[\frac{C}{D} \frac{A}{E} \frac{B}{F} \right] = - \left[\frac{B}{D} \frac{A}{E} \frac{C}{F} \right] = \left[\frac{B}{E} \frac{C}{F} \frac{A}{D} \right] = \left[\frac{B}{E} \frac{A}{D} \frac{C}{F} \right]$$

گذشته از این، در اینجا نیز، چون در حالت قطعه خطها، حذف مجاز است، به عنوان مثال،

$$\left[\frac{A}{D} \frac{B}{E} \frac{C}{F} \right] \cdot \left[\frac{D}{G} \frac{E}{H} \frac{F}{J} \right] = \left[\frac{A}{G} \frac{B}{H} \frac{C}{J} \right]$$

در این علامت نویسی، اصل سطح (۱) را می توان به صورت اندکی قدرتمندتر

$$\left[\frac{A_1 P}{A_2 P} \right] = \left[\frac{A_1 \ BC}{A_2 \ BC} \right]$$

نوشت، که از طولهای علامتدار و سطحهای علامتدار مثلثها بهره مند است.

سطح علامتدار "signed area" یک n ضلعی ($n > 3$) را

که توسط دو رأس نامجاور V_i و V_j از P تعریف می شود. این خط اگر، و تنها اگر، V_i و V_j نقاطی متمایز باشند، تعریف می شود.

برای نقاط از حروف بزرگ $V, X, W, \dots$ با اندیس یا بدون اندیس، و برای بردارهای مکانی آنها، نسبت به مبدأیی به دلخواه انتخاب شده، از حروف کوچک نظیر آنها، یعنی $v, x, y, \dots$ استفاده می کنیم. بردارهای مکانی را می توان به گونه ای کاملاً دقیق در هندسه آفین به کار برد.

فرض می کنیم A, B, C, D چهار نقطه و چنان اند که AB موازی CD است. (به عبارت دیگر، سوهای بردارهای $b-a$ و $d-c$ منطبق یا مستقیماً مقابل اند). فرض می کنیم λ عددی حقیقی، تعریف شده با $\lambda(d-c) = (b-a)$ ، باشد. در این صورت λ ناوردایی آفین است. این عدد، به طور ساده، نسبت طول $[A, B]$ به طول $[C, D]$ است، با علامتی بعلاوه یا منها، بسته به اینکه این قطعه خطها، هم سو یا متقابل باشند.

این نسبت را با $\lambda = [AB/CD]$ نمایش خواهیم داد. واضح است که روابطی چون

$$\left[\frac{A}{C} \frac{B}{D} \right] = - \left[\frac{B}{C} \frac{A}{D} \right] = - \left[\frac{A}{D} \frac{B}{C} \right] = \left[\frac{B}{D} \frac{A}{C} \right]$$

برقرار، و حذف مجاز است، به طوری که، فی المثل،

$$\left[\frac{A}{C} \frac{B}{D} \right] \cdot \left[\frac{C}{E} \frac{D}{F} \right] = \left[\frac{A}{E} \frac{B}{F} \right]$$

این ویژگیها مستقیماً از تعاریف ذکر شده نتیجه می شوند.

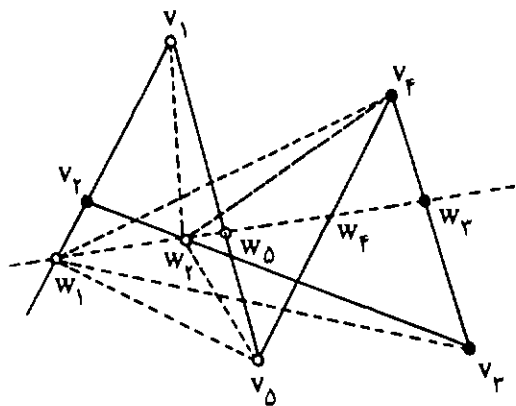
در حالت خاص، اگر نقطه W ای به گونه ای معین، تعریف شده بر $V_i V_{i+1}$ ضلعی از چندضلعی P ، متمایز از V_i و V_{i+1} ، هردو، باشد، در این صورت به $[V_i W / W V_{i+1}]$ به عنوان "edge-ratio" متناظر با این ضلع اشاره می کنیم. به گونه ای مشابه، اگر W بر قطر $V_i V_j$ واقع شود، آنگاه $[V_i W / W V_j]$ قطر - نسبت "diagonal-ratio" نامیده می شود.

ملاحظات مشابه را در مورد سطحها به کار می بریم. در صفحه اقلیدسی سطح علامتدار $a(A, B, C)$ از مثلث $[A, B, C]$ را مساحت آن (به مفهوم متعارف) در نظر می گیریم با علامتی مثبت یا منفی به عنوان پیشوند آن. علامت + هنگامی به کار می رود که مثلث به طور مثبت جهتدار باشد، یعنی، رأسهای آن به ترتیب پاد ساعتگرد نامگذاری شده باشند، و علامت -

۳. تعمیمهای قضایای سوا و میلانوس

در این بخش و بخش بعدی، نقاط W_i واقع بر اضلاع یا افتار یک n ضلعی، را به عنوان نقاط تقاطع آنها با سایر خطوط تعریف می‌کنیم. در سراسر مطلب، بدون اشاره‌ای دیگر، فرض می‌کنیم این نقاط موجودند (یعنی، خطوط مورد بحث موازی نیستند) و از رأسها متمایزند (و بنابراین یال - نسبت و قطر - نسبت‌های مربوطه خوش‌تعریف‌اند). در این بخش با مسابلی از نوع مسأله‌ای که بعد می‌آید سر و کار داریم. بر هر ضلع $V_i V_{i+1}$ از n ضلعی، نقطه W_i ، به گونه‌ای از لحاظ هندسی معنی دار، تعریف شده است. تحت چه شرایطی می‌توان اظهاری در مورد مقدار حاصلضرب یال - نسبت‌ها $[V_i W_i / W_i V_{i+1}]$ مطرح کرد؟ مسابلی مشابه نیز درباره قطر - نسبت‌ها مطرح خواهیم کرد.

اولین دست‌آوردمان از این دست، تعمیم قضیه میلانوس به n ضلعی‌هاست. این نتیجه، تازه نیست - بخش ۵ را ملاحظه کنید. حالت $n = 5$ را در شکل ۶ نشان داده‌ایم.



قضیه میلانوس در پنج‌ضلعی مفر می‌کند که

$$\left[\frac{V_1 W_1}{W_1 V_2} \right] \cdot \left[\frac{V_2 W_2}{W_2 V_3} \right] \cdot \left[\frac{V_3 W_3}{W_3 V_4} \right] \cdot \left[\frac{V_4 W_4}{W_4 V_5} \right] \cdot \left[\frac{V_5 W_5}{W_5 V_1} \right] = -1$$

قضیه ۱ (قضیه میلانوس در n ضلعی‌ها). فرض می‌کنیم $P = [V_1, \dots, V_n]$ یک n ضلعی و به ازای $i = 1, \dots, n$ ، قاطعی $V_i V_{i+1}$ را در این صورت حاصلضرب W_i قطع کند. در این صورت حاصلضرب یال - نسبت‌ها ثابت است، در واقع به ازای تمام n ضلعی‌های P ،

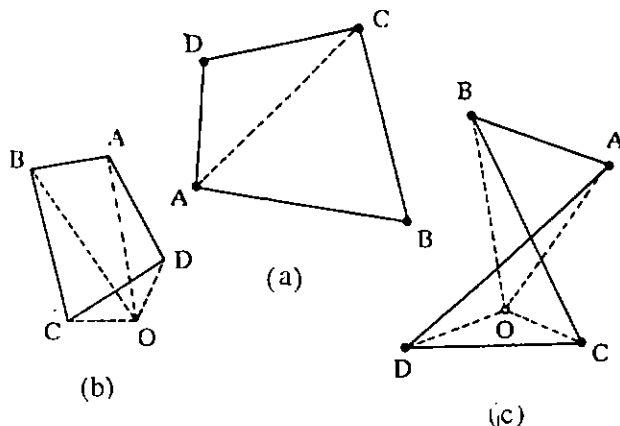
$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{V_i W_i}{W_i V_{i+1}} \right] = (-1)^n \quad (6)$$

در حالتی که n فرد است، حاصلضرب مورد بحث منفی است، که نشان می‌دهد که تعداد فردی از تقاطعات قاطع مورد

نیز می‌توان تعریف کرد: n ضلعی را به طریقی مثلث‌بندی می‌کنیم، و مثلث‌های به دست آمده را بگونه‌ای منطقی جهت‌بندی می‌کنیم (شکل ۵ را ملاحظه کنید). این کار بدین معنی است که هرگاه دو مثلث مثلث‌بندی در یال $[B, C]$ مشترک باشند، آن‌گاه جهت‌بندی آنها چنان باشد که سوهای مخالف بر این یال مشترک ایجاد کنند. در این صورت سطح چندضلعی به عنوان مجموع سطح‌های علامتدار مثلث‌های مؤلفه تعریف می‌شود. البته برای اعتبار این تعریف، لازم است که نشان دهیم سطح علامتدار مورد بحث از مثلث‌بندی به کار رفته مستقل است. این عمل، محاسبه‌ای معمولی است، و در اینجا به جزئیات آن نمی‌پردازیم. در واقع، اگر چندضلعی مورد بحث را به عنوان خمی جهتدار تعبیر کنیم، سطح علامتدار آن دقیقاً آن چیزی است که با به کار بردن انتگرال‌های آشنای حسابان در مورد آن، به دست می‌آوریم. در اینجا از خواننده دعوت می‌کنیم اثبات‌های داده شده در فوق را، با استفاده از سطح‌های علامتدار و علامت‌نویسی جدید، تعدیل کرده اثبات‌های عمومی قضایای مورد بحث قرار گرفته را به دست دهد. در حالت خاص، اگر به جای (۵)

$$\left[\frac{V_i W_i}{W_i V_{i+1}} \right] = \left[\frac{V_i V_{i+1} V_{i+2}}{V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3}} \right] \times \left[\frac{V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3}}{V_{i+2} V_{i+3} V_{i+1}} \right] \quad (5a)$$

به کار رود، اثباتی از قضیه هواهن به دست می‌آید که به تحدب، سادگی یا جهت پنج‌ضلعی $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$ وابسته نیست.



سه مثال از مثلث‌بندی صحیح چهارضلعی $[A, B, C, D]$ در (a)، چهار زاویه‌ای به دو مثلث $[A, B, C]$ و $[A, C, D]$ مثلث‌بندی شده است. در (b) و (c) مثلث‌ها عبارت‌اند از: $[O, D, A]$ ، $[O, C, D]$ ، $[O, B, C]$ ، $[O, A, B]$.