

عمل حاصل ضرب دکارتی

بین مجموعه‌ها

مورد استفاده دانش آموزان سال دوم ریاضی و سوم ریاضی نظام جدید

● حمیدرضا امیری

مثال ۱: هرگاه داشته باشیم $(x - y, 2x - 2) = (2y + 3, x + y)$ در این صورت مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف فوق و با توجه به تساوی بین دو زوج باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - y = 2y + 3 \\ 2x - 2 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{2}, \quad x = \frac{5}{2}$$

مثال ۲: در صورتی که داشته باشیم:

$$(\{1, x, z - 1\}, (y - 4, 7)) = (\{4, 1, z\}, (5, t^2))$$

مطلوب است محاسبه مقادیر x, y, z و t .

حل: طبق تعریف می‌بایست مؤلفه‌های اول این دو زوج که هر کدام یک مجموعه ۳ عضوی است با هم برابر باشند و چون همواره $1 - z \neq z$ پس باید $z = x$ و $z = 4$ یا $z - 1 = 5$ که نتیجه می‌دهد $x = z = 5$ و نیز باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند یعنی باید $(y - 4, 7) = (5, t^2)$ که بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} y - 4 = 5 \Rightarrow y = 9 \\ 7 = t^2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

مثال ۳: مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که دو زوج مرتب $(4x, y^2 + 6y + 30)$ و $(3x^2 + 1, 2y^2 - y)$ با هم برابر

در ریاضیات جدید سال اول با سه عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها آشنا شدید. در این مقاله عمل دیگری به نام حاصل ضرب دکارتی یا کارترین بین هر دو مجموعه دلخواه تعریف کرده و به بررسی خواص و نتایج آن می‌پردازیم - اءن شاء... - در مقاله‌های بعدی خواهید دید که براساس همین تعریف به تعریف رابطه و تابع خواهیم رسید.

ابتدا نیاز داریم زوج مرتب را تعریف کنیم، هر دو شیء مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند و اگر برای این زوج ترتیب نیز قائل شویم به آنها یک زوج مرتب گفته و به صورت (x, y) نمایش می‌دهیم. بلافاصله از تعریف چنین برمی‌آید که در حالت کلی ممکن است زوج مرتب (x, y) با (y, x) برابر نباشند (زیرا ترتیب قرار گرفتن آنها فرق دارد). لازم به تذکر است در هر مبحث اعضای آن مبحث، اشیای آن مبحث می‌باشند مثلاً در مبحث حساب هر عدد یک شیء ریاضی است، یا در مبحث مجموعه‌ها، هر مجموعه یک شیء محسوب می‌شود و نیز هر زوج مرتب می‌تواند یک شیء باشد. تذکر دیگر اینکه در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم.

تعریف تساوی بین دو زوج مرتب: دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی‌اند اگر و فقط اگر مؤلفه به مؤلفه با هم برابر باشند (مؤلفه‌های نظیر با هم برابر باشند). یا به عبارت دیگر:

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow x = z \ \& \ y = t$$

$$A^2 = A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

باشد.

حل: شرط تساوی این دو زوج مرتب آن است که:

$$\begin{cases} 3x^2 + 1 = 4x \\ 2y^2 - y = y^2 + 6y + 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y^2 - 7y - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(x-1)(x-\frac{1}{3}) = 0 \\ (y+3)(y-10) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ یا } x=\frac{1}{3} \\ y=-3 \text{ یا } y=10 \end{cases}$$

نکته ۲: اگر A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه k عضوی باشد در این صورت $(A \times B)$ دارای $m \times k$ عضو است، یا به بیان ریاضی،

$$(n(A) = m \wedge n(B) = k) \Rightarrow n(A \times B) = mk$$

نکته ۳: عمل حاصل ضرب را می‌توان به صورتهای زیر بین مجموعه‌های متفاوت تعریف کرده و تعمیم دهیم:

$$\text{الف) } A \times (B \times C) = \{(x, (y, z)) \mid x \in A \wedge (y, z) \in (B \times C)\}$$

$$\text{ب) } (A \times B) \times (C \times D) =$$

$$\{(x, y), (z, t) \mid (x, y) \in A \times B \wedge (z, t) \in C \times D\}$$

$$\text{ج) } A^2 \times A^2 = \{(x, y), (z, t) \mid (x, y) \in A^2 \wedge (z, t) \in A^2\}$$

نکته ۴: اگر زوج مرتب (x, y) متعلق به $(A \times B)$ باشد فقط می‌توان نتیجه گرفت که، $x \in A$ و $y \in B$ ، اما، در صورتی که (x, y) در $(A \times B)$ نباشد، در سه حالت ممکن است این اتفاق رخ دهد و برعکس، هر کدام از این سه حالت پیش آید بلافاصله نتیجه می‌گیریم که (x, y) در $(A \times B)$ نیست، یعنی:

$$(x, y) \notin (A \times B) \iff \begin{cases} x \notin A \wedge y \in B \\ x \in A \wedge y \notin B \\ x \notin A \wedge y \notin B \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر B مجموعه دلخواهی باشد و $A = \{2, 4\}$ در این صورت $(2, x) \notin A \times B$ (به ازای هر x) زیرا $2 \notin A$.
و اگر $(2, t) \notin A \times B$ چون $2 \in A$ پس باید $t \notin B$.

مسأله ۱: ثابت کنید برای هر مجموعه دلخواه مانند A ,

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

اثبات: فرض کنیم $A \times \emptyset \neq \emptyset$ (فرض خلف) بنابراین داریم:

$$\exists (x, y) \in (A \times \emptyset) \Rightarrow x \in A \wedge y \in \emptyset$$

و گزاره $y \in \emptyset$ همواره نادرست بوده و تالی گزاره شرطی فوق که از فرض خلف حاصل شده، ارزش نادرست داشته و کلی گزاره شرطی نادرست خواهد شد (مقدم را درست فرض کرده‌ایم)، یعنی نمی‌تواند (x, y) ای در $(A \times \emptyset)$ موجود باشد که با فرض تناقض

جوابهای فوق ۴ دسته جواب به صورت

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 10 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

برای ما حاصل می‌کنند، که در هر حالت تساوی بین دو زوج برقرار است.

حال برمی‌گردیم و به سراغ حاصل ضرب دکارتی می‌رویم، $A \times B$ را حاصل ضرب دکارتی A در B نامیده که A و B دو مجموعه دلخواه بوده و حاصل چنین عملی مجموعه‌ای است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

همانطور که از تعریف مشخص است $(A \times B)$ مجموعه‌ای است متشکل از زوجهای مرتب که مؤلفه اول همه آنها متعلق به مجموعه A و مؤلفه دوم آنها متعلق به مجموعه B است.

مثال ۴: اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ مطلوب است محاسبه

$$(A \times B) \text{ و } (B \times A)$$

$$A \times B = \{(a, 2), (a, 4), (a, 6), (b, 2), (b, 4), (b, 6), (c, 2), (c, 4), (c, 6)\}$$

$$B \times A = \{(2, a), (4, a), (6, a), (2, b), (4, b), (6, b), (2, c), (4, c), (6, c)\}$$

نکته ۱: می‌توان حاصل ضرب یک مجموعه را در خودش به صورت زیر نوشت:

$$A \times A = A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

در مثال ۴ داریم:

مسأله ۳: ثابت کنید هرگاه $A \neq \emptyset$ آنگاه:

$$(A \times B) \subset (A \times C) \iff B \subset C$$

اثبات:

ابتدا فرض می‌کنیم $B \subset C$ بنابراین:

$$\begin{aligned} B \subset C \\ [\text{اگر } (x, y) \in (A \times B) \implies x \in A \wedge y \in B \implies \\ x \in A \wedge y \in C \implies (x, y) \in (A \times C)] \implies \\ (A \times B) \subset (A \times C) \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $(A \times B) \subset (A \times C)$ ، ثابت می‌کنیم $B \subset C$.
برای نیل به این هدف عضو دلخواهی مانند y از B فرض کرده و ثابت می‌کنیم $y \in C$.

$$\begin{aligned} A \neq \emptyset \implies \exists x \in A \implies x \in A \wedge y \in B \implies \\ (A \times B) \subset (A \times C) \\ (x, y) \in (A \times B) \implies (x, y) \in (A \times C) \implies x \in A \wedge y \in C \\ \text{و چون } y \in B \text{ دلخواه بوده و ثابت شد } y \in C \text{ پس باید } B \subset C. \end{aligned}$$

مسأله ۴: ثابت کنید برای هر چهار مجموعه دلخواه مانند A و B و C و D داریم:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{تعریف } \cap \\ [(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \iff \\ (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (C \times D) \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{جابجایی و شرکت پذیری} \\ (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \iff \\ (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \iff \\ x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D) \iff \\ (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \implies \\ (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

نتیجه ۴: با توجه به اینکه:

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$$

و با توجه به این نکته که $n(A \times B) = n(B \times A)$ و مسأله قبل داریم:

$$\begin{aligned} n[(A \times B) \cup (B \times A)] &= n(A \times B) + n(B \times A) - \\ n[(A \times B) \cap (B \times A)] &= n(A \times B) + n(A \times B) - \end{aligned}$$

دارد، زیرا فرض کرده بودیم که $A \times \emptyset \neq \emptyset$ ، بنابراین همواره باید $A \times \emptyset = \emptyset$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\emptyset \times A = \emptyset$.

نتیجه ۱: تنها مجموعه‌ای که حاصل ضرب دکارتی در خودش برابر با خودش خواهد شد، مجموعه تهی است یعنی: $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

نتیجه ۲: همواره داریم:

$$(A \times B) = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

اثبات:

زیرا اگر $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ پس

$$\exists x \in A \wedge \exists y \in B \implies \exists (x, y) \in (A \times B)$$

و چنین مطلبی با فرض $A \times B = \emptyset$ تناقض دارد پس حکم ثابت است.

نتیجه ۳: همواره داریم:

$$n(A \times B) = 0 \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

مسأله ۲: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $A \times B = B \times A$ آن است که $A = B$ یا $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$.

$$A \times B = B \times A \iff A = B \vee \underbrace{A = \emptyset \vee B = \emptyset}_{n(A \times B) = 0}$$

اثبات:

شرط لازم: اگر $A = B$ واضح است که $A \times B = B \times A$ (به جای A ، B قرار می‌دهیم) اگر $A = \emptyset$ پس:

$$\left. \begin{aligned} A \times B &= \emptyset \times B = \emptyset \\ B \times A &= B \times \emptyset = \emptyset \end{aligned} \right\} \implies A \times B = B \times A$$

و به همین قیاس اگر $B = \emptyset$ ، حکم ثابت می‌شود.

شرط کافی: حال فرض کنیم $A \times B = B \times A$ ، اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ که حکم ثابت است (زیرا حکم گزاره‌ای با ترکیب فصلی است) پس فرض می‌کنیم $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ و ثابت می‌کنیم که $A = B$ باید.

چون A و B ناتهی هستند لذا می‌توان x دلخواهی از A و y دلخواهی از B گرفته و ثابت می‌کنیم x در B و y در A بوده و برعکس.

$$(A \times B) = (B \times A)$$

$$[x \in A \wedge y \in B \iff (x, y) \in (A \times B) \iff$$

$$(x, y) \in (B \times A) \iff x \in B \wedge y \in A] \implies A = B$$

شرکت پذیری و جابجایی

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (A \times C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \times B) \cap (A \times C)]$$

و چون روبرو همگی دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

ج) $(x, y) \in [A \times (B - C)] \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B - C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$$

جابجایی و شرکت پذیری

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$$

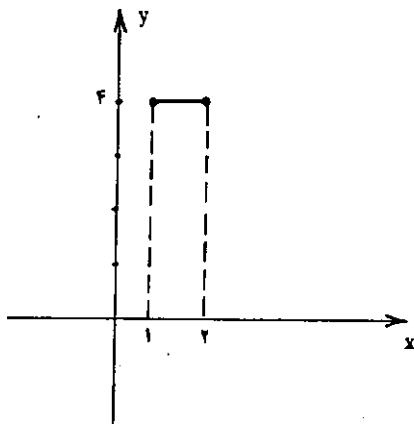
و چون روابط دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

مسئله ۷: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ و $B = \{4\}$ در این صورت $(A \times B)$ چه شکلی را در صفحه مختصات دکارتی تولید می‌کند؟

حل:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \\ &= \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge y = 4\} \\ &= \{(1, 4), \dots, (1/1, 4), (1/0.1, 4), \dots, (2, 4)\} \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموعه $(A \times B)$ شامل همه نقاطی از صفحه مختصات دکارتی است که طول آن نقاط هر عدد حقیقی بین ۱ و ۲ می‌تواند باشد ولی عرض همه نقاط ثابت و برابر ۴ می‌باشد پس شکل حاصل از وصل این بی‌نهایت نقطه به یکدیگر، پاره خطی است به طول ۱ و به عرض ۴، از مبدأ، مطابق شکل زیر:



$$\begin{aligned} n[(A \cap B) \times \underbrace{(B \cap A)}_{(A \cap B)}] &= \forall n(A \times B) - n(A \cap B)^2 \\ &= \forall n(A \times B) - n(A \cap B) \times n(A \cap B) \\ &= \forall n(A \times B) - [n(A \cap B)]^2 \end{aligned}$$

مثال ۵: اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $B = \{2, 6, 8, 9\}$ در این صورت:

$$\begin{aligned} n[(A \times B) \cup (B \times A)] &= \forall n(A \times B) - [n(A \cap B)]^2 \\ A \cap B &= \{2, 6\} \Rightarrow n(A \times B) \cup (B \times A) \\ &= (2 \times 16) - 2^2 = 28 \end{aligned}$$

مسئله ۵: هرگاه A و B هر دو زیرمجموعه‌های مجموعه مرجع M باشند ثابت کنید:

$$(A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$$

البت:

با توجه به نکته ۴ و به روش عضوگیری داریم:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B)' &\Leftrightarrow (x, y) \notin (A \times B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \notin B) \vee (x \notin A \wedge y \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A' \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B') \vee (x \in A' \wedge y \in B') \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A' \times B) \vee (x, y) \in (A \times B') \vee (x, y) \in (A' \times B') \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in [(A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')] \end{aligned}$$

و چون عضو دلخواهی را از سمت چپ به سمت راست رسانیدیم و برعکس، بنابراین تساوی برقرار است و اثبات تمام است.

مسئله ۶: ثابت کنید برای هر ۳ مجموعه دلخواه مانند A و B و C داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ \text{ب)} \quad A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ \text{ج)} \quad A \times (B - C) &= (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

البت:

قسمت (ب) و (ج) را اثبات کرده و (الف) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x, y) \in [A \times (B \cap C)] &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \end{aligned}$$

چون همواره $P \wedge P \equiv P$ پس $(x \in A \wedge x \in A) \equiv x \in A$ ، بنابراین

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$

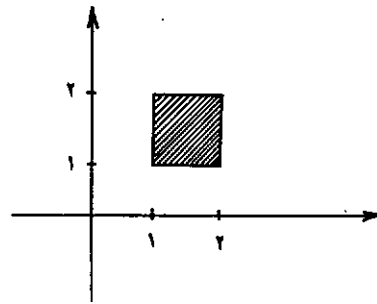
مسألة ۸: با توجه به مسألة ۷ نمودار $(A \times A)$ را مشخص کنید.

حل:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$\Rightarrow A \times A = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$$

در واقع $(A \times A)$ مجموعه نقاطی از صفحه است که طول و عرض این نقاط در داخل و روی مربعی به طول واحد و به شکل زیر، تغییر می‌کنند.



مسألة ۹: اگر $A \subset E$ و $B \subset E$ ثابت کنید:

$$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \times B)$$

اثبات:

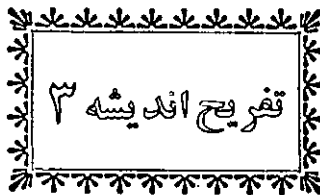
با توجه به مسألة ۴ داریم:

$$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \cap E) \times (E \cap B) = A \times B$$

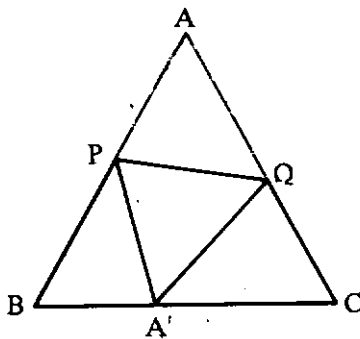
زیرا از $A \subset E$ نتیجه می‌گیریم $(A \cap E) = A$ و از $B \subset E$ نتیجه می‌شود $(E \cap B) = B$.

در شماره آینده مجله - اهن‌شاه... - راجع به رابطه‌ها و خواص رابطه‌ها نیز مطالبی خواهیم نوشت که امیدواریم مفید واقع شود.

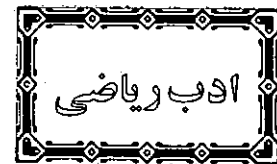
والسلام



مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری تا کرده‌ایم که رأس A ی آن، چنان که در شکل نشان داده شده است، بر $\overline{BC}$ قرار گرفته است. اگر $BA' = 1$ و $A'C = 2$ ، آنگاه طول خط $\overline{PQ}$ ، چه قدر است؟



جواب در صفحه ۸۸



این که مردمی بی‌شعور قابلیت آن را دارند که بخوبی دستگاه‌های پیچ در پیچ صنعتی و فنی را بفهمند و آنها را به کار بیندازند، امری است که همیشه مایه شگفتی من بوده است، و از آن بیشتر تعجب می‌کنم که چرا این گونه مردم نمی‌توانند مسائل بسیار ساده را درک کنند.

تاریخ علم - جورج سارتن، احمد آرام

