

فضای برداری (قسمت اول)

(ریاضیات جدید سوم ریاضی)

● حمیدرضا امیری

تعریف عضو متقابل $\forall a \in G, \exists! a' \in G, a * a' = a' * a = e$ ۳)

$$a * a' = e = ۳ \Rightarrow \frac{a \cdot a'}{۳} = ۳ \Rightarrow a \cdot a' = ۹ \xrightarrow{a^{-۱}} a' = \frac{۹}{a}$$

اگر از رابطه $a' * a = e$ نیز استفاده کنیم a' بر حسب a همان $\frac{۹}{a}$ خواهد بود. بنابراین تا این مرحله ثابت شد که $(Q^+, *)$ یک گروه است و چون داریم: (به ازای هر $a, b \in Q^+$)

$$a * b = \frac{a \cdot b}{۳} = \frac{b \cdot a}{۳} = b * a$$

پس، گروه $(Q^+, *)$ آبدلی می باشد.

همچنین در یکی دیگر از شماره های برهان (برهان ۸) به اندازه کافی بر روی مفاهیم حلقه و میدان صحبت شد و شما بخصوص با مفهوم میدان آشنا هستید و می دانید میدان نیز دستگاهی است ریاضی متشکل از مجموعه ای ناتهی مانند F و دو عمل مانند $+$ و $\times$ که اگر اولاً، $(F, +)$ گروه آبدلی باشد. ثانیاً، $(F - \{0\}, \times)$ گروه آبدلی باشد و ثالثاً، عمل دوم یعنی $\times$ نسبت به عمل اول یعنی $+$ از چپ و راست توزیع پذیر باشد، در این صورت $(F, +, \times)$ را یک میدان می نامند.

به عنوان مثال اگر فرض کنیم، $F = \mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) و عمل اول را جمع معمولی و عمل دوم را ضرب معمولی در نظر بگیریم، در این صورت مجموعه اعداد حقیقی به همراه جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می دهد.

حال می خواهیم بین اعضای یک گروه جابجایی و یک میدان، عملی که آن را عمل ضرب اسکالر می نامیم، تعریف کرده و با بیان چهار شرط دیگر بر روی اعضای این دو مجموعه (گروه آبدلی و میدان)، یک دستگاه ریاضی به نام فضای برداری تعریف می کنیم.

پیش از این با مفهوم گروه آشنا شده ایم و می دانیم، گروه، یک دستگاهی ریاضی متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند G است و یک عمل دو تایی مانند $*$ که ۳ خاصیت یا ویژگی: شرکت پذیری، عضو خنثی و عضو متقابل بر این دستگاه حاکم می باشد. و به یاد داریم که اگر گروه $(G, *)$ علاوه بر خواص گروه دارای خاصیت جابه جایی نیز باشد، آن را یک گروه جابه جایی یا آبدلی می نامیدیم. به عنوان مثال و به عنوان یادآوری، ثابت می کنیم، Q^+ به همراه عمل $*$ که در زیر تعریف می شود یک گروه آبدلی است:

$$\forall a, b \in Q^+, a * b = \frac{a \cdot b}{۳}$$

$$۱) a * (b * c) = a * \left(\frac{b \cdot c}{۳}\right) = \frac{a \cdot \left(\frac{b \cdot c}{۳}\right)}{۳} = \frac{a \cdot (b \cdot c)}{۹} \quad (۱)$$

$$(a * b) * c = \left(\frac{a \cdot b}{۳}\right) * c = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{۳}\right) \cdot c}{۳} = \frac{(a \cdot b) \cdot c}{۹} = \frac{a \cdot (b \cdot c)}{۹} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c \quad \text{شرکت پذیری}$$

تعریف عضو خنثی $\exists! e \in G, \forall a \in G, a * e = e * a = a$ ۲)
طبق تعریف عضو خنثی داریم:

$$a * e = e * a = a$$

$$a * e = a \Rightarrow \frac{a \cdot e}{۳} = a \Rightarrow a \cdot e = ۳a \xrightarrow{a^{-۱}} e = ۳$$

اگر e را از رابطه $e * a = a$ نیز به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\boxed{e = ۳}$$

۴ - عمل + در V تعویض پذیر است زیرا:

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c') =$$

$$(a' + a, b' + b, c' + c) = (a', b', c') + (a, b, c)$$

۵ - عمل ضرب اسکالر در V بسته است یعنی

$$r(a, b, c) = (ra, rb, rc) \in V$$

۶ - اگر (a, b, c) عضو دلخواهی از V باشد داریم:

$$1. (a, b, c) = (1a, 1b, 1c) = (a, b, c)$$

$$V) (r_1 + r_2) \cdot \underbrace{(a, b, c)}_V = ((r_1 + r_2)a, (r_1 + r_2)b, (r_1 + r_2)c)$$

$$= ((r_1a + r_2a), (r_1b + r_2b), (r_1c + r_2c))$$

$$= (r_1a, r_1b, r_1c) + (r_2a, r_2b, r_2c)$$

$$= r_1 \cdot \underbrace{(a, b, c)}_V + r_2 \cdot \underbrace{(a, b, c)}_V$$

$$8) r[\underbrace{(a, b, c)}_{V_1} + \underbrace{(a', b', c')}_{V_2}]$$

$$= r((a + a'), (b + b'), (c + c'))$$

$$= (r(a + a'), r(b + b'), r(c + c'))$$

$$= ((ra + ra'), (rb + rb'), (rc + rc'))$$

$$= (ra, rb, rc) + (ra', rb', rc')$$

$$= r \cdot \underbrace{(a, b, c)}_{V_1} + r \cdot \underbrace{(a', b', c')}_{V_2}$$

$$9) (r_1r_2) \cdot \underbrace{(a, b, c)}_V = ((r_1r_2)a, (r_1r_2)b, (r_1r_2)c)$$

$$= (r_1(r_2a), r_1(r_2b), r_1(r_2c))$$

$$= r_1 \cdot (r_2a, r_2b, r_2c) = r_1 \cdot \underbrace{[r_2 \cdot (a, b, c)]}_V$$

بنابراین V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می دهد.

(در حالت کلی نیز می توان ثابت کرد مجموعه همه n تایی های

مرتب با درآیه های حقیقی یعنی $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ تشکیل می دهد).

مثال ۲: آیا $V = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ روی $\mathbb{R}$ فضای

برداری تشکیل می دهد؟

خیر، علی رغم آن که همه خواص گروه و شرایط چهارگانه

فضای برداری برقرار است، اما به دلیل این که ضرب اسکالر در V

بسته نیست، V تشکیل فضای برداری نمی دهد به طور مثال:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}, (1, 2, 3) \in V$$

$$\sqrt{2}(1, 2, 3) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \notin V$$

تعریف: فرض کنیم $(V, \oplus)$ یک گروه آبدی باشد و فرض کنیم

F یک میدان بوده، عمل ضرب اسکالر بین اعضای F و V به صورتی

تعریف شده باشد، که این عمل در V بسته باشد یعنی،

$$\forall a \in F, \forall v \in V, a \cdot v \in V$$

در این صورت هرگاه چهار شرط زیر نیز همگی برقرار باشند،

می گوئیم مجموعه V یک فضای برداری روی میدان $(F, +, \times)$

تشکیل داده است.

$$1) \forall v \in V, 1 \cdot v = v$$

(در این شرط، ۱ عضو خنثی در میدان F نسبت به عمل دوم یا

ضرب می باشد)

$$2) \forall a, b \in F, \forall v \in V, (a + b) \cdot v = a \cdot v \oplus b \cdot v$$

$$3) \forall a \in F, \forall v_1, v_2 \in V, a \cdot (v_1 \oplus v_2) = a \cdot v_1 \oplus a \cdot v_2$$

$$4) \forall a, b \in F, \forall v \in V, (a \times b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$$

تذکر: از این به بعد در سراسر این مقاله میدان F را میدان اعداد

حقیقی همراه با جمع و ضرب معمولی در نظر گرفته، فضاهای برداری

روی این میدان یعنی، $\mathbb{R}$ را، فضای برداری حقیقی می نامیم.

قرارداد: برای راحتی، عمل تعریف شده روی گروه V را به

صورت + نمایش می دهیم که نماد + لزوماً جمع معمولی نیست زیرا

ممکن است V به طور مثال مجموعه ماتریسها باشد که در این صورت

بدیهی است منظور از گروه $(V, +)$ ، گروه ماتریسها همراه با عمل جمع

ماتریسی خواهد بود.

پس هرگاه V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری باشد می نویسیم (ض ا

و + و V) یک فضای برداری حقیقی است. (ض ا، یعنی ضرب

اسکالر).

مثال ۱: اگر فرض کنیم $V = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

در این صورت با تعاریف جمع و ضرب اسکالر که در ذیل می آید، V

روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می دهد.

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

$$r \cdot (a, b, c) = (ra, rb, rc)$$

۱ - واضح است که عمل + در V شرکت پذیر است.

۲ - عضو خنثی در V نسبت به + سه تایی مرتب $(0, 0, 0)$

می باشد.

۳ - متقابل جمعی (a, b, c) عبارت است از $(-a, -b, -c)$

زیرا: عضو خنثی $(0, 0, 0) = (a, b, c) + (-a, -b, -c)$

بخصوص اعضای V' ، تعریف شده است، به V' القاء می شود، مانند خواص شرکت پذیری و جابجایی در گروه و چهار خاصیت فضای برداری، از طرفی سه خاصیت بسته بودن نسبت به جمع، عضو خنثی و عضو متقابل در گروه و همچنین خاصیت بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر از V به V' القاء نمی شود، که اگر دو خاصیت بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر را برای V' در نظر بگیریم، می توانیم ثابت کنیم دو خاصیت دیگر یعنی عضو خنثی و متقابل را براحتی می توان از آن دو نتیجه گرفت که بر این اساس قضیه زیر بیان شده و اثبات زیر فضا بودن را ساده می کند.

قضیه: اگر V یک فضای برداری بوده و V' زیر مجموعه ناتهی V باشد، در این صورت «شرط لازم و کافی برای آن که V' زیر فضای V باشد، آن است که V' نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد» (اثبات در کتاب درسی موجود است)

مثال ۸: ثابت کنید $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ یک زیر فضای فضای برداری ماتریسهای 2×2 همراه با دو عمل جمع ماتریسی و ضرب عدد در ماتریس، است. برای اثبات کافی است ثابت کنیم H ، که زیر مجموعه ماتریسهای 2×2 و ناتهی نیز هست، نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

(در این جا ضرب اسکالر همان ضرب عدد در ماتریس است)

$$H \subseteq M_{2 \times 2}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$$

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 + 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in H$$

$$\text{ب) } r \in \mathbb{R}, r \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ r \cdot 0 & rc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \in H$$

مثال ۹: نشان دهید مجموعه $H = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$ یک زیر فضای $\mathbb{R}^3$ است.

$$H \subseteq \mathbb{R}^3, (0, 0, 0) \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$$

$$\text{الف) } (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in H \Rightarrow$$

$$2x_1 - y_1 + z_1 = 0 \wedge 2x_2 - y_2 + z_2 = 0$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in H$$

$$2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) =$$

$$(2x_1 - y_1 + z_1) + (2x_2 - y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

(درآیه های سه تایی های مرتب در V باید اعداد گویا باشند).

مثال ۳: اگر فرض کنیم $V = \mathbb{R}$ واضح است که مجموعه اعداد حقیقی همراه با عمل جمع معمولی گروه آبدی می باشد، یعنی $(\mathbb{R}, +)$ گروه جابجایی است؛ و در این مثال چون ضرب اسکالر بین اعضای $\mathbb{R}$ و خودش تعریف می شود، همان ضرب معمولی است که همه خواص دیگر نیز جزو خواص دستگاه اعداد حقیقی است. پس $\mathbb{R}$ روی خودش یک فضای برداری تشکیل می دهد.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $V = Q$ در این صورت Q (مجموعه اعداد گویا) روی $\mathbb{R}$ فضای برداری تشکیل نمی دهد، زیرا ضرب اسکالری که بین Q و $\mathbb{R}$ تعریف می شود همان ضرب معمولی است و این ضرب در Q بسته نیست، به طور مثال $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ و $1 \in Q$ ولی $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \notin Q$.

مثال ۵: با فرض $V = \mathbb{R}$ مشاهده می شود که $\mathbb{R}$ روی میدان اعداد گویا یعنی Q یک فضای برداری تشکیل می دهد.

مثال ۶: اگر $V = Q$ در این صورت Q روی خودش یک فضای برداری تشکیل می دهد $(Q, +, \cdot)$ یک میدان است.

تمرین: ثابت کنید هر میدان مانند F روی خودش یک فضای برداری تشکیل می دهد.

مثال ۷: اگر فرض کنیم $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ در این صورت V (مجموعه ماتریسهای 2×2 با درآیه های حقیقی) روی $\mathbb{R}$ تشکیل فضای برداری می دهد. (این مثال به طور مشروح در کتاب درسی بررسی شده است) البته در حالت کلی نیز می توان ثابت کرد مجموعه ماتریسهای $m \times n$ روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می دهند.

در این قسمت توجه شما را به زیر مجموعه های خاصی از یک فضای برداری جلب می کنیم، فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، و V' زیر مجموعه ای ناتهی از V بوده و با همان دو عمل جمع و ضرب اسکالری که V فضای برداری تشکیل داده، V' نیز یک فضای برداری تشکیل دهد، در این صورت V' را یک زیر فضای، فضای برداری V می نامند.

با توجه به تعریف زیر فضا، مشاهده می شود که زیر فضای یک فضای برداری خودش یک فضای برداری است.

از طرفی اگر V' زیر فضای، فضای برداری V باشد بسیاری از خواص فضای برداری V به دلیل آن که روی همه اعضای V

(-۲, ۱) ∈ (H ∪ K) (-۲ + ۲ × ۱ = ۰ : زیرا)

(۱, ۲) + (-۲, ۱) = (-۱, ۳) ∉ (H ∪ K)

زیرا: $۲ \times (-۱) - ۳ = -۵ \neq ۰$ و $-۱ + ۲ \times ۳ = ۵ \neq ۰$

مثال ۱۱: اگر B ماتریسی ثابت از مجموعه ماتریسهای $n \times n$

باشد، نشان دهید مجموعه $H = \{A | AB = B \cdot A\}$ یک زیر فضای، فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ است. (ضرب ماتریسها در جمع آنها توزیع پذیر است.) واضح است که $H \neq \emptyset$ زیرا $\bar{0} = \bar{0}B = B \cdot \bar{0}$ پس $\bar{0} \in H$.

از طرفی همواره $H \subseteq M_{n \times n}$ بنابراین کافی است ثابت کنیم H

نسبت به جمع و ضرب اسکالر (ضرب عدد در ماتریس) بسته است.

$$A_1 B = B \cdot A_1 \quad \swarrow$$

$$A_2 B = B \cdot A_2 \quad \searrow$$

$$A_1, A_2 \in H \Rightarrow \text{فرض کنیم (الف)}$$

$$(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B =$$

$$B \cdot A_1 + B \cdot A_2 = B \cdot (A_1 + A_2) \Rightarrow (A_1 + A_2) \in H$$

$$r \in \mathbb{R}, A \in H \Rightarrow AB = B \cdot A \quad \text{فرض کنیم (ب)}$$

$$(rA)B = r(AB) = r(B \cdot A) = (rB)A = (B \cdot r)A = B \cdot (rA)$$

$$\Rightarrow rA \in H$$

مثال ۱۲: نشان دهید خاصیت جابه جایی نسبت به عمل جمع در

یک فضای برداری را می توان از سایر اصول نتیجه گرفت.

فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و فرض کنیم

x و y دو عضو دلخواه از V باشند، داریم:

$$(1+1)(x+y) = (1+1)x + (1+1)y = x+x+y+y \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$(1+1)(x+y) = 1(x+y) + 1(x+y) = x+y+x+y \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow x+x+y+y = x+y+x+y$$

و با توجه به قانون حذف در گروه (V, +) داریم:

$$x+y = y+x$$

حال که خواص فضای برداری را بررسی کرده، زیر فضاها را نیز

تا حدودی شناختیم، آمادگی داریم تا به داخل این ساختمان ریاضی قدم گذاشته و اجزای تشکیل دهنده این فضا را که همان بردارهای فضای برداری هستند مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم؛ و این خود مستلزم مقاله ای مفصل و مجزا است که ان شاء الله... در شماره بعد خواهد آمد.

(شرط این که سه تایی مرتبی در H باشد با توجه به تعریف مجموعه H، می بایست دو برابر مؤلفه اول منهای مؤلفه دوم بعلاوه مؤلفه سوم آن، مساوی با صفر شود)

فرض کنیم (ب) $r \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in H \Rightarrow 2x - y + z = 0$

$$r \cdot (x, y, z) = (rx, ry, rz) \in H$$

$$2(rx) - (ry) + (rz) = r(2x - y + z) = r \cdot 0 = 0$$

زیرا:

مثال ۱۰: نشان دهید، اگر H و K هر دو زیر فضای،

فضای برداری V باشند در این صورت $(H \cap K)$ نیز زیر فضای V است. با یک مثال نقض این حکم را در مورد $(H \cup K)$ (در حالت کلی) رد کنید.

فرض کنیم H و K زیر فضای V باشند پس هر دو فضای برداری

بوده و می بایست شامل بردار صفر یعنی $\bar{0}$ باشند (بردار صفر یا $\bar{0}$ همان عضو خنثی در گروه آبلی است).

$$\bar{0} \in H, \bar{0} \in K \Rightarrow \bar{0} \in (H \cap K) \Rightarrow (H \cap K) \neq \emptyset$$

$$H \Rightarrow H \subseteq V, H \cap K \subseteq H \Rightarrow (H \cap K) \subseteq V$$

$$x, y \in (H \cap K) \Rightarrow x, y \in H \wedge x, y \in K$$

فرض کنیم (الف)

$$H \text{ و } K \text{ زیر فضا هستند} \Rightarrow x+y \in H \wedge x+y \in K \Rightarrow (x+y)$$

$$\in (H \cap K)$$

$$r \in \mathbb{R}, x \in (H \cap K) \Rightarrow x \in H \wedge x \in K$$

$$H \text{ و } K \text{ زیر فضا هستند} \Rightarrow rx \in H \wedge rx \in K \Rightarrow rx \in (H \cap K)$$

مثال نقض در حالت اجتماع دو زیر فضا: مشابه آنچه در مثال ۹

ثابت کردیم براحتی می توان نشان داد که $H = \{(x, y) | 2x - y = 0\}$ و

$K = \{(x, y) | x + 2y = 0\}$ هر دو زیر فضای $\mathbb{R}^2$ هستند. حال

$(H \cup K)$ را تشکیل می دهیم که خواهیم داشت:

$$H \cup K = \{(x, y) | (x, y) \in H \vee (x, y) \in K\}$$

$$= \{(x, y) | 2x - y = 0 \vee x + 2y = 0\}$$

حال کافی است دو عضو از $(H \cup K)$ طوری انتخاب کنیم که

حاصل جمع آن دو عضو، عضو $(H \cup K)$ نباشد (یعنی نسبت به عمل

جمع بسته نباشد) و با توجه به تعریف $(H \cup K)$ اگر زوج مرتبی یکی از

دو خاصیت $2x - y = 0$ یا $x + 2y = 0$ را داشته باشد عضو آن بوده و

در صورتی که هیچ کدام از این دو خاصیت را نداشته باشد، عضو

$(H \cup K)$ نیست.

$$(۱, ۲) \in (H \cup K) \quad (۲ \times ۱ - ۲ = ۰ : زیرا)$$