

فاصله نقطه از خط در فضا

● محمد هاشم رستمی

$$D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = t \Rightarrow M \begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} M_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow d = M_1 M$$

$$= \sqrt{(pt + x_0 - x_1)^2 + (qt + y_0 - y_1)^2 + (rt + z_0 - z_1)^2} \Rightarrow d' = \dots$$

مثال: فاصله نقطه $M_1(1, 2, 3)$ را از خط $D: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ به دست آورید.
حل:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} = t \Rightarrow M \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} M_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$d = M_1 M = \sqrt{(2t + 1 - 1)^2 + (2t - 1 - 2)^2 + (t + 2 - 3)^2}$$

$$\Rightarrow M_1 M = d = \sqrt{9t^2 - 14t + 10}$$

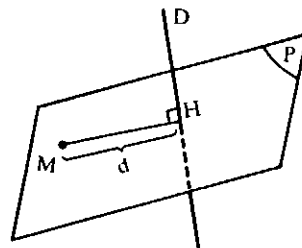
$$\Rightarrow (M_1 M)' = d' = \frac{18t - 14}{2\sqrt{9t^2 - 14t + 10}}$$

$$, d' = 0 \Rightarrow 18t - 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{9} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\sqrt{41}}{3}}$$

و پای عمود نقطه $H(\frac{23}{9}, \frac{5}{9}, \frac{25}{9})$ است.

راه دوم: معادله صفحه‌ای را که از نقطه M_1 بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم و با معادله خط D قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه H پای عمود مرسوم از M_1 بر خط D به دست آید. آنگاه طول پاره خط $M_1 H$ را محاسبه می‌کنیم.

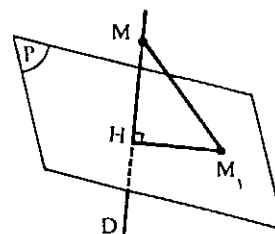
نقطه M و خط D را در نظر می‌گیریم. از نقطه M صفحه P را بر خط D عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطه H می‌نامیم. از M به H وصل می‌کنیم. پاره خط MH را فاصله نقطه M از خط D می‌نامند. به طور کلی می‌توان گفت:



فاصله یک نقطه از یک خط در فضا، طول پاره خطی است محصور بین آن نقطه و نقطه تقاطع آن خط با صفحه‌ای که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود.

محاسبه فاصله نقطه از خط - برای محاسبه فاصله نقطه $M_1(x_1, y_1, z_1)$ از خط $D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ به یکی از راه‌های زیر می‌توان عمل کرد:

راه اول: معادلات پارامتری خط D را به دست می‌آوریم. این معادلات مختصات یک نقطه مانند $M(x, y, z)$ از این خط می‌باشند. آنگاه طول پاره خط $M_1 M$ را محاسبه کرده، به کمک مشتق، کمترین مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y + 12 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4} \Rightarrow \vec{V} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \text{بردار هادی خط } D'$$

$$D: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{4} \Rightarrow \vec{V} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \text{بردار هادی خط } D$$

$$\vec{V} \parallel \vec{V}' \Rightarrow D \parallel D' \quad \text{یا} \quad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{-1}{-1} = \frac{4}{4} \Rightarrow D \parallel D'$$

برای محاسبه فاصله بین دو خط متوازی کافی است فاصله نقطه‌ای دلخواه از یک خط را، از خط دیگر به دست آوریم.

$$M_1 \in D(-3, 2, 6), A \in D'(0, -4, -18)$$

$$\Rightarrow \vec{M_1A} (3, -6, -24) \Rightarrow M_1H = \frac{|\vec{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

$$= \frac{3\sqrt{1065}}{\sqrt{26}} \quad \text{فاصله بین دو خط موازی } D \text{ و } D'$$

مثال ۴: مقدار m را به قسمی بیابید که فاصله نقطه $M_1(m, 2, -1)$ از خط $D: \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2}$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد.

حل:

$$M_1(m, 2, -1), A \in D(0, 0, -3)$$

$$\Rightarrow \vec{M_1A} (-m, -2, -2)$$

$$\vec{V}(2, -1, 2) \Rightarrow \vec{M_1A} \wedge \vec{V} (-6, 2m-4, m+4)$$

$$M_1H = \frac{|\vec{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{36 + (2m-4)^2 + (m+4)^2}}{\sqrt{4+1+4}} \Rightarrow$$

$$5m^2 - 8m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ و } m = -\frac{2}{5}$$

مثال ۵: فاصله نقطه $A(0, 0, 3)$ را از خط $D: \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ به دست آورید.

حل: با استفاده از روشهای گفته شده می‌توان فاصله نقطه A از خط D را محاسبه کرد. اما اگر $x - 2y + z - 1 = 0$ معادله صفحه P و $3x + y - z + 3 = 0$ معادله صفحه P' باشد، اولاً، نقطه A روی

حل: بردار هادی خط D .

$$D: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow \vec{V}(3, 2, 4)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} \quad A \in D, x = 2 \\ \Rightarrow y = 0, z = -1$$

$$\Rightarrow A(2, 0, -1), M_1(-1, 2, -3) \Rightarrow \vec{M_1A}(3, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{M_1A} \wedge \vec{V} (-12, -6, 12)$$

$$\Rightarrow |\vec{M_1A} \wedge \vec{V}| = \sqrt{144+36+144} = 18$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{|\vec{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

مثال ۲: فاصله نقطه $A(2, 3, -1)$ را از خط $D: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 4t+13 \end{cases}$ به دست آورید.

حل:

$$t = -1 \Rightarrow A_1 \in D \begin{vmatrix} x=0 \\ y=1 \\ z=9 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A_1A} \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{vmatrix}, \vec{V} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A_1A} \wedge \vec{V} \begin{vmatrix} 18 \\ -18 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow AH = \frac{|\vec{A_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{18^2+18^2}}{\sqrt{1+4+16}}$$

$$= \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 6$$

مثال ۳: ثابت کنید که دو خط $D: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{4}$ و

$D': \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ متوازی‌اند و فاصله بین این دو خط موازی را حساب کنید.

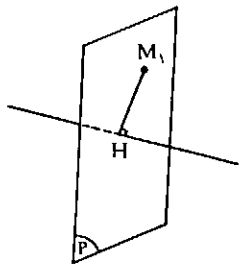
حل: معادله کانونیک خط D' را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 3z - 54 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{z+18}{4}$$

$$= (M_1 M)^{\prime} = \frac{9\sqrt{13}}{2\sqrt{49t^2 + 13}}$$

$$d' = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow d = \sqrt{13} \Rightarrow \boxed{M_1 H = \sqrt{13}}$$

راه دوم: معادله صفحه‌ای را که از نقطه M_1 بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم. داریم:



$$D: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} \Rightarrow \vec{V}(2, -6, 3)$$

$$M_1(-1, 1, 2) \Rightarrow 2(x+1) - 6(y-1) + 3(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow P: 2x - 6y + 3z + 2 = 0$$

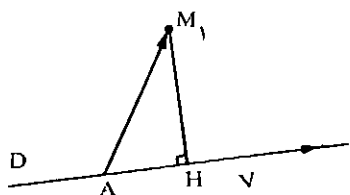
$$\begin{cases} 2x - 6y + 3z + 2 = 0 \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t+2) - 6(-6t+1) + 3(3t) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(2, 1, 0) \Rightarrow d = M_1 H$$

$$= \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2 + (0-2)^2}$$

$$\Rightarrow d = M_1 H = \sqrt{13}$$

راه سوم: نقطه دلخواه A به طول ۴ بر روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:



$$A \in D \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=3 \end{cases} \quad M_1 \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 2 \end{cases}, \quad \vec{V} \begin{cases} 2 \\ -6 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{AM}_1 \begin{cases} -5 \\ 6 \\ -1 \end{cases}$$

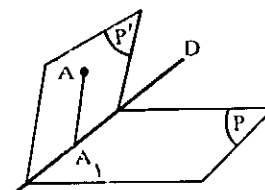
$$\vec{AM}_1 \cdot \vec{V} = -10 - 36 - 3 = -49, \quad |\vec{V}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|\vec{AM}_1 \cdot \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{49}{7} = 7, \quad AM_1 = \sqrt{25 + 36 + 1}$$

$$= \sqrt{62} \Rightarrow M_1 H = \sqrt{AM_1^2 - AH^2} = \sqrt{62 - 49} = \sqrt{13}$$

صفحه P' ، واقع است زیرا مختصاتش در معادله این صفحه صدق

می‌کند. $A(0, 0, 2) \xrightarrow{\text{در معادله } P'} 0 + 0 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$



ثانیاً، این دو صفحه بر هم عمودند زیرا:

$$P: x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 1$$

$$P': 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow a' = 2, b' = 1, c' = -1$$

$$\Rightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \Rightarrow 2 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow P \perp P'$$

بنابراین فاصله نقطه A از خط D ، همان فاصله نقطه A از صفحه P است، لذا داریم:

$$AA_1 = d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

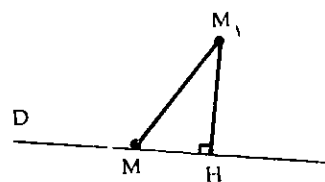
$$\Rightarrow AA_1 = d = \frac{|0 - 0 + 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مثال ۶: فاصله نقطه $M_1(-1, 1, +2)$ را از خط

$D: 2x - 6 = -y + 1 = 2z$ با روشهای مختلف محاسبه کنید.

حل:

راه اول: معادله پارامتری خط D را به دست می‌آوریم.



$$D: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} = t$$

$$\Rightarrow (x = 2t + 2, y = -6t + 1, z = 3t)$$

$$\Rightarrow M \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -6t + 1 \\ z = 3t \end{cases} \quad M_1 \begin{cases} -1 \\ 1 \\ +2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1 M = d = \sqrt{(2t+3)^2 + (-6t)^2 + (3t-2)^2}$$

$$\Rightarrow d = M_1 M = \sqrt{49t^2 + 13} \Rightarrow d'$$

کمک حاصل ضرب عددی دو بردار $\vec{AM}_1$ و $\vec{AB}$ قابل محاسبه است. زیرا می‌دانیم که حاصل ضرب درونی دو بردار برابر است با حاصل ضرب اندازه یک بردار در اندازه جبری تصویر بردار دیگر بر روی همان بردار.

$$\vec{AM}_1 \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\vec{AM}_1 \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} \Rightarrow$$

$$AH = \frac{|\vec{AM}_1 \cdot \vec{AB}|}{|\vec{AB}|}$$

بنابراین طول ضلع M_1H یعنی فاصله نقطه M_1 از خط D برابر است با:

$$M_1H = \sqrt{AM_1^2 - AH^2}$$

مثال: فاصله نقطه $M_1(2, -1, 1)$ از خط

$$D: 2x + 4 = 3y - 3 = -z + 3$$

حل: نقطه A به طول -2 و نقطه B به طول 1 را روی خط D اختیار می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A \in D \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad B \in D \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7}{3} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \begin{vmatrix} 0 + 2 = 2 \\ \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \\ -1 - 3 = -4 \end{vmatrix}, \quad M_1 \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}_1 \begin{vmatrix} 2 + 2 = 4 \\ -1 - 1 = -2 \\ 1 - 3 = -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{AM}_1 \cdot \vec{AB} = (4)(2) + (-2)(\frac{4}{3}) + (-2)(-4) = \frac{40}{3}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4 + \frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{14}{3}$$

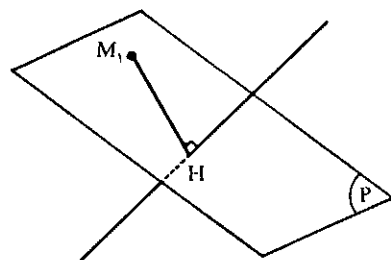
$$\Rightarrow AH = \frac{|\vec{AM}_1 \cdot \vec{AB}|}{|\vec{AB}|}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{20}{7}, \quad |\vec{AM}_1| = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow M_1H = \sqrt{AM_1^2 - AH^2} = \sqrt{24 - \frac{400}{49}} = \frac{2\sqrt{194}}{7}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{2\sqrt{194}}{7} \quad \text{فاصله نقطه } M_1 \text{ از خط } D$$

تبصره: به جای بردار $\vec{AB}$ می‌توان بردار هادی خط D را در نظر



مثال: فاصله نقطه $M_1(0, 2, 1)$ را از خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ محاسبه کنید.

حل: معادله صفحه‌ای که از نقطه M_1 بر خط D عمود می‌شود به صورت $2(x-0) + 1(y-2) + 3(z-1) = 0$ یا $2x + y + 3z - 5 = 0$ است. زیرا پارامترهای هادی خط D همان تصاویر بردار عمود بر صفحه P می‌باشند. یعنی:

$(a=2, b=1, c=3)$. حال نقطه تقاطع این صفحه با خط D را پیدا می‌کنیم.

$$P: \begin{cases} 2x + y + 3z - 5 = 0 \\ D: \begin{cases} \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3} = t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x = 2t, y = t + 1, z = t - 2)$$

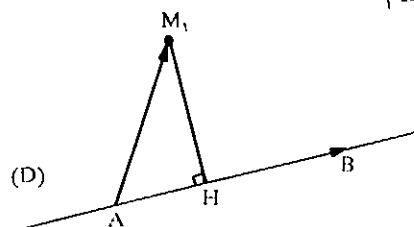
$$\Rightarrow 2(2t) + 1(t + 1) + 3(t - 2) - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{9}$$

$$H(\frac{10}{9}, \frac{14}{9}, \frac{1}{9}) \Rightarrow M_1H$$

$$= \sqrt{(\frac{10}{9} - 0)^2 + (\frac{14}{9} - 2)^2 + (\frac{1}{9} - 1)^2} \Rightarrow M_1H = \frac{2\sqrt{35}}{9}$$

فاصله نقطه M از خط D

راه سوم: دو نقطه اختیاری A و B را روی خط D در نظر می‌گیریم. از نقطه M_1 به نقطه A وصل می‌کنیم و از M_1 عمود M_1H را بر خط D فرود می‌آوریم.



در مثلث قائم‌الزاویه AM_1H طول وتر AM_1 با معلوم بودن

مختصات دو نقطه A و M_1 (یا تصاویر $\vec{AM}_1$) و طول ضلع AH به

در معادله D

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -1 \text{ و } z = 3 \Rightarrow A(1, -1, 3)$$

در معادله D

$$x = -1 \Rightarrow \frac{-1+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ و } z = 1 \Rightarrow B(-1, 0, 1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-1)^2 + (0+1)^2 + (1-3)^2} = 3 \Rightarrow \boxed{AB=3}$$

$$M_1 \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M_1 A \begin{vmatrix} 1+2=3 \\ -1-1=-2 \\ 3-3=0 \end{vmatrix}, M_1 B \begin{vmatrix} -1+2=1 \\ 0-1=-1 \\ 1-3=-2 \end{vmatrix}$$

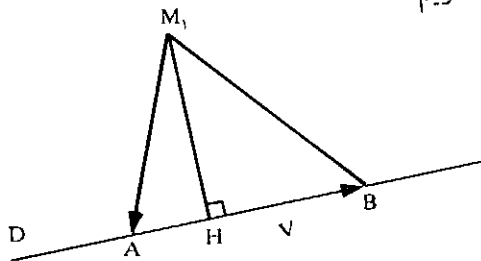
$$\Rightarrow \vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B} (4-0, 0+6, -3+2)$$

$$\Rightarrow \vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B} (4, 6, -1)$$

$$\Rightarrow |\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}| = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53}$$

$$\Rightarrow M_1 H = \frac{|\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}|}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$

راه پنجم: اگر $\vec{V}(p, q, r)$ بردار هادی خط D باشد و دو نقطه A و B را روی این خط چنان اختیار کنیم که $\vec{AB} = \vec{V}$ باشد، در این صورت داریم:



$$2S_{M_1 AB} = |\vec{M_1 A} \wedge \vec{AB}| = |\vec{M_1 A} \wedge \vec{V}|$$

$$= |\vec{AB}| \cdot M_1 H = |\vec{V}| \cdot M_1 H \Rightarrow \boxed{M_1 H = \frac{|\vec{M_1 A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|}}$$

مثال ۱: فاصله نقطه $M_1(-1, 2, -3)$ را از خط

$$D: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$$

به دست آورید.

گرفت. در این مسئله معادله کانونیک خط D به صورت

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-6}$$

است، پس بردار هادی خط $\vec{V}(3, 2, -6)$ است. بنابراین داریم:

$$A(-2, 1, 3), M_1(2, -1, 1) \Rightarrow \vec{AM_1}(4, -2, -2)$$

$$\vec{AM_1} \cdot \vec{V} = (4)(3) + (-2)(2) + (-2)(-6) = 20,$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{9+4+36} = 7 \Rightarrow AH = \frac{|\vec{AM_1} \cdot \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{20}{7},$$

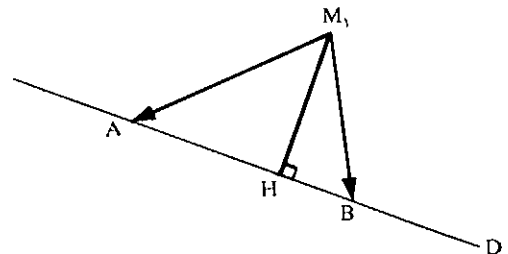
$$|\vec{AM_1}| = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$M_1 H = \sqrt{AM_1^2 - AH^2} = \sqrt{24 - \frac{400}{49}} = \frac{2\sqrt{194}}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 H = \frac{2\sqrt{194}}{7}}$$

راه چهارم: دو نقطه دلخواه A و B را روی خط (D) اختیار کرده، از M_1 به A و B وصل می‌کنیم. پاره خط $M_1 H$ ارتفاع نظیر ضلع AB از مثلث $M_1 AB$ است. لذا داریم:

$$2S_{M_1 AB} = M_1 H \cdot AB$$



از طرفی اندازه حاصل ضرب خارجی $\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}$ ، دو برابر

مساحت مثلث $M_1 AB$ است، $|\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}| = 2S_{M_1 AB}$ پس:

$$2S_{M_1 AB} = M_1 H \cdot AB = |\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}|$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 H = \frac{|\vec{M_1 A} \wedge \vec{M_1 B}|}{|\vec{AB}|}}$$

مثال: فاصله نقطه $M_1(-2, 1, 3)$ را از خط $D: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ محاسبه کنید.

حل: دو نقطه دلخواه A و B از خط D را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x_A = 1$ و $x_B = -1$ باشد، در این صورت داریم:

$$A \in D(x = -1, y = 10, z = \frac{-9}{7}) \quad M_1(-1, 1, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}_1(0, -9, \frac{13}{7}), \vec{V}(2, -6, 3) \Rightarrow$$

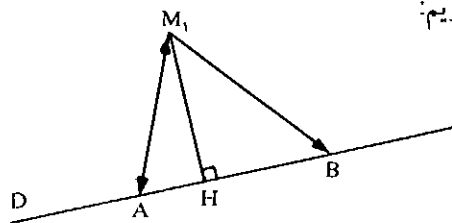
$$\vec{AM}_1 \wedge \vec{V}(12, 13, 18), |\vec{V}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{|\vec{AM}_1 \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{144 + 169 + 324}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{637}}{7} \Rightarrow \boxed{M_1H = \sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1H = \sqrt{13}}$$

راه چهارم: دو نقطه A به طول ۲ و B به طول ۰ را روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:



تمرین

۱- فاصله نقطه M از خط D را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید:

الف) $M(-2, 1, 0)$, $D: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$

ب) $M(-1, 0, 2)$, $D: 3x + 6 = 5 - 2z = y + 2$

پ) $M(-1, 0, 1)$, $D: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

ت) $M(2, -1, 0)$, $D: \begin{cases} 2x - 3 = 2y - 2 \\ z = 2 \end{cases}$

ث) $M(-2, 2, -1)$, $D: \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$

۲- مختصات تصویر قائم نقطه A(-2, 1, 3) روی خط

$$D: \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2 \end{cases} \text{ را تعیین کنید.}$$

۳- مختصات قرینه نقطه A(4, 1, 6) نسبت به خط

$$D: \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ را بیابید.}$$

۴- مقدار m را چنان بیابید که فاصله نقطه A(m-1, 3, 0) از خط

$$D: \begin{cases} x - 2 = 2y - 6 \\ z = 1 \end{cases} \text{ برابر } \sqrt{6} \text{ باشد.}$$

۵- فاصله نقطه M(2, 4, -3) از محورهای مختصات را تعیین کنید.

۶- فاصله نقطه M1(x1, y1, z1) از محورهای مختصات را بیابید.

۷- فاصله بین دو خط متوازی $D: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$

$$D': \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t + 1 \\ z = 4t - 3 \end{cases} \text{ را پیدا کنید.}$$

$$A \in D \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \quad B \in D \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(0-3)^2 + (7+2)^2 + (-3-\frac{3}{2})^2}$$

$$= \sqrt{9 + 81 + \frac{81}{4}} = \frac{21}{2}$$

$$M_1 \begin{vmatrix} -1 & \rightarrow \\ 1 & \rightarrow \\ 2 & \end{vmatrix} \Rightarrow M_1A \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}, M_1B \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1A \wedge M_1B \begin{vmatrix} 18 \\ 39 \\ 2 \\ 27 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{|\vec{M_1A} \wedge \vec{M_1B}|}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{324 + \frac{1521}{4} + 729}}{\frac{21}{2}}$$

$$= \frac{\frac{21\sqrt{13}}{2}}{\frac{21}{2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \boxed{M_1H = \sqrt{13}}$$

راه پنجم: نقطه دلخواه A به طول ۱- را روی خط D اختیار می‌کنیم.

بردار هادی این خط $\vec{V}(2, -6, 3)$ است. پس داریم:

