

قرینه یابی در فضا

درس هایی از
هندسه ی تحلیلی



برای دانش آموزان دوره ی
پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی



میرشهرام صدر

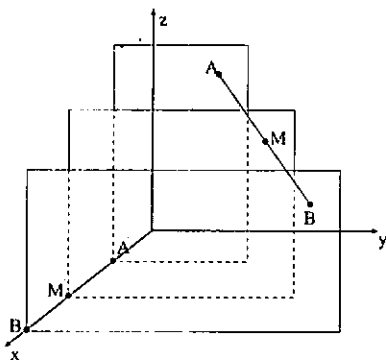
اشاره

دانش آموزان دوره ی پیش دانشگاهی، معمولاً در آزمون های متعددی شرکت می کنند و در بعضی از آن ها با مسائلی از درس هندسه ی تحلیلی روبه رو می شوند که به طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می توانند به این گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث، قرینه یابی در فضا است. در این سلسله مقاله ها سعی می کنیم، قرینه یابی در فضا را با شرح و بسط کامل ارائه دهیم. سپس مسائل آن را هم به روش تشریحی و هم با روش کوتاه، حل خواهیم کرد.

$$x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

به روش مشابه ثابت می شود که:

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



مختصات نقطه ی وسط پاره خط

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ، آن گاه مختصات

نقطه ی M وسط پاره خط AB برابر است با:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

اثبات- روش اول: از نقطه های A و B و M سه صفحه بر

محور x ها عمود می کنیم تا این محور را به ترتیب در A' و

B' قطع کنند. می دانیم که $x_1 = \overline{OA'}$ و $x_2 = \overline{OB'}$ و

$x_M = \overline{OM'}$. بنا به قضیه ی تالس در فضا، چون $AM = MB$

پس $A'M' = M'B'$ ، یعنی نقطه ی M' وسط پاره خط $A'B'$

است. بنابراین داریم:

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 2z_M - z_A$$

بنابراین، مختصات A' برابر است با:

$$A' \begin{cases} 2a - x. \\ 2b - y. \\ 2c - z. \end{cases}$$

مسئله ۱: قرینه نقطه $A(1, 2, 3)$ نسبت به نقطه M ، روی صفحه‌ای به معادله $D: x + y + z = 2$ قرار دارد. مکان هندسی نقطه M را به دست آورید.

حل: چنانچه $A'(x_{A'}, x_{B'}, x_{C'})$ قرینه نقطه $A(1, 2, 3)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M, z_M)$ باشد، چون A' روی صفحه D واقع است، بنابراین خواهیم داشت:

$$A' \in D \Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2 \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_M - 1 \\ y_{A'} = 2y_M - 2 \\ z_{A'} = 2z_M - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2(x_M + y_M + z_M) - 6 \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$x_M + y_M + z_M = 4$$

در نتیجه مکان هندسی نقطه M ، صفحه‌ای به معادله $D_1: x + y + z = 4$ است.

تمرین. در مسئله ۱ سه نقطه روی صفحه D_1 در نظر بگیرید. سپس تحقیق کنید که قرینه نقطه A نسبت به این نقاط روی صفحه D واقع است.

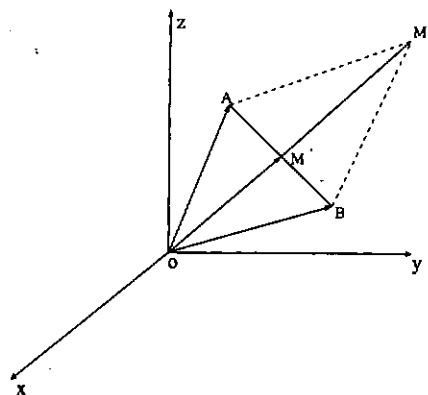
تصویر قائم نقطه روی خط

برای یافتن تصویر قائم نقطه $A(x, y, z)$ نسبت به خط به معادله $d: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ ، از A عمودی بر d رسم می‌کنیم تا این خط را در نقطه H قطع کند. بنابه تعریف، H را تصویر قائم نقطه A روی خط d می‌گوییم. برای یافتن مختصات H کافی است این مراحل را انجام دهیم:

مرحله ۱: معادله پارامتری خط d را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = pt + a \\ y = qt + b \\ z = rt + c \end{cases}$$

مرحله ۲: چون $H \in d$ ، بنابراین مختصات پارامتری



با توجه به جمع بردارها به روش متوازی الاضلاع داریم:

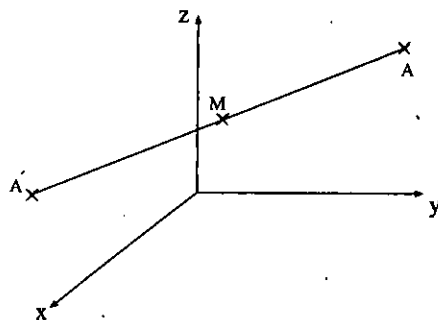
$$\vec{OM'} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

از طرف دیگر $\vec{OM'} = 2\vec{OM}$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} 2\vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \\ \Rightarrow \vec{OM} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \\ \Rightarrow M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \end{aligned}$$

قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

برای یافتن قرینه نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ نسبت به نقطه $M(a, b, c)$ ، ابتدا خطی از A به M وصل می‌کنیم. سپس از M روی همان امتداد به اندازه AM پاره خطی را جدا می‌کنیم تا نقطه A' به دست آید. بنابه تعریف، A' را قرینه نقطه A نسبت به مرکز M می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه A' ، به این نکته توجه می‌کنیم که M وسط پاره خط AA' است. در نتیجه خواهیم داشت:



$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مرحله ۴: $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Rightarrow (t' - 1, -t' + 3, 2t' - 5) \cdot (1, -1, 2) = 0$$

$$\Rightarrow t' - 1 - t' + 3 + 4t' - 10 = 0$$

$$\Rightarrow t' = \frac{7}{3}$$

اکنون $t' = \frac{7}{3}$ را در مختصات پارامتری نقطه ی H قرار

می دهیم در نتیجه داریم:

$$H\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

اکنون همین مسأله را به صورت یک تست می آوریم و راه حلی کوتاه برای آن ارائه می کنیم:

تست: تصویر قائم نقطه ی $A(1, -1, 2)$ روی خط به

معادله ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ کدام است؟

$$H\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad ۲ \quad H\left(-\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{23}{3}\right) \quad ۱$$

$$H\left(+\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad ۴ \quad H\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right) \quad ۳$$

حل: گزینه ی ۲ صحیح است. زیرا اگر H تصویر نقطه ی

A روی خط d باشد، آن گاه الف) $H \in d$ (یعنی مختصات H

در معادله ی خط d صدق می کند). ب) $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ و این رابطه ها فقط در گزینه ی ۲ صدق می کند.

الف. $H \in d$ ، زیرا مختصات آن در معادله ی خط d صدق می کند.

$$\vec{AH} = \left(\frac{7}{3} - 1, -\frac{1}{3} + 1, \frac{5}{3} - 2\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{ب.}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{u} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cdot (1, -1, 2) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

قرینه ی نقطه نسبت به یک خط

برای یافتن قرینه ی نقطه ی $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به خط به

معادله ی $d: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ از A عمودی بر خط d

رسم می کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه ی A روی خط d به

دست آید. سپس $\vec{AH}$ را به اندازه ی خودش امتداد می دهیم تا

نقطه ی A' به دست آید. بنابه تعریف، A' را قرینه ی نقطه ی

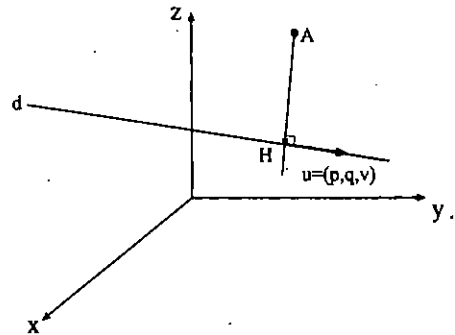
A نسبت به خط d می نامیم. برای یافتن مختصات نقطه ی A'

این مراحل را انجام می دهیم:

مرحله ی ۱: مختصات H یعنی تصویر

قائم نقطه ی A روی خط d را به دست می آوریم.

$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: \begin{cases} pt' + a \\ qt' + b \\ rt' + c \end{cases}$$



مرحله ی ۳: معادله ی برداری $\vec{AH}$ را می نویسیم:

$$\vec{AH} = (pt' + a - x, qt' + b - y, rt' + c - z)$$

مرحله ی ۴: از آن جا که امتداد بردار $\vec{AH}$ بر امتداد بردار

هادی خط یعنی $\vec{u} = (p, q, r)$ عمود است، داریم:

$$\vec{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

از رابطه ی $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ مقدار پارامتری t' محاسبه

می شود. در نتیجه مختصات نقطه ی H به دست می آید.

مسأله ی ۲: تصویر قائم نقطه ی $A(1, -1, 2)$ را روی خط

d به معادله ی $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ به دست آورید.

حل

مرحله ی ۱: معادله ی پارامتری خط d را می نویسیم:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

مرحله ی ۲: مختصات پارامتری نقطه ی H را می نویسیم:

$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: \begin{cases} t' \\ 2t' - 3 \end{cases}$$

مرحله ی ۳: معادله ی برداری $\vec{AH}$ را می نویسیم:

$$\vec{AH} = (t' - 1, -t' + 2 + 1, 2t' - 3 - 2)$$

$$\Rightarrow \vec{AH} = (t' - 1, -t' + 3, 2t' - 5)$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = \frac{-4}{14} + 1 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$z_{A'} = 2z_H - z_A = \frac{-6}{14} - 0 = \frac{-3}{7}$$

$$\Rightarrow A'(\frac{-8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{7})$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می آوریم و راه حلی کوتاه برای آن ارائه می کنیم.

تست: قرینه ی نقطه ی $A(1, -1, 0)$ نسبت به خط به

معادله ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ کدام است؟

$$A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}) \quad 2. \quad A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{3}{7}) \quad 1.$$

$$A'(-\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{3}{7}) \quad 4. \quad A'(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}) \quad 3.$$

حل: گزینه ی ۴ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه ی نقطه ی A نسبت به خط d باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ بر خط d عمود است، یعنی $\vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0$ (ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله ی خط d صدق می کند. و این روابط فقط در گزینه ی ۴ برقرار است.

$$\vec{AA'} = (-\frac{8}{7} - 1, \frac{5}{7} - (-1), -\frac{3}{7} - 0) \quad (\text{الف})$$

$$\Rightarrow \vec{AA'} = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7})$$

$$\vec{AA'} \cdot \vec{u} = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7}) \cdot (1, 2, 3) = -\frac{15}{7} + \frac{24}{7} - \frac{9}{7} = 0$$

(ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H را به دست می آوریم:

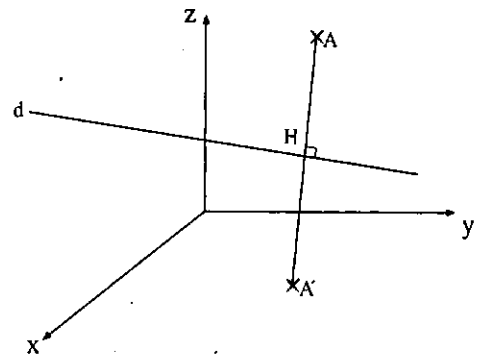
$$H \begin{cases} \frac{-\frac{8}{7} + 1}{2} = -\frac{1}{14} \\ \frac{\frac{5}{7} - 1}{2} = -\frac{2}{14} \\ \frac{\frac{-3}{7} - 0}{2} = -\frac{3}{14} \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که مختصات H در معادله ی خط d صدق می کند، زیرا:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

مرحله ی ۲: چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره خط می توان مختصات A' را محاسبه کرد:

$$A' \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$$



مسأله: قرینه ی نقطه ی $A(1, -1, 0)$ را نسبت به خط

به معادله ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ به دست آورید.

حل:

مرحله ی ۱: ابتدا مختصات تصویر نقطه ی A روی خط d را به دست می آوریم. برای این منظور داریم:

$$(\text{الف}) \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

(ب)

$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{pmatrix} t' \\ 2t' \\ 3t' \end{pmatrix}$$

$$\vec{AH} = (t' - 1, 2t' + 1, 3t') \quad (\text{ج})$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{د})$$

$$\Rightarrow (t' - 1, 2t' + 1, 3t') \cdot (1, 2, 3) = 0$$

$$\Rightarrow t' - 1 + 4t' + 2 + 9t' = 0 \Rightarrow t' = -\frac{1}{14}$$

$$t' = -\frac{1}{14} \Rightarrow H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

مرحله ی ۲: H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = \frac{-2}{14} - 1 = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7}$$

حل:

مرحله ۱: $N = (1, -2, 4)$ بردار نرمال صفحه.

مرحله ۲: معادله‌ی خط عمود بر صفحه را

می‌نویسیم:

$$A(3, -2, -3), \vec{u} = \vec{N} = (1, -2, 4)$$

$$\Rightarrow AH: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{4}$$

مرحله ۳: از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست می‌آید:

$$AH: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = 4t - 3 \end{cases}$$

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{cases} t' + 3 \\ -2t' - 2 \\ 4t' - 3 \end{cases}$$

$$H \in D \Rightarrow t' + 3 - 2(-2t' - 2) + 4(4t' - 3) = 16 \\ \Rightarrow t' = 1$$

$$t' = 1 \Rightarrow H \begin{cases} 1 + 3 \\ -2 - 2 \\ 4 - 3 \end{cases} \Rightarrow H(4, -4, 1)$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم:

تست: تصویر قائم نقطه‌ی $A(3, -2, -3)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: x - 2y + 4z = 16$ کدام است؟

$$1. (4, 4, 1) \quad 2. (-4, 4, 1)$$

$$3. (4, -4, 1) \quad 4. (-4, 4, -1)$$

حل: گزینه ۳ صحیح است. اگر H تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه الف) مختصات H در

معادله‌ی صفحه‌ی D صدق می‌کند. ب) بردار $\vec{AH}$ با بردار نرمال صفحه، یعنی N موازی است. و این رابطه‌ها فقط در گزینه ۳ صدق می‌کند.

$$\text{الف. } H \in D \text{ زیرا: } 4 - 2(4) + 4(1) = 0$$

$$\text{ب. } \vec{AH} = (4 - 3, -4 + 2, 1 + 3) = (1, -2, 4) = \vec{N}$$

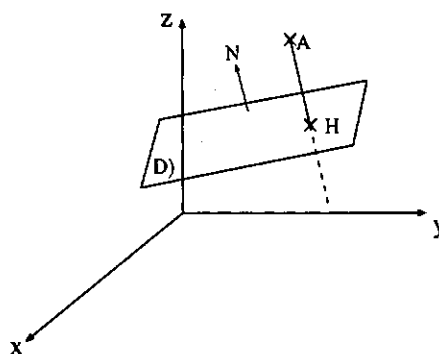
قرینه‌ی نقطه نسبت به یک صفحه در فضا

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{14}}{1} = \frac{-\frac{2}{14}}{-2} = \frac{-\frac{3}{14}}{4} \Rightarrow -\frac{1}{14} = -\frac{1}{14} = -\frac{1}{14}$$

تصویر قائم نقطه روی یک صفحه

برای یافتن تصویر قائم نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا این صفحه را در نقطه‌ی H قطع کند. بنابر تعریف، H را تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D می‌گوییم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی H کافی است، مراحل زیر را انجام دهیم:



مرحله ۱: بردار نرمال صفحه، یعنی $\vec{N} = (a, b, c)$ را مشخص می‌کنیم.

مرحله ۲: معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر صفحه‌ی D عمود است. برای این منظور کافی است بردار هادی خط را برابر با بردار نرمال صفحه در نظر بگیریم. بنابرین داریم:

$$A(x_0, y_0, z_0), \vec{u} = \vec{N} = (a, b, c)$$

$$AH: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

مرحله ۳: از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D، مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید. برای این منظور، معادله‌ی خط AH را به صورت پارامتری تبدیل می‌کنیم. سپس مختصات پارامتری نقطه‌ی H را در معادله‌ی صفحه‌ی D قرار می‌دهیم تا پارامتر مورد نظر به دست آید. از آن‌جا مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید.

مسأله: تصویر قائم نقطه‌ی $A(3, -2, -3)$ را روی صفحه به معادله‌ی $D: x - 2y + 4z = 16$ به دست آورید.

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} 2t' \\ -3t' - 2 \\ t' + 1 \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow 2(2t') - 3(-3t' - 2) + t' + 1 + 7 = 0 \\ \Rightarrow t' = -1$$

$$t' = -1 \Rightarrow H \begin{vmatrix} -2 \\ 3 - 2 \\ -1 + 1 \end{vmatrix} \Rightarrow H(-2, 1, 0)$$

مرحله ۲: H وسط AA' است، بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = -4 - 0 = -4$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 + 2 = 4$$

$$z_{A'} = 2z_H - z_A = 0 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow A'(-4, 4, -1)$$

تست: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(0, -2, 1)$ نسبت به صفحه‌ی

معادله‌ی $D: 2x - 3y + z + 7 = 0$ کدام است؟

$$A'(-4, 4, -1) \cdot 2 \quad A'(-4, 4, 1) \cdot 1$$

$$A'(-4, -4, -1) \cdot 4 \quad A'(4, -4, -1) \cdot 3$$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه‌ی

نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ با بردار نرمال صفحه‌ی D موازی است.

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله‌ی صفحه صدق می‌کند و این روابط فقط در گزینه‌ی ۲ برقرارند.

الف)

$$\vec{AA'} = (-4 - 0, 4 + 2, -1 - 1) = (-4, 6, -2)$$

$$\vec{N} = (2, -3, 1) \Rightarrow \vec{AA'} = -2\vec{N} \Rightarrow \vec{AA'} \parallel \vec{N}$$

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H را به دست می‌آوریم:

$$H \begin{vmatrix} -4 + 0 \\ 2 \\ 4 - 2 \\ 2 \\ -1 + 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که مختصات H در معادله‌ی صفحه‌ی D

صدق می‌کند، زیرا:

$$2x - 3y + z + 7 = 0, H(-2, 1, 0)$$

$$\Rightarrow 2(-2) - 3(1) + 0 + 7 = 0 \Rightarrow -7 + 7 = 0$$

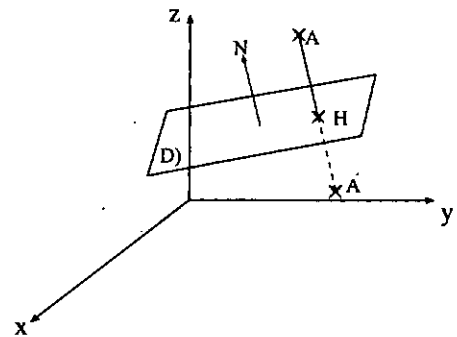
ادامه دارد...

D به دست آید. سپس AH را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید، بنا به تعریف A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A' مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱: مختصات H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم.

مرحله ۲: چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره‌خط می‌توان، مختصات A' را محاسبه کرد.

$$A' \begin{vmatrix} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{vmatrix}$$



مسئله: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(0, -2, 1)$ را نسبت به صفحه‌ی

معادله‌ی $D: 2x - 3y + z + 7 = 0$ به دست آورید.

حل:

مرحله ۱: ابتدا مختصات تصویر قائم نقطه‌ی A روی

صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

الف) $N = (2, -3, 1)$ بردار نرمال صفحه.

ب) معادله‌ی خط عمود بر صفحه را می‌نویسیم:

$$A(0, -2, 1), \vec{u} = \vec{N} = (2, -3, 1)$$

$$AH: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

ج) از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست

می‌آید:

$$AH: \begin{vmatrix} x = 2t \\ y = -3t - 2 \\ z = t + 1 \end{vmatrix}$$