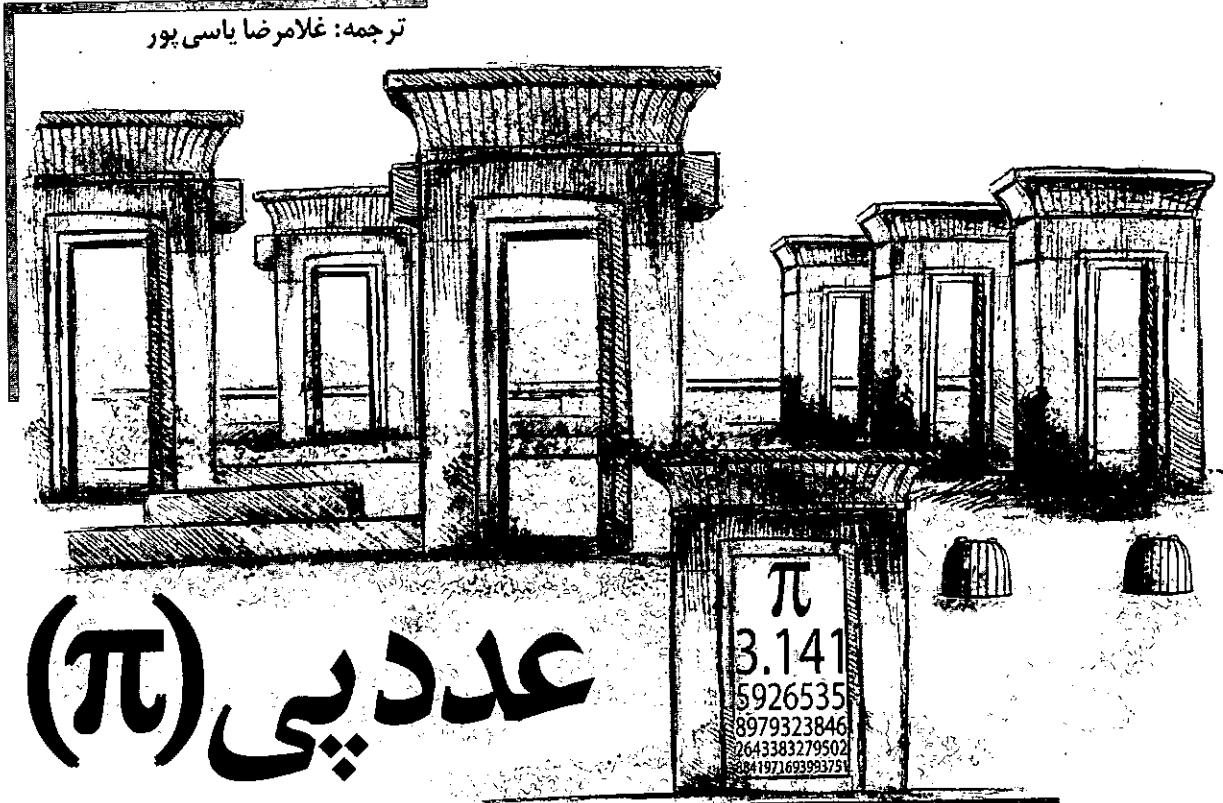


© تونی کرلی

ترجمه: غلامرضا یاسی پور



عدد پی (π)

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طول در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

π معروف ترین عدد در ریاضیات است. جمیع ثابت‌های دیگر طبیعت را فراموش کنید، چه π همواره در رأس فهرستمان قرار می‌گیرد. اگر برای اعداد نیز جایزه‌ی اسکار وجود داشت، π هر ساله جایزه را می‌برد.

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طول در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

زیستگاه طبیعی π دایره است، اما این عدد در هر گوشه‌ی ریاضیات و در مکان‌هایی که به هیچ وجه با دایره مرتبط نیستند نیز خود را نشان می‌دهد.

به ازای دایره‌ای به قطر d و شعاع r:

$$\text{پیرامون} = \pi d = 2\pi r$$

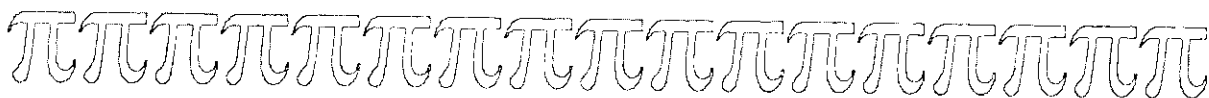
$$\text{سطح} = \pi r^2$$

به ازای کره‌ای به قطر d و شعاع r:

$$\text{سطح رویه} = \pi d^2 = 4\pi r^2$$

$$\text{حجم} = 4/3 \pi r^3$$

ارشمیدس سیراکیوزی^۱ نسبت پیرامون دایره به قطر آن، موضوعی مورد توجه فرهنگ باستان بود. در حدود سال ۲۰۰۰ قبل از میلاد، بابلی‌ها متوجه شدند که پیرامون دایره، به تقریب، سه برابر طول قطر آن است. سپس در سال ۲۲۵ قبل از میلاد، این ارشمیدس سیراکیوزی بود که به طور جدی بررسی نظریه‌ی ریاضی π را آغاز کرد و از این رو در عداد بزرگان قرار گرفت. ریاضی دانان دوست دارند به این همکار خود درجه بدهند و او را هم سطح، و البته پیش گام کارل فردریش گاوس^۲ (شاهزاده‌ی ریاضی دانان) و سر اسحق نیوتن^۳ قرار دهند. درستی این قضاوت هرچه باشد، واضح است که ارشمیدس از شهرت و اعتبار بالایی برخوردار است. او غیر از سهمش در نجوم، ریاضی و فیزیک، سلاح‌های جنگی از قبیل منجنیق، اهرم و «آینه‌های سوزان»ی طراحی کرد که تمام آن‌ها برای دور نگه داشتن رومیان و متوقف کردن آنان به کار می‌رفت. اما با تمام این احوال، وی چون پروفیسورهای پریشان حواس عمل می‌کرد، و گرنه چرا هنگام کشف قانون تقلیل وزن اجسام در مایعات، برهنه از حمام بیرون جست و فریاد «یافتم، یافتم»^۴ سر داد؟!



نسبت دایره ای متداول ساخت.

مقدار دقیق π

هرگز نمی توانیم مقدار دقیق π را بدانیم، چرا که این عدد، عددی گنگ است؛ موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت^{۱۰} اثبات کرد، این بود که: بسط دهدهی عدد π ، بدون نمونه ای قابل پیش بینی، نامتناهی است. ۲۰ رقم دهدهی اولیه عبارت اند از:

$$3.14159265358979323846...$$

مقدار $\sqrt{10}$ که ریاضی دانان چینی در نظر می گرفتند، برابر است با:

$$3.16227766016837933199$$

این مقدار که در حدود سال ۵۰۰ میلادی، توسط براهما گپتا^{۱۱} پذیرفته شد، در واقع اندکی بهتر از مقدار تقریبی تر ۳ است؛ گرچه در رقم دوم دهدهی، با π اختلاف دارد. π را می توان با استفاده از یک سری^{۱۲} از اعداد محاسبه کرد. یکی از معروف ترین این سری ها عبارت است از:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

گرچه این سری در هم گرایی به π ، به گونه ای پردردسر آهسته، و برای محاسبه نوسیدگنده است. در این مورد، اوایلر سری جالب توجه زیر را به دست آورد:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

رامانوجان^{۱۳}، نابغه ی خود آموخته ی هندی، چندین فرمول تقریبی جالب برای π به دست داد که یکی از آن ها شامل تنها جذر ۲، عبارت است از:

$$\frac{9801}{4412} \sqrt{2} = 3.141592730013305660313996189000...$$

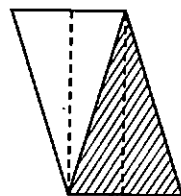
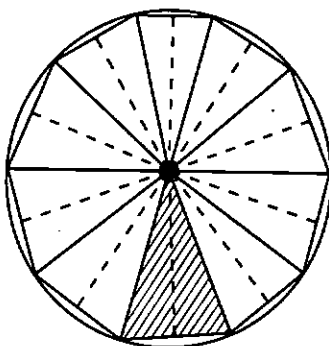
ریاضی دانان شیفته و مجذوب π هستند. در ایامی که لامبرت ثابت کرده بود این عدد نمی تواند کسری باشد، به سال ۱۸۸۲، لیندمان^{۱۴}، ریاضی دان آلمانی، برجسته ترین مسئله ی مرتبط با π را حل کرد. یعنی نشان داد که π «متعالی»^{۱۵} است به این معنی که نمی تواند جواب یک معادله ی جبری باشد (یعنی معادله ای که تنها شامل توان های x است). لیندمان، با حل این معمای روزگاران، به مسئله ی «تربیع دایره»^{۱۶} نیز خاتمه داد. مسئله به این ترتیب بود که با مفروض بودن یک دایره و تنها با به کار بردن پرگار و خط کش نامدرج، مربعی رسم کنیم که مساحتش برابر مساحت آن دایره باشد. لیندمان به طور قطعی اثبات کرد که این کار غیر ممکن است. امروزه عبارت تربیع دایره، هم ارز غیر ممکن به کار می رود. محاسبه ی دقیق تر مقدار π به سرعت ادامه یافت. در سال

افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی دان ولزی^۶ کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز^۷ برمی گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن^۸ بود

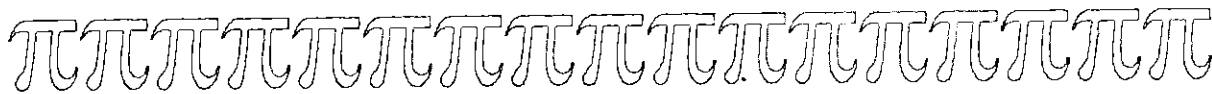
این که چگونه کار خود را در مورد π جشن گرفت، هنوز مشخص نشده است!

باری، با در دست داشتن این تعریف که π نسبت پیرامون دایره به قطرش است، رابطه ی آن با سطح^۵ دایره چه می شود؟ چنین استنتاج کرده اند که سطح دایره ای، به شعاع r ، برابر πr^2 است؛ گرچه احتمالاً این رابطه معروف تر از تعریف نسبت پیرامون به قطر (π) است. این واقعیت که π وظایفی دوگانه در مورد سطح و پیرامون دایره دارد، قابل توجه است.

اما این مطلب را چگونه می توان نشان داد؟ دایره را می توان به تعدادی مثلث برابر و باریک تجزیه کرد که طول قاعده شان b و طول ارتفاعشان نزدیک به r باشد. این مثلث ها در داخل دایره یک چندضلعی تشکیل می دهند که به سطح دایره نزدیک می شود. برای آغاز کار، ۱۰۰۰ مثلث را در نظر می گیریم. کل جریان، تمرین در تقریب ها است. در این صورت می توانیم، هر زوج مجاور از این مثلث ها را به هم وصل کنیم و مستطیلی بسازیم (تقریباً) با مساحت $b \times r$. بنابراین سطح یا مساحت کل چندضلعی، برابر $500 \times b \times r$ خواهد شد. مقدار $500 \times b$ ، از آن جا که در حدود نصف پیرامون دایره است، دارای طول πr می شود و سطح چندضلعی مورد بحث $\pi r \times r = \pi r^2$ خواهد شد. هرچه تعداد مثلث هایمان بیشتر باشد، شکل تقریبی مان به دایره نزدیک تر می شود و در حد نتیجه می گیریم که سطح دایره برابر πr^2 است.



ارشمیدس مقدار π را بین دو کسر $223/71$ و $220/70$ برآورد کرد. بنابراین تقریب آشنای $22/7$ برای π را به ارشمیدس مدیونیم. افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی دان ولزی^۶ کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز^۷ برمی گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن^۸ بود. اما این لئونارد اوایلر^۹ ریاضی دان و فیزیک دان بود که π را در زمینه ی



موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت^{۱۰} اثبات کرد، این بود که: بسط بخش ددهی عدد π ، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است

زیر احتمالاً در مورد هر کاربرد عملی، به بیش از ده رقم ددهی نیاز نیست و تقریب ارشمیدس، یعنی $22/7$ برای اغلبشان کفایت می‌کند. باید توجه داشته باشیم محاسبات مفصل مزبور تنها برای تفریح نیست. این محاسبات علاوه بر به کار گرفتن شیفتگی گروهی از ریاضی دانان که خود را «دوست داران پی» می‌خوانند، برای امتحان حد و مرز توانایی رایانه‌ها نیز به کار می‌روند.

شاید عجیب‌ترین قسمت داستان π تلاشی باشد که در مجلس مقننه‌ی ایالت ایندیانا^{۱۱} آمریکا برای گذراندن لایحه‌ای برای تثبیت مقدار آن به وقوع پیوست. این عمل در پایان قرن نوزدهم، زمانی به وقوع پیوست که دکتر گودوین^{۱۲} طیب، لایحه‌ای تقدیم مجلس کرد که π را «قابل هضم» کند. اما نتیجه‌ی عملی حاصل در این مرحله از قانون‌گذاری، عجز طراح آن برای تثبیت کردن مقداری بود که می‌خواست. خوش‌بختانه از لحاظ ایندیانا، پیش از آن که لایحه‌ی مورد بحث به تمامی تصویب شود، حماقت قانونی کردن π آشکار شد. و از آن زمان به بعد، سیاست مداران π را راحت گذاشتند.

چند تاریخچه

۳۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها اولین جدولی را برای تقریب π به دست دادند.

۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس تقریب نزدیک‌تر به π را به دست داد.

۱۷۰۶ میلادی: لایحه‌ای برای تثبیت مقدار π در ایالت ایندیانا رد شد.

۱۷۶۱ میلادی: لامبرت اثبات کرد که π عددی گنگ است.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمن اثبات کرد که π عددی انتقالی است.

پی‌نوشت:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. Archimedes of Syracuse | 11. Brahmagupta |
| 2. Carl Friedrich Gauss | 12. series |
| 3. Sir Isaac Newton | 13. Srinivasa Ramanujan |
| 4. Eureka | 14. Ferdinand von Lindemann |
| 5. area | 15. transcendental |
| 6. Welsh | 16. squaring the circle |
| 7. William Jones | 17. William Shanks |
| 8. Royal Society of London | 18. Eniac |
| 9. Leonhard Euler | 19. random |
| 10. Johann Lambert | 20. L. E. J. Brouwer |

۱۸۵۳ م، ویلیام شنکس^{۱۷} مدعی محاسبه‌ی مقدار صحیح آن تا 607 رقم ددهی شد (عملاً تنها تا 527 رقم ددهی). در دوران جدید، تحقیق در محاسبه‌ی مقدار π با رقم‌های بیشتر بعد از ممیز، به کمک رایانه، شدت و حدت بیشتری یافته است. در سال ۱۹۴۹، π تا 2037 رقم ددهی محاسبه شد و این کار با رایانه‌ی انیاک^{۱۸} ۷۰ ساعت طول کشید. تا سال ۲۰۰۲، محاسبه‌ی π تا مقدار گیج‌کننده‌ی $1/241/100/000/000$ رقم ددهی رسید، اما این رشته هم چنان سر دراز دارد. در این مورد، اگر در خط استوا بایستیم و شروع به نوشتن بسط π کنیم، طول محاسبه‌ی شنکس به ۱۴ متر می‌رسد، در حالی که بسط سال ۲۰۰۲ به حدود ۶۲ بار گردش دور زمین می‌انجامد.

در مورد π پرسش‌های گوناگونی مطرح و به آن‌ها پاسخ داده شده است. آیا رقم‌های π تصادفی^{۱۹} هستند؟ آیا یافتن دنباله‌ای قابل پیش‌بینی در بسط آن ممکن است؟ برای نمونه، آیا می‌توان دنباله‌ی 0.123456789 را در این بسط یافت؟ در دهه‌ی ۱۹۵۰ پاسخ این پرسش نادانستی به نظر می‌رسید. هیچ‌کس چنین دنباله‌ای در 2000 رقم دانسته‌ی π نیافته بود. بروور^{۲۰}، ریاضی‌دان پیشرو هلندی می‌گفت، این پرسش فاقد معنی است. زیرا بر این اعتقاد بود که تجربه‌پذیر نیست. در واقع، ایسن ارقام در سال ۱۹۹۷ در آغاز مکان 17387594880 ، یا با به کار بردن استعاره‌ی خط استوا، در حدود 3000 مایل پیش از آن که دور اول کامل شود، به دست آمدند. در بسط π ، پیش از آن که 600 مایل کامل شود، ده شش می‌یابیم، اما برای یافتن ده هفت در یک ردیف، باید تا تکمیل یک دور و طی 3600 مایل دیگر صبر کنیم.

π در اشعار

در صورتی که بخواهیم مقادیر اولیه‌ی بسط π را به خاطر بسپاریم، شاید چند بیت شعر کارساز باشد. در این جا یکی از این ابیات را می‌آوریم: گر ز قدر عدد پی بکنند از تو سؤال پاسخی ده که خردمند تو را آموزد خرد و دانش و آگاهی دانشمندان ره بر منزل توفیق به ما آموزد تعداد حروف هر یک از کلمات بیت دوم، یکی از ارقام اولیه را مشخص می‌کند.

«از: سرگرمی‌های هندسه، پرویز شهریاری»

اهمیت π
فایده‌ی دانستن مقدار π با این همه رقم ددهی چیست در حالی که اغلب محاسبات، تنها به چند رقم ددهی نیاز دارند.