

عدم وجود حد

(برای دانش آموزان پیش دانشگاهی)

• مجتبی معارف‌وند -

دبیر ریاضی اسلام شهر

مقدمه

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲) دوره پیش‌دانشگاهی و اکثر کتابهای ریاضی عمومی، مبحث حد توابع با دقت خاصی مطرح می‌شود؛ اما در خصوص عدم وجود حد توابع، به اختصار اشاره‌ای شده و بدون ارائه راهکارهای مناسب برای اثبات و مثالهای کافی، از آن سهل و آسان می‌گذرند؛ در حالی که در اثبات بسیاری از مسائل مربوط به ناپیوستگیهای رفع نشدنی، کاربرد فراوان دارد.

در این مقاله، سعی بر آن شده است که این راهکارها معرفی و با ارائه مثالهای کافی، تا حدی حق مطلب ادا شود.

قرارداد: در این مقاله فرض بر آن است که $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوئیم:

تابع f در نقطه a حدی برابر L دارد؛ اگر و تنها اگر:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

۱. همان‌طور که در تعریف می‌بینیم، اولین و اساسی‌ترین شرط وجود حد تابع f در نقطه a این است که تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد؛ بنابراین اگر تابع f در هیچ همسایگی محذوف a تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین علامت چندجمله‌ای درجه ۲ زیر رادیکال می‌بینیم که برای هر $0 < \delta < 1$ ، دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ شامل همسایگی $(1 - \delta, 1 + \delta)$

نمی‌باشد و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ وجود ندارد.

x	-1	1	3
$x^2 - 2x + 3$	$+$	$-$	$+$

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{2 - [\frac{x}{2}]}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{2 - [\frac{x}{2}]}$

$$2 - [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 6$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | 4 \leq x < 6\}$$

در می‌یابیم که تابع f در هیچ همسایگی محذوف 5 تعریف نشده

است و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{2 - [\frac{x}{2}]}$ وجود ندارد. ■

۲. اگر حد چپ یا راست تابع f در نقطه a موجود نباشد، آن‌گاه f در نقطه a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

اثبات: از آن‌جا که تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برای مقادیر منفی تعریف نشده است، لذا حد چپ تابع $f(x) = \sqrt{x}$ (موجود نمی‌باشد،

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: برای هر $0 < \delta < 1$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ ناگزیریم از محدوده $(0, \delta)$ گذر کنیم که در این صورت، چون برای هر $x \in (0, \delta)$ عامل $[x]$ صفر می‌شود، تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{[x]}$ برای مقادیر

$x \in (0, \delta)$ تعریف نشده و در نتیجه، حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$

وجود ندارد؛ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$ وجود ندارد. ■

۳. اگر حد چپ و راست تابع f در نقطه a موجود باشند، ولی مقادیر آنها مساوی نباشند، آن‌گاه f در نقطه a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

اثبات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در همسایگی صفر تعریف شده و حد چپ و راست دارد؛ اما مقادیر آنها برابر نیستند. بنابراین f در نقطه صفر حد ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow a} [x]$ وجود ندارد. ($a \in \mathbb{Z}$)

اثبات: قرار می‌دهیم $0 < \delta < 1$ ، $I = (a - \delta, a + \delta)$ بنا بر قضیه زیر که به قضیه «تحدید» معروف است، داریم: [قضیه: هرگاه قلمرو تابع f شامل یک همسایگی محذوف a مانند I باشد و $g = f|_I$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ؛ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

این قضیه را برای حدهای یک طرفه نیز داریم؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = \lim_{x \rightarrow a^+} [x]|_{I_+} = \lim_{x \rightarrow a^+} a = a \quad I_+ = (a, a + \delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = \lim_{x \rightarrow a^-} [x]|_{I_-} = \lim_{x \rightarrow a^-} (a - 1) = a - 1 \quad I_- = (a - \delta, a)$$

حدهای چپ و راست تابع $f(x) = [x]$ وجود دارند؛ ولی با هم

برابر نیستند، بنابراین f در نقطه a حد ندارد. ■

۴. قضیه: اگر تابع f در نقطه a حد داشته باشد، آن‌گاه:

$$\exists M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M)$$

به عبارت دیگر، تابع f در یک همسایگی نقطه a کراندار است.

اثبات: f در نقطه a حد دارد؛ یعنی

$$\exists L \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = 1$ و بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1)$$

$$|f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L|$$

قرار می‌دهیم $M = 1 + |L|$ ، پس:

$$\exists M \exists \delta > 0 \quad \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M) \quad \blacksquare$$

بنابر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم:

$$\forall M \forall \delta > 0 \quad \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x)| \geq M)$$

نتیجه: اگر $\forall M \forall \delta > 0 \quad \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x)| \geq M)$ آن‌گاه تابع f در نقطه a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به دلخواه و مثبت داده شده‌اند،

قرار می‌دهیم: $x_* = \min\left\{\frac{\delta}{M}, \frac{1}{M}\right\}$ و در نتیجه داریم:

$$|x_*| \leq \frac{\delta}{M} < \delta$$

$$|x_*| \leq \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x_*}\right| \geq M$$

پس داریم:

$$\forall M > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_* (0 < |x_*| < \delta \wedge \left|\frac{1}{x_*}\right| \geq M)$$

و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به دلخواه و مثبت داده شده‌اند،

قرار می‌دهیم: $x_* = \min\left\{\frac{\delta}{M}, \frac{\ln M}{\ln 2}\right\}$ و در نتیجه داریم:

$$|x_*| \leq \frac{\delta}{M} < \delta$$

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n یافت می‌شود که $\frac{1}{n} < \delta$. قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{4}} < \frac{1}{n} < \delta$$

در نتیجه:

$$0 < |x| < \delta \wedge \left| \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \sin((4n+1)\frac{\pi}{4}) \right| = 1 \geq \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$\forall L \exists \varepsilon \forall \delta \exists x (0 < |x| < \delta \wedge \left| \sin \frac{1}{x} - L \right| \geq \varepsilon)$$

و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

۶. استفاده از برهان غیرمستقیم (برهان خلف): در این روش، فرض می‌کنیم حد تابع موجود است و با توجه به نوع تابع، ε را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که در پایان به تناقضی آشکار برسیم و نتیجه بگیریم که فرض اولیه (وجود حد) نادرست بوده و موجب تناقض شده است.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]} = L$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{4}$ و بنابر تعریف حد، عدد طبیعی M وجود دارد؛ به طوری که:

$$x \geq M \Rightarrow \left| (-1)^{[x]} - L \right| < \frac{1}{4}$$

اگر $x \geq M$ و $[x]$ زوج باشد، داریم:

$$\begin{aligned} |1 - L| < \frac{1}{4} &\Rightarrow -\frac{1}{4} < 1 - L < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < -L < -\frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \frac{3}{4} < L < \frac{5}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

اگر $x \geq M$ و $[x]$ فرد باشد، داریم:

$$\begin{aligned} |-1 - L| < \frac{1}{4} &\Rightarrow -\frac{1}{4} < -1 - L < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} < -L < \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{5}{4} < L < -\frac{3}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

آشکارا روابط ۱ و ۲ در تناقض اند پس نتیجه می‌گیریم که

$$|x| \leq \frac{\text{Ln } \gamma}{|\text{Ln } M|} \Rightarrow x \leq \frac{\text{Ln } \gamma}{|\text{Ln } M|} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{|\text{Ln } M|}{\text{Ln } \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \text{Ln } \gamma \geq |\text{Ln } M|$$

$$\Rightarrow \text{Ln } \gamma^{\frac{1}{x}} \geq |\text{Ln } M| \geq \text{Ln } M$$

$$\Rightarrow \gamma^{\frac{1}{x}} \geq M \Rightarrow |\gamma^{\frac{1}{x}}| \geq M$$

پس داریم: $(\forall M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, (0 < |x| < \delta \wedge |\gamma^{\frac{1}{x}}| \geq M))$

و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma^{\frac{1}{x}}$ وجود ندارد. ■

۵. استفاده از تعریف حد: فرض می‌کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوئیم f در نقطه a حد دارد؛ اگر و تنها اگر:

$$\exists L \forall \varepsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

با توجه به عکس نقیض ترکیب دو شرطی و نقیض ترکیب شرطی داریم:

f در نقطه a حد ندارد؛ اگر و تنها اگر:

$$\forall L \exists \varepsilon \forall \delta \exists x (0 < |x - a| < \delta, |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

مثال: ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم L به دلخواه داده شده باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $L \neq 0$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{|L|}{4}$. حال برای هر δ ، بنابر

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، [هرگاه $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x > 0$ ، آن‌گاه عدد طبیعی n یافت می‌شود؛ به طوری که $nx > y$]

برای $y = 1$ و $x = \delta$ عدد طبیعی n یافت می‌شود، به طوری

که $\frac{1}{n} < \delta$. با قرار دادن $x = \frac{1}{2n\pi}$ داریم: $\frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{n} < \delta$

پس $0 < |x| < \delta$ و:

$$\left| \sin \frac{1}{x} - L \right| = \left| \sin(2n\pi) - L \right| = |0 - L| = |L| \geq \frac{|L|}{4}$$

ب) $L = 0$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{4}$. حال برای هر δ ، بنابر

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا به a باشند و برای هر n ، $a_n \neq a$ و $b_n \neq a$ ، ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به ترتیب به L_1 و L_2 همگرا شده و $L_1 \neq L_2$ ، آن گاه f در نقطه a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] \cdot |x|$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{-1}{n}$ ، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو به صفر همگرا بوده و شرایط نتیجه را دارند. برای $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \cdot |x|$ داریم:

$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{1}{\frac{1}{n}} \right] \cdot \left| \frac{1}{n} \right| = \left[n \right] = \frac{n}{n} = 1$$

دنباله $\{f(a_n)\}$ به ۱ همگراست.

$$f(b_n) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \left[\frac{1}{\frac{-1}{n}} \right] \cdot \left| \frac{-1}{n} \right| = \left[\frac{-n}{1} \right] = \frac{-n}{n} = -1$$

دنباله $\{f(b_n)\}$ به -۱ همگراست.

از آن جا که $1 \neq -1$ پس $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] \cdot |x|$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $\alpha \in \mathbb{Q}$ ثابت کنید f در نقطه α حد ندارد.

اثبات: دنباله‌های $\left\{ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{n} \right\}$ و $\left\{ \alpha + \frac{1}{n} \right\}$ به ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ را در نظر می‌گیریم که هر دو به α همگرا هستند؛ ولی $f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = \alpha + \frac{1}{n} + 1$ و دنباله $\left\{ f\left(\alpha + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \right\}$ به $\alpha + 1$ همگراست و $f\left(\alpha + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \alpha + \frac{\sqrt{2}}{n}$ و دنباله $\left\{ f\left(\alpha + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \right\}$ به $-\alpha$ همگراست. چون $\alpha \neq \alpha + 1$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ وجود ندارد. ■

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]}$ وجود ندارد.

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$(a \in \mathbb{R}) \exists L \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{4}$ و بنابر تعریف حد، δ وجود دارد که:

$$\forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{4})$$

بنابر خاصیت اعداد حقیقی، x_1 گویا و x_2 گنگ متعلق به بازه $(a - \delta, a + \delta)$ وجود دارد؛ پس:

$$|f(x_1) - L| = |1 - L| < \frac{1}{4} \text{ و } |f(x_2) - L| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{4}$$

و در نتیجه داریم:

$$1 = |1 - L + L| \leq |1 - L| + |L| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$$

و این نابرابری، تناقضی آشکار می‌باشد، بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود ندارد. ■

۷. قضیه: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، دنباله حقیقی $\{a_n\}$ به a همگرا باشد و برای هر n ، $a_n \neq a$ ، آن گاه دنباله $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگراست.

اثبات: فرض ε دلخواه داده شده است. بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \quad (*)$$

حال برای همین δ یافت شده، بنابر همگرایی دنباله $\{a_n\}$ داریم:

$$\exists M \in \mathbb{N} (n \geq M \Rightarrow |a_n - a| < \delta) \quad (1)$$

بنابر رابطه $(*)$ داریم:

$$|a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) و بنابر قانون قیاس داریم:

$$\forall \varepsilon \exists M \in \mathbb{N} (n \geq M \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon)$$

و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$. ■

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$ و δ به دلخواه داده شده است.

بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی n یافت می‌شود که:

$$\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{\gamma}} < \frac{1}{2n\pi} < \delta$$

$$\text{قرار می‌دهیم } x_1 = \frac{1}{2n\pi} \text{ و } x_2 = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{\gamma}}$$

$$0 < |x_1| < \delta \wedge 0 < |x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| =$$

$$|1 - 0| = 1 > \frac{1}{\gamma}$$

پس بنابر نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۳): ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای

حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم $a \in \mathbb{R}$ عددی دلخواه باشد. قرار

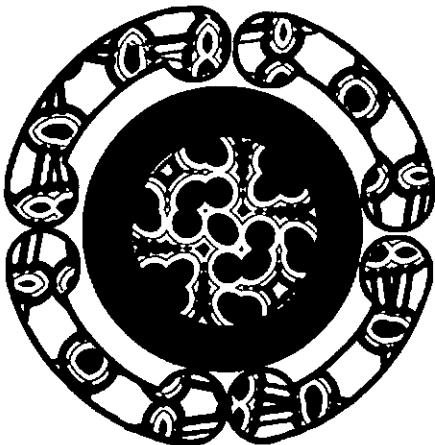
می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$ و δ به دلخواه داده شده است. بنابر خواص اعداد

حقیقی، عدد گویای x_1 و عدد گنگ x_2 یافت می‌شوند؛ به قسمی که:

$$0 < |x_1 - a| < \delta \wedge 0 < |x_2 - a| < \delta \wedge$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{\gamma}$$

پس بنابر نتیجه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود ندارد. ■



۸. قضیه: اگر f در نقطه a حد داشته باشد، آن‌گاه:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x_1, x_2 (0 < |x_1 - a| < \delta \wedge 0 < |x_2 - a| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

اثبات: چون f در نقطه a حد دارد، پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

فرض ε به دلخواه داده شده است. بنا بر تعریف حد داریم:

$$\exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{\gamma})$$

$$\exists \delta \forall x_1, x_2 (0 < |x_1 - a| < \delta \wedge 0 < |x_2 - a| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| \leq$$

$$|f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon)$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x_1, x_2 (0 < |x_1 - a| < \delta, 0 < |x_2 - a| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \quad \blacksquare$$

حال بنا بر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم:
نتیجه: اگر

$$\exists \varepsilon \forall \delta \exists x_1, x_2 (0 < |x_1 - a| < \delta, 0 < |x_2 - a| < \delta \wedge$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$$

آن‌گاه f در نقطه a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon = 1$ و فرض می‌کنیم δ به دلخواه داده

شده است. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی n یافت

می‌شود که $\delta < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n+1}$. حال قرار می‌دهیم:

$$x_1 = \frac{1}{2n}, x_2 = \frac{1}{2n+1}$$

$$0 < |x_1| < \delta, 0 < |x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| =$$

$$|(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}| = |1 - (-1)| = 2 > 1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ وجود ندارد.