

درس‌هایی از هندسه تحلیلی قرینه یابی در فضا

برای دانش آموزان دوره‌ی
پیش دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

اشاره

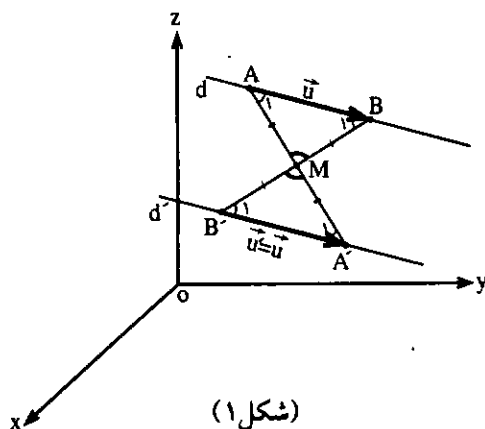
دانش آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی، معمولاً در آزمون‌های متعددی شرکت می‌کنند و در بعضی از آن‌ها، با مسائلی از درس هندسه‌ی تحلیلی روبه‌رو می‌شوند که به طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده‌اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می‌توانند به این گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث قرینه‌یابی در فضا است.

انگیزه‌ی اصلی نگارش این مقالات سؤالی بود که یک روز در کلاس درس هندسه‌ی تحلیلی دانش آموزان پرسیدند. آن‌ها می‌خواستند بدانند، معادله‌ی قرینه‌ی یک صفحه را نسبت به صفحه‌ی دیگر چگونه می‌توان تعیین کرد. در پاسخ به سؤال، مبحث قرینه‌یابی در فضا را مطرح کردم و نتیجه‌ی این تجربه را در قالب چند مقاله در مجله‌ی پرهان ملاحظه می‌کنید.

در شماره‌ی قبل، قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، قرینه‌ی نقطه نسبت به خط و قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه را بررسی کردیم. بهتر است قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قرینه‌ی خط نسبت به نقطه

فرض کنیم d یک خط و M نقطه‌ای در فضا باشد. برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M ، کافی است، دو نقطه‌ی دلخواه مانند A و B را روی خط d در نظر بگیریم، سپس قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به M به دست می‌آوریم و A' و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خط d' که از دو نقطه‌ی A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.



(شکل ۱)

قضیه: هرگاه d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن گاه داریم: $d \parallel d'$.

برهان: با توجه به شکل ۱ و هم‌نهشت بودن دو مثلث MAB و $M'A'B'$ (ض.ض) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی تالس: $d \parallel d'$.

با توجه به این قضیه می‌توان گفت که برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M ، کافی است، قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از خط d مانند A را نسبت به M پیدا کنیم و آن را A' بنامیم. خطی که از A' موازی با d رسم می‌شود، همان d' یعنی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است. بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. یک نقطه‌ی دلخواه مانند A روی خط d در نظر می‌گیریم.

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' می‌گذرد و موازی با d است، معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.

توجه: در صورتی که نقطه‌ی M روی خط d باشد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M همان خط d است.

مسئله‌ی ۱. معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر را نسبت به نقطه‌ی $M(1, -1, 2)$ به دست آورید.

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

حل

مرحله‌ی ۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x=1$ ، تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از خط d را به دست آوریم.

$$x=1 \Rightarrow y=0, z=-3; A(1, 0, -3) \in d$$

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به دست می‌آوریم:

$$x_{A'} = 2x_m - x_A = 2 - 1 = 1$$

$$y_{A'} = 2y_m - y_A = -2 - 0 = -2$$

$$z_{A'} = 2z_m - z_A = 4 + 3 = 7$$

در نتیجه: $A'(1, -2, 7)$.

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A' می‌گذرد و موازی با خط d است.

$$\vec{u}' = \vec{u} = (2, 3, -1) \quad \text{بردار هادی خط } d'$$

$$d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

اکنون همین مسئله را به صورت یک تست می‌آوریم و برای آن راه حلی کوتاه ارائه می‌کنیم.

تست: معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر نسبت به نقطه‌ی $M(1, -1, 2)$ کدام است؟

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+6}{-1} \quad (1)$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1} \quad (2)$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{1} \quad (3)$$

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+7}{-1} \quad (4)$$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا اگر d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن گاه داریم:

الف) $d \parallel d'$ ، یعنی بردارهای هادی دو خط، با هم

موازی اند.

ب) قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از d نسبت به M ، در معادله‌ی خط d' صدق می‌کند.

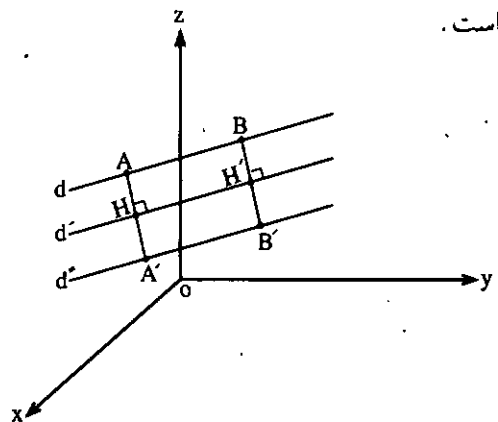
معادله‌های خط‌های گزینه‌های ۲ و ۳ با d موازی اند، پس یکی از این گزینه‌ها درست هستند. نقطه‌ی دلخواه $A(1, 0, -3)$ را روی d در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که قرینه‌ی این نقطه نسبت به M ، نقطه‌ی $A'(1, -2, 7)$ است و مختصات A' فقط در گزینه‌ی ۳ صدق می‌کند.

□

قرینه‌ی یک خط نسبت به خط دیگر

فرض کنیم d و d' دو خط در فضا باشند. در صورتی قرینه‌ی d نسبت به d' وجود دارد که d و d' در یک صفحه قرار داشته باشند، چون دو خط d و d' در یک صفحه‌ی موازی یا متقاطع هستند، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر دو خط d و d' موازی باشند، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به d' پیدا می‌کنیم و A' و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خطی که از A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.



(شکل ۲)

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و d'' بر AA' عمودند؛ از آن‌جا که دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \parallel d''$.

با توجه به نتیجه‌ی اخیر وقتی d موازی d' است، برای مشخص کردن قرینه‌ی d نسبت به d' نقطه‌ی دلخواهی مانند A را روی d در نظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به d' به دست می‌آوریم و A' می‌نامیم. اکنون خطی که از A' موازی

با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط d' مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی d مشخص می‌کنیم.
مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به d' محاسبه می‌کنیم و A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به خط، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).
مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

مسئله‌ی ۲. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به خط d' پیدا کنید.

$$d: \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

$$d': \frac{x+1}{4} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

حل: دو خط d و d' موازی هستند. بنابراین طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی ۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x=0$ تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از d را به دست آوریم.

$$x=0 \Rightarrow y=0, z=0; A(0, 0, 0)$$

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به خط d' به دست می‌آوریم، به این منظور، ابتدا تصویر نقطه‌ی A روی d' (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی پارامتری خط } d' \quad \text{(الف)}$$

(ب)

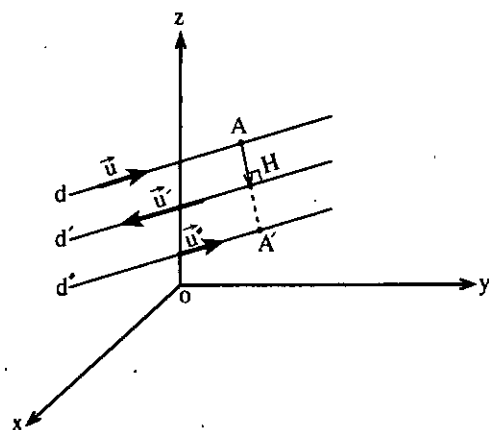
$$H \in d' \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{cases} 4t' - 1 \\ -2t' + 1 \\ 2t' + 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{مختصات پارامتری تصویر} \\ \text{نقطه‌ی } A \text{ روی } d' \end{array}$$

$$\vec{AH} = (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3) \quad \text{(ج)}$$

$$\vec{u}' = (4, -2, 2) \quad \text{بردار هادی خط } d' \quad \text{(د)}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{u}' = 0 \Rightarrow (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3) \cdot (4, -2, 2) = 0 \Rightarrow t' = 0$$

$$t' = 0 \Rightarrow H(-1, 1, 3) \quad \text{تصویر نقطه‌ی } A \text{ روی خط } d'$$



(شکل ۳)

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه ی A و H می توانیم مختصات نقطه ی A' (شکل ۳) را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 2, 6)$$

مختصات قرینه ی نقطه ی A نسبت به خط d'

مرحله ی ۳. معادله ی خطی که از A' موازی با d می گذرد، قرینه ی d نسبت به d' است.

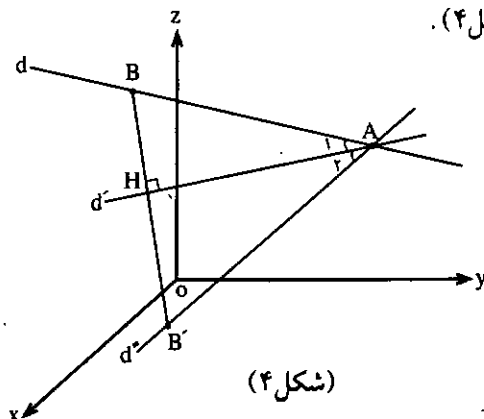
$$A'(-2, 2, 6), u'' \parallel u = (1, -2, 1) \Rightarrow u'' = (-2, 1, -1)$$

$$d'': \frac{x+2}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$$

معادله ی قرینه ی خط d نسبت به خط d'

□

حالت دوم: اگر دو خط d و d' متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع این دو خط را A می نامیم. سپس نقطه ی دلخواهی مانند B روی d در نظر می گیریم و قرینه ی این نقطه را نسبت به d' به دست می آوریم و B' می نامیم. بنابه تعریف، خطی که از A و B' می گذرد، قرینه ی خط d نسبت به d' است (شکل ۴).



(شکل ۴)

بنابراین، برای یافتن قرینه ی خط d نسبت به خط d'، به طوری که دو خط متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می دهیم: مرحله ی ۱. مختصات محل تقاطع دو خط را محاسبه می کنیم (نقطه ی A).

مرحله ی ۲. نقطه ی دلخواهی مانند B روی d در نظر می گیریم. سپس قرینه ی این نقطه را نسبت به خط d' محاسبه می کنیم (نقطه ی B').

مرحله ی ۳. خطی که از A و B' می گذرد، همان قرینه ی خط d نسبت به خط d' است.

نتیجه: همان طور که در شکل ۴ ملاحظه می کنید، دو مثلث AHB و AHB' بنابر حالت «ض ر ض» هم نهشت هستند. در نتیجه: $\angle A_1 = \angle A_2$. پس d' نیمساز زاویه ی بین دو خط d و d'' است.

مسئله ی ۳. معادله ی قرینه ی خط d را نسبت به خط d' به دست آورید.

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

$$d': \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-4}$$

حل: دو خط d و d' متقاطع هستند، بنابراین طبق مراحل زیر عمل می کنیم: مرحله ی ۱.

$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = 3t+3 \end{cases}; \frac{t+1-3}{2} = \frac{2t+2-1}{-1} = \frac{3t+3+1}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{t-2}{2} = \frac{2t+1}{-1} = \frac{3t+4}{-4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{t-2}{2} &= \frac{2t+1}{-1} \Rightarrow t=0 \\ \frac{t-2}{2} &= \frac{3t+4}{-4} \Rightarrow t=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دو خط d و d' متقاطع هستند}$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0+1 \\ y=0+2 \\ z=0+3 \end{cases} \Rightarrow A(1, 2, 3)$$

مختصات محل تقاطع دو خط d و d'

مرحله ی ۲. با فرض $x=2$ و قرار دادن آن در معادله ی خط d، مختصات نقطه ی دلخواهی مانند B از خط d به دست

می‌آید.

مرحله ۳. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B' می‌گذرد (d'')، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

$$\vec{AB}' = \left(-\frac{16}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{22}{\sqrt{5}} - 3\right) = \left(-\frac{22}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{11}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\vec{u}_1 \parallel \vec{AB}' \Rightarrow \vec{u}_1 = (-22, -6, 11) \quad \text{بردار هادی خط } d''$$

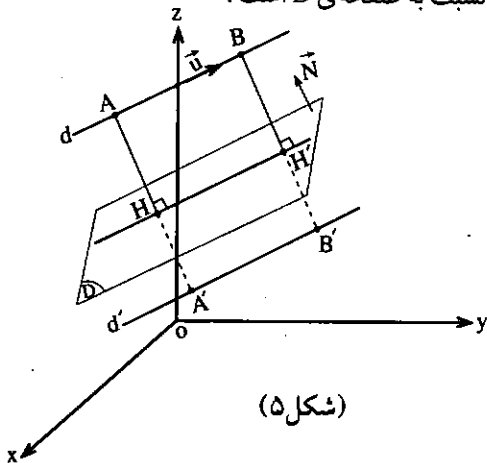
$$\frac{x-1}{-22} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{11} \quad \text{معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط } d'$$

□

قرینه‌ی خط نسبت به صفحه

فرض کنیم d و D به ترتیب یک خط و یک صفحه در فضا باشند. چون وضعیت نسبی خط و صفحه در فضا دو حالت موازی یا متقاطع را دارد، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر خط d با صفحه‌ی D موازی باشد، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به صفحه‌ی D پیدا می‌کنیم و A' و B' می‌نامیم؛ بنا به تعریف، خطی که از A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.



نکته: H و H' به ترتیب تصویر دو نقطه‌ی A و B روی صفحه‌ی D هستند. خطی که از H و H' می‌گذرد (شکل ۵)، تصویر خط d روی صفحه‌ی D است.

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۵ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و d' با خط HH' موازی‌اند. از آنجایی که دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \parallel d'$.
با توجه به نتیجه‌ی اخیر در حالتی که خط d موازی صفحه‌ی D است، برای مشخص کردن قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D، نقطه‌ی دلخواهی مانند A روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و

$$x=2 \Rightarrow y=4, z=6; B(2, 4, 6)$$

اکنون قرینه‌ی نقطه‌ی B(2, 4, 6) را نسبت به خط d' محاسبه می‌کنیم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر B را روی d' می‌یابیم و آن را H می‌نامیم.

(الف)

$$d': \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = -4t - 1 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی پارامتری خط } d'$$

(ب)

$$H \in d' \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R} : H \begin{cases} 2t' + 3 \\ -t' + 1 \\ -4t' - 1 \end{cases} \quad \text{مختصات پارامتری نقطه‌ی H}$$

(ج)

$$\vec{BH} = (2t' + 3 - 2, -t' + 1 - 4, -4t' - 1 - 6)$$

$$\vec{BH} = (2t' + 1, -t' - 3, -4t' - 7)$$

$$\vec{u} = (2, -1, -4) \quad \text{بردار هادی خط } d'$$

$$\vec{BH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2t' + 1, -t' - 3, -4t' - 7) \cdot (2, -1, -4) = 0$$

$$\Rightarrow t' = -\frac{11}{5}$$

(د)

$$t' = -\frac{11}{5} \Rightarrow H \begin{cases} -\frac{22}{5} + 3 \\ \frac{11}{5} + 1 \\ \frac{44}{5} - 1 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{5}, \frac{16}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه‌ی B و H می‌توانیم، مختصات نقطه‌ی B' (قرینه‌ی B نسبت به d') را محاسبه کنیم:

$$x_{B'} = 2x_H - x_B = -\frac{2}{5} - 2 = -\frac{12}{5}$$

$$y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{32}{5} - 4 = \frac{8}{5}$$

$$z_{B'} = 2z_H - z_B = \frac{78}{5} - 6 = \frac{38}{5}$$

$$\Rightarrow B'\left(-\frac{12}{5}, \frac{8}{5}, \frac{38}{5}\right) \quad \text{مختصات قرینه‌ی B نسبت به } d'$$



$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R} : H \begin{pmatrix} 3t' + 1 \\ 4t' \\ t' - 3 \end{pmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow 2(3t' + 1) + 4(4t') + t' - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t' = 0$$

$$t' = 0 \Rightarrow H(1, 0, -3)$$

(د) اگر A' قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 + 1 = 3$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = 0 + 0 = 0$$

$$z_{A'} = 2z_H - z_A = -6 - 3 = -9$$

قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D $A'(3, 0, -9)$

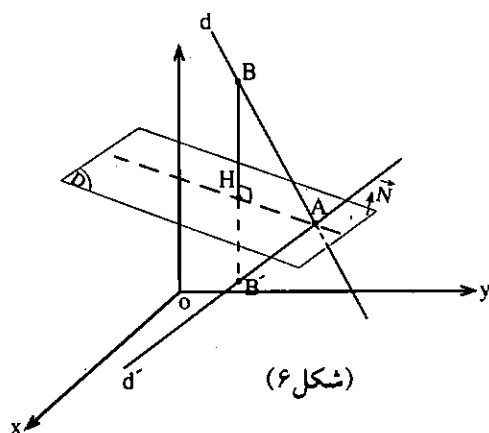
مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با خط d رسم می‌شود، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

$$A'(3, 0, -9) \text{ و } \vec{u} \parallel \vec{d} = (2, -1, -2)$$

$$d': \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+9}{-2} \quad \begin{array}{l} \text{معادله‌ی قرینه‌ی خط } d \\ \text{نسبت به صفحه‌ی } D \end{array}$$

□

حالت دوم: اگر خط d و صفحه‌ی D متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع خط و صفحه را A می‌نامیم، سپس نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و B' می‌نامیم. بنا به تعریف، خطی که از A و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است (شکل ۶).



نکته: خطی که از دو نقطه‌ی A و H (تصویر B روی صفحه‌ی D) می‌گذرد (شکل ۶)، تصویر خط d روی صفحه‌ی

A' می‌نامیم. اکنون خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است. بنابراین برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D ($d \parallel D$) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی خط d مشخص می‌کنیم.
مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D محاسبه می‌کنیم و A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).
مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

مسأله‌ی ۴. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به صفحه‌ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$D: 2x + 4y + z = 0$$

حل: خط d با صفحه‌ی D موازی است؛ زیرا بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمودند: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید:

$$\vec{u} = (2, -1, -2) \text{ بردار هادی خط } d$$

$$\vec{N} = (2, 4, 1) \text{ بردار نرمال صفحه‌ی } D$$

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = 6 - 4 - 2 = 0$$

مرحله‌ی ۱. با فرض $x = -1$ و قرار دادن آن در معادله‌ی خط d ، مختصات نقطه‌ی دلخواهی مانند A از d به دست می‌آید.

$$x = -1 \Rightarrow y = 0, z = 3; A(-1, 0, 3)$$

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{الف) } \vec{N} = (2, 4, 1) \text{ بردار نرمال صفحه‌ی } D \text{ است.}$$

ب) معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از A بر صفحه‌ی D عمود می‌شود:

$$AH: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = t - 3 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی پارامتری خط } AH$$

(ج)

روی D (یعنی نقطه ی H) به صورت زیر محاسبه می کنیم:

الف) $\vec{N} = (1, 5, -3)$ بردار نرمال صفحه است.

ب) معادله ی خطی را می نویسیم که از B بر صفحه ی D عمود می شود:

$$BH: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 5t + 1 \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{معادله ی پارامتری خط BH}$$

ج)

$$H \in BH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{cases} t' - 2 \\ 5t' + 1 \\ -3t' \end{cases}$$

$$H \in D \Rightarrow (t' - 2) + 5(5t' + 1) - 3(-3t') = 7$$

$$\Rightarrow t' = \frac{4}{35}$$

$$t' = \frac{4}{35} \Rightarrow H(-\frac{66}{35}, \frac{55}{35}, -\frac{12}{35})$$

د) اگر B' قرینه ی B نسبت به صفحه ی D باشد، آن گاه وسط BB' است. بنابراین داریم:

$$x_{B'} = 2x_H - x_B = -\frac{132}{35} - 2 = -\frac{202}{35}$$

$$y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{110}{35} + 1 = \frac{145}{35}$$

$$z_{B'} = 2z_H - z_B = -\frac{24}{35} - 0 = -\frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow B'(-\frac{202}{35}, \frac{145}{35}, -\frac{24}{35})$$

مرحله ی ۳. معادله ی خطی که از A و B' می گذرد، قرینه ی خط d نسبت به صفحه ی D است.

$$A(-1, 1, -1) \quad \text{و} \quad B'(-\frac{202}{35}, \frac{145}{35}, -\frac{24}{35})$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = (\frac{-167}{35}, \frac{110}{35}, \frac{11}{35}) \parallel (-167, 110, 11)$$

$$d': \frac{x+1}{-167} = \frac{y-1}{110} = \frac{z+1}{11} \quad \text{معادله ی قرینه ی خط d نسبت به صفحه ی D}$$

ادامه دارد...

D است.

برای یافتن قرینه ی خط d نسبت به صفحه ی D، به طوری که خط و صفحه متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می دهیم:
مرحله ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می کنیم (نقطه ی A).

مرحله ی ۲. نقطه ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می گیریم. سپس قرینه ی این نقطه را نسبت به صفحه ی D محاسبه می کنیم (نقطه ی B').

مرحله ی ۳. خطی که از A و B' می گذرد، همان قرینه ی خط d نسبت به صفحه ی D است.

مسئله ی ۵. قرینه ی خط d را نسبت به صفحه ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$D: x + 5y - 3z = 7$$

حل: خط d و صفحه ی D متقاطع هستند، زیرا:

$$\vec{N} = (1, 5, -3) \quad \text{بردار نرمال صفحه ی D}$$

$$\vec{u} = (3, -2, 1) \quad \text{بردار هادی خط d}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = 3 - 10 - 3 = -10 \neq 0 \Rightarrow d \nparallel D$$

مرحله ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می کنیم:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$A \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: A \begin{cases} 3t' + 2 \\ -2t' - 1 \\ t' \end{cases}$$

$$A \in D \Rightarrow (3t' + 2) + 5(-2t' - 1) - 3(t') = 7 \Rightarrow t' = -1$$

$$t' = -1 \Rightarrow A(-1, 1, -1) \quad \text{مختصات تقاطع خط و صفحه}$$

مرحله ی ۲. با قرار دادن $x = 2$ در معادله ی خط d، مختصات نقطه ی دلخواهی از آن، مانند B را محاسبه می کنیم:

$$x = 2 \Rightarrow y = -1, z = 0; B(2, -1, 0)$$

اکنون مختصات قرینه ی B را نسبت به صفحه ی D به دست می آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه ی B را