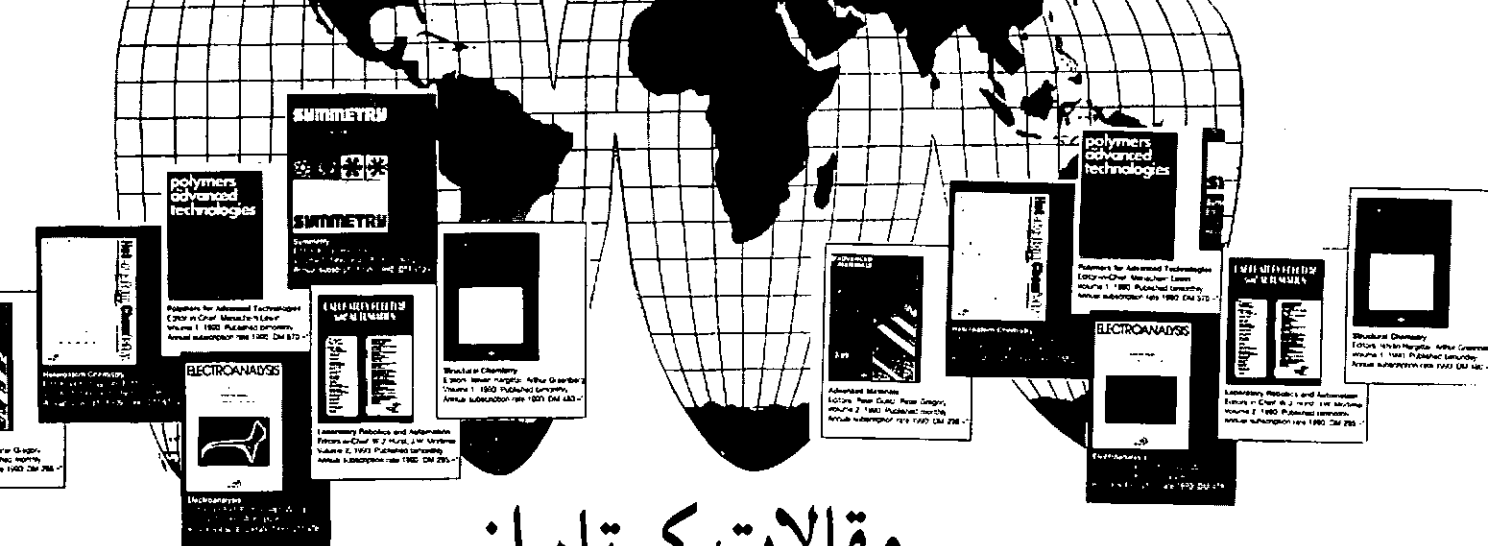




مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۹)

قضایای سِوا، منلائوس، و اصل سطح

(قسمت اول)

Branko Grünbaum
G.C. Shephard
Mathematics Magazine vol. 68

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

۱. مقدمه

ضلع دلخواه [پیامدهای اندیشه ساده‌ای است که آن را اصل سطح "Area Principle" نام داده‌ایم. این اصل را در شکل ۱ توضیح داده‌ایم. در این شکل P نقطه تقاطع خطوط BC و A_1A_2 است. با نمایش دادن طولهای قطعات $[A_1, P]$ و $[A_2, P]$ ، به ترتیب، با $|A_1, P|$ و $|A_2, P|$ و سطح مثلثهای $[A_1, B, C]$ و $[A_2, B, C]$ ، به ترتیب، با $|A_1, BC|$ و $|A_2, BC|$ ، اصل سطح بر این است که

$$\frac{|A_1, P|}{|A_2, P|} = \frac{|A_1, BC|}{|A_2, BC|} \quad (1)$$

و این رابطه، تا زمانی که نسبتهای موجود در آن خوش تعریف باشند، یعنی مخرجهای آنها صفر نباشند، برقرار است. درستی (۱) به اینکه نقاط A_1 و A_2 توسط BC از هم جدا شده باشند یا نه، بستگی ندارد (شکل (a) یا شکل (b)). بعداً (۱) را، با در نظر گرفتن علامت برای نسبتهای آن، پالوده خواهیم کرد؛ اما در حال حاضر سطرها و طولها را مثبت در نظر می‌گیریم.

قضایای سِوا و منلائوس، که به زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربرترین قضایای هندسه مسطحهٔ مقدماتی‌اند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌اند، مثلاً، قضیهٔ منلائوس، در مورد هر مثلث و هر خط قاطع ناگذرنده از رأس آن، به کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامشان پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و جیووانی سوای ایتالیایی "Giovanni Ceva" قضیهٔ خود (و قضیهٔ دوباره کشف کردهٔ منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد. اخیراً هوهن "Hoehn" با نشان دادن این که حاصل ضرب پنج، خارج قسمت از طولهای خاصی واقع در یک پنج ضلعی دارای مقدار ۱ است، به نتیجهٔ تازه‌ای از این دست رسید.

هدف از این مقاله، نشان دادن این مطلب است که نتایجی از این نوع، و توسیعاتشان به چند ضلعیهای عمومی‌ای [با هر چند

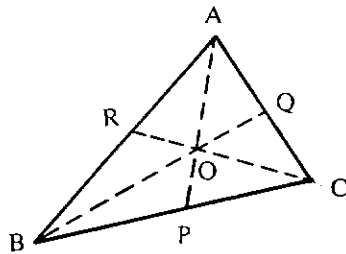
قاعده [R, Q] به کار برده، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BRQ|}{|CRQ|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|CRQ|}{|ARQ|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|ARQ|}{|BRQ|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، جمیع سطحهای مثلثها حذف می‌شوند، و مشخص می‌شود که (۲) درست است، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم O چنان نقطه‌ای باشد که خطوط AO، BO و CO اضلاع مقابل مثلث را، به ترتیب در P، Q و R تلاقی کنند. در این مورد فرض کرده‌ایم، که این سه نقطه از رأسهای A، B و C متمایزند (شکل ۳ را ملاحظه کنید). قضیهٔ سوا بر این است که رابطه (۲) در این حالت نیز برقرار است. برای اثبات این مطلب مثلثهای با قاعده [A, O] را در نظر می‌گیریم. در این صورت اصل سطح به دست می‌دهد.

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|AOB|}{|COA|}$$



شکل ۳

قضیهٔ سوا بر این است که:

$$\left(\frac{|BP|}{|PC|}\right) \cdot \left(\frac{|CQ|}{|QA|}\right) \cdot \left(\frac{|AR|}{|RB|}\right) = 1$$

به همان ترتیب، با استفاده از مثلثهای به قاعده‌های [B, O] و

[C, O]، داریم:

$$\frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|BOC|}{|AOB|}, \quad \frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|COA|}{|BOC|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، سطحهای مثلثها همه حذف

شده مقدار (۱) را، که قضیه را اثبات می‌کند، به دست می‌دهند.

سرانجام، قضیهٔ هوان را در نظر می‌گیریم، که روابط زیر

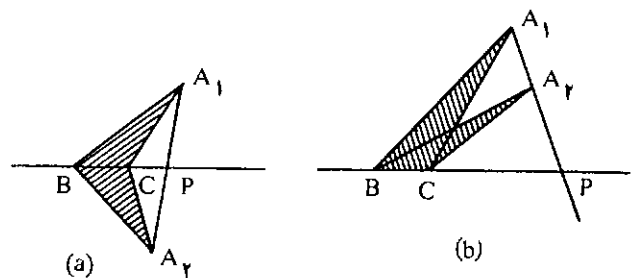
را، با استفاده از علامت نویسی مقرر در شکل، در مورد

پنج ضلعی، به دست می‌دهد.

اثبات (۱) بلافاصله به دست می‌آید. روشن است که هر طرف این برابری با نسبت ارتفاعات دو مثلث به قاعده [B, C] برابر است. توجه داشته باشید که، هرچند بعضی از اثباتهای مشهور قضیهٔ سوا (فی‌المثل، کتاب قضایا و مسائل هندسه را ملاحظه کنید) از استدلالهای مربوط به سطوح بهره برده‌اند، این اثباتها با «اصل سطح» مورد بحث ما متفاوت‌اند.

به عنوان پیش‌درآمدی از روشهای به کار رفته، از اصل سطح، برای اثبات سه قضیه یاد شده استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم قاطعی خطوط BC، CA، AB، مشخص شده از زوجهای گفته شده از رأسهای مثلث [A, B, C]، را به ترتیب در نقاط P، Q، R قطع کند، و این نقاط از رأسهای مثلث مزبور متمایز باشند (شکل ۲ را ملاحظه کنید). قضیهٔ منلائوس بر این است که:

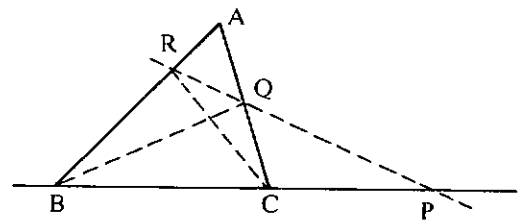
$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1 \quad (2)$$



شکل ۱

اصل سطح مقرر می‌کند که:

$$|A_1P|/|A_2P| = |A_1BC|/|A_2BC|$$



شکل ۲

قضیهٔ منلائوس مقرر می‌کند که:

$$\left(\frac{|BP|}{|PC|}\right) \cdot \left(\frac{|CQ|}{|QA|}\right) \cdot \left(\frac{|AR|}{|RB|}\right) = 1$$

برای اثبات این مطلب، اصل سطح را دربارهٔ مثلثهای با

در نتیجه :

$$\begin{aligned} |V_1 V_r| / |W_r V_r| &= (|V_1 W_r| + |W_r V_r|) / (|W_r V_r|) \\ &= (|V_1 V_r V_r| + |V_r V_r V_r|) / |V_r V_r V_r| \\ &= |V_1 V_r V_r V_r| / |V_r V_r V_r V_r| \end{aligned}$$

که در آن $|V_1 V_r V_r V_r|$ سطح چهار ضلعی $[V_1, V_r, V_r, V_r]$ است. به همین ترتیب،

$$\frac{|V_1 V_r|}{|V_1 W_r|} = \frac{|V_1 V_r V_r V_r|}{|V_1 V_r V_r V_r|}$$

و بنابراین

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} = \frac{|V_1 V_r V_r V_r|}{|V_1 V_r V_r V_r|} \cdot \frac{|V_1 V_r V_r V_r|}{|V_r V_r V_r V_r|}$$

در حالت کلی، به ازای ۵ و ... و ۲ و ۱

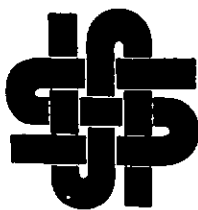
$$\frac{|V_i W_i|}{|W_{i+1} V_{i+2}|} =$$

$$\frac{|V_i V_{i+1} V_{i+2}|}{|V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3}|} \cdot \frac{|V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3}|}{|V_{i+2} V_{i+3} V_{i+4}|} \quad (5)$$

با قرار دادن این مقادیر در طرف چپ (۳) ملاحظه می‌کنیم که جمیع سطحهای مثلثها و چهارضلعیها حذف می‌شوند، و چنانکه مطلوب بود، مقدار ۱ را به دست می‌دهند. دومین اظهار (۴) از قضیه هوان را می‌توان به طریقی مشابه اثبات کرد.

نمونه اثباتهای فوق را می‌توان به‌طور مکرر به کاربرد: نسبتهای طولها را به صورت نسبتهای سطحها بیان می‌کنیم، و بعد، با ضرب این نسبتها، نشان می‌دهیم که، حذف انجام می‌گیرد و مقداری ثابت را به دست می‌دهد.

در اینجا پیش از توضیح توسیعات این نتایج، آنها را در زمینه‌ای عمومی‌تر مطرح می‌کنیم.

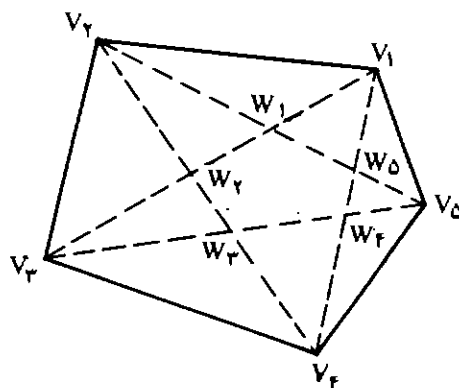


(۳)

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} = 1$$

(۴)

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} = 1$$



شکل ۴

قضیه هوان بر این است که :

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} = 1$$

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} \cdot \frac{|V_r W_r|}{|W_r V_r|} = 1$$

در اثبات اصلی هوان، از قضیه منلاوس در مثلثها و قاطعهای گوناگون واقع در شکل استفاده شده است؛ ولی ما در اینجا، با استفاده از اصل سطح، اثباتی ساده‌تر و مستقیم‌تر به دست می‌دهیم.

پنج ضلعی نشان داده شده در شکل ۴ را در نظر می‌گیریم. (در این اولین برخورد توجه‌مان را به حالتی معطوف کرده‌ایم که در آن $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$ یک پنج ضلعی محدب است. حالت عمومی‌تر را، بدون هیچ گونه فرضی در مورد تحدب، در بخش ۴ بررسی خواهیم کرد.) با استفاده از مثلثهای به قاعده $[V_2, V_4]$ داریم:

$$\frac{|V_1 W_r|}{|W_r V_r|} = \frac{|V_1 V_2 V_4|}{|V_3 V_4 V_r|}$$