

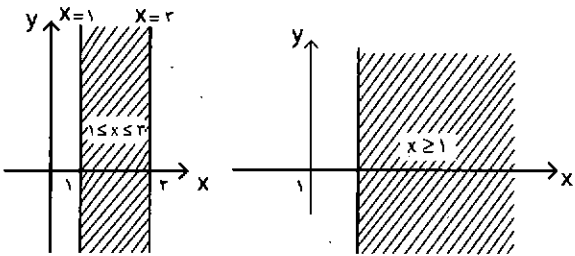
اشاره:

در این مقاله می‌کوشیم، با استفاده از دانسته‌ها و توانایی‌های شما درباره‌ی حل معادله‌ها و نامعادله‌های یک یا دو متغیره، نوعی سرگرمی آموزشی ارائه کنیم که با انجام آن، مهارتتان در رسم نمودار این گونه رابطه‌ها تقویت شود. در کلاس‌های درس، معمولاً معادله‌ها یا نامعادله‌ها را می‌دهند و از شما می‌خواهند نمودار آن‌ها را رسم کنید. ما در این جا علاوه بر این کار، قصد داریم به صورت عکس هم عمل کنیم؛ یعنی نمودار را به شما می‌دهیم و می‌خواهیم که معادله یا نامعادله‌ی مربوط به آن را بنویسید.

به این منظور، با استفاده از رابطه‌های (معادله‌ها و نامعادله‌ها) ریاضی حرف‌های یک کلمه را طراحی می‌کنیم. برای نمونه، شما می‌توانید نام خود را روی یک کاغذ شطرنجی به شکل دل‌خواه طراحی کنید؛ سپس برای هر قطعه از حروف کلمه‌ی نام خود، رابطه‌های ریاضی را بنویسید. وقتی تمام رابطه‌های ریاضی را برای حرف‌های نامتان نوشتید، آن‌گاه دستگاهی از معادله‌ها و نامعادله‌ها را خواهید داشت که با رسم آن‌ها، طراحی نامتان را خواهید دید.

طراحی با رابطه‌های ریاضی

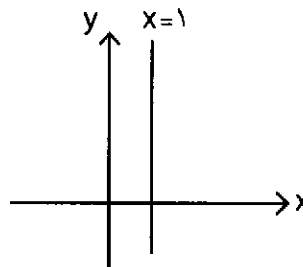
در زیر، مجموعه جواب نامعادله‌های $x \geq 1$ و $1 \leq x \leq 3$ را رسم کرده‌ایم:



نمودار ۱

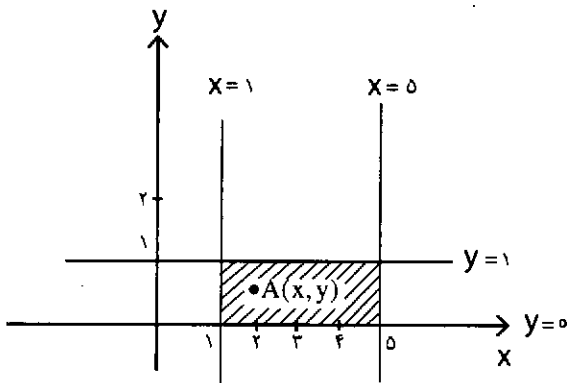
نمودار ۲

تا کنون در دوره‌ی متوسطه با رسم معادله‌ها و نامعادله‌های جبری آشنا شده‌اید. برای نمونه می‌دانید که نمودار معادله‌ی $x = 1$ ، خطی موازی محور y ‌هاست (نمودار ۱).



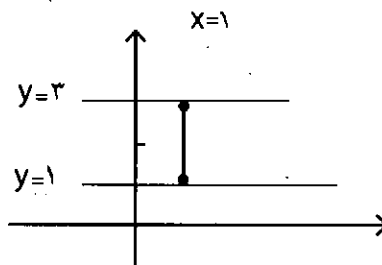
نمودار ۱

با اطلاعات به دست آمده، نامعادله‌هایی را بنویسید که مجموعه جواب آن‌ها سطح مستطیل شکل زیر باشد.

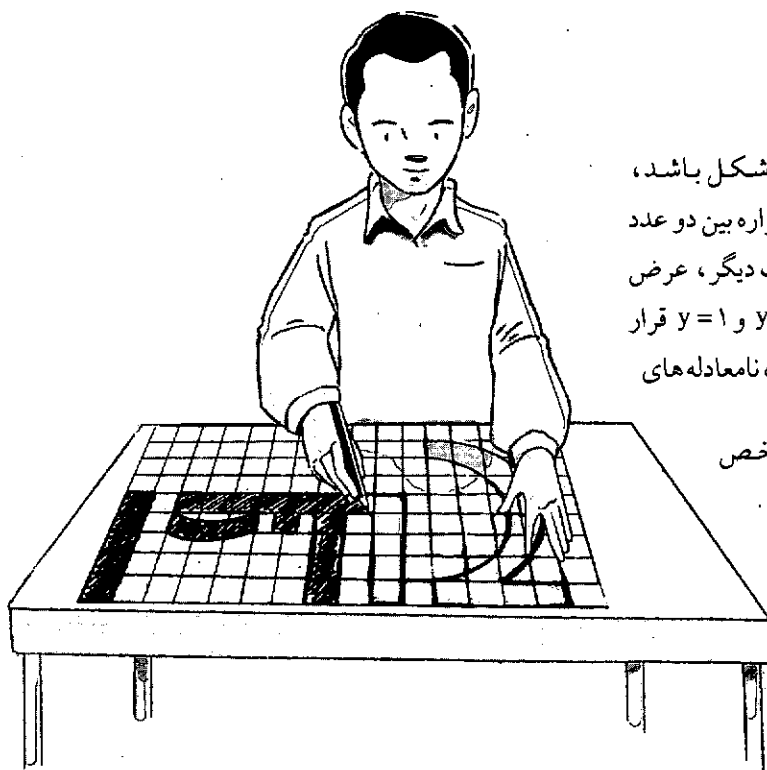


نمودار ۵

چنان‌که نمودار معادله‌ی $x = 1$ را با شرط $1 \leq y \leq 3$ رسم کنیم، یک پاره‌خط موازی محور y ‌ها به دست می‌آید (نمودار ۲).



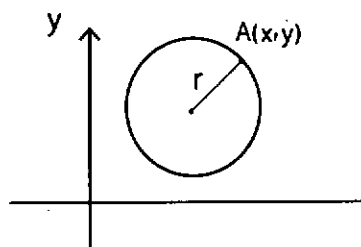
نمودار ۲



اگر $A(x, y)$ نقطه‌ای از سطح مستطیل شکل باشد، ملاحظه می‌کنید که طول این نقطه، یعنی x همواره بین دو عدد ۱ و ۵ قرار دارد؛ بنابراین: $1 \leq x \leq 5$. از طرف دیگر، عرض این نقطه یعنی y بین دو خط به معادله‌های $y=0$ و $y=1$ قرار دارد؛ پس: $0 \leq y \leq 1$. در نتیجه، نمودار دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$
 این سطح مستطیل شکل را مشخص می‌کند.

معادله‌ی $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ مجموعه نقاط روی یک دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کند. زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی S مرکز دایره تا نقطه‌ی $A(x, y)$ دلخواه روی دایره، همواره برابر با r است (نمودار ۶).



با توجه به نمودار، ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره، قسمتی از دایره‌ی به مرکز $S(3, 3)$ و شعاع $r=2$ است. بنابراین، معادله‌ی این دایره به صورت زیر است:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

اما این ربع دایره بین دو خط به معادله‌های $y=3$ و $y=5$ قرار دارد. بنابراین دستگاه زیر می‌تواند بیان‌کننده‌ی این نمودار باشد.

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

از طرف دیگر ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره بین دو خط $x=3$ و $x=5$ نیز قرار دارد. بنابراین نمودار دستگاه زیر مشخص‌کننده‌ی این ربع دایره است:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی رسم نامعادله‌ها می‌توانید به مجله‌ی ریاضی رشد بهران متوسطه، شماره‌ی ۶۱، بهار ۱۳۸۸ مراجعه کنید.)

طرح ۱. نمودار رابطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

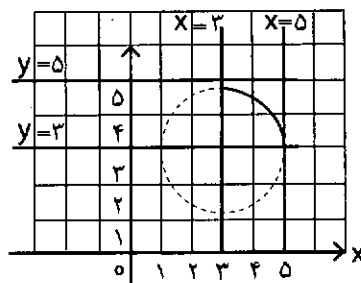
$$\begin{cases} y=1; 1 \leq x \leq 7 & (1) \\ x=2; 1 \leq y \leq 2 & (2) \\ y=x-3; 4/5 \leq x \leq 5 & (3) \\ 2y+x=9; 5 \leq x \leq 7 & (4) \end{cases}$$

نامعادله‌های زیر به ترتیب مجموعه نقاط درون و برون دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کنند.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$$

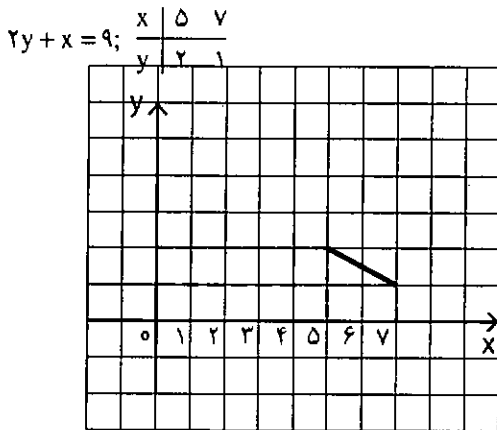
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$$

با توجه به مطالب گفته شده، سعی کنید رابطه‌ای بنویسید که مجموعه جواب آن، نقاط روی ربع دایره به صورت زیر باشد.



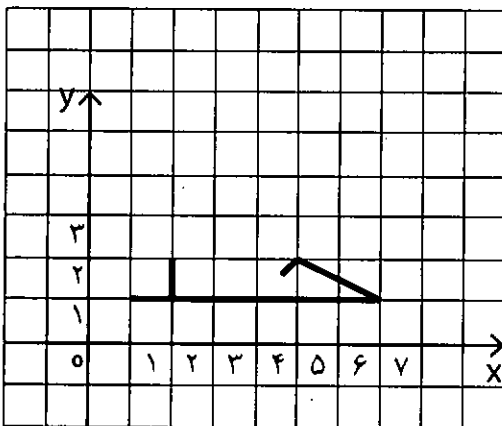
نمودار ۷

رابطه‌ی «۴» قسمتی از خط به معادله‌ی $2y + x = 9$ است که مختص x آن‌ها بین ۵ و ۷ است (نمودار ۱۱).



نمودار ۱۱

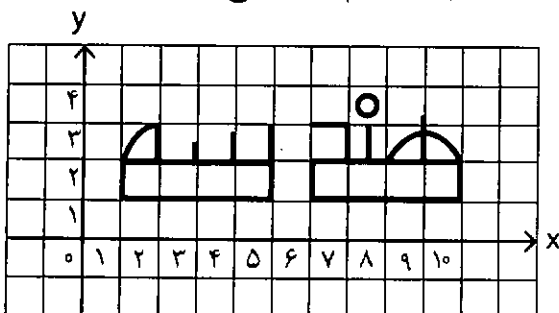
اکنون نمودارهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نمودار ۱۲

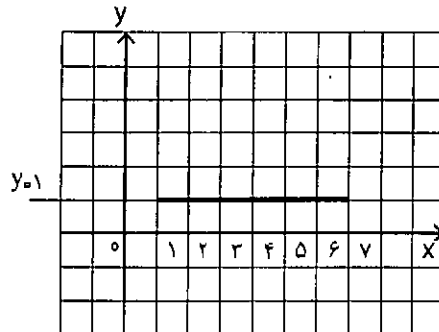
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم نمودار رابطه‌ها، کلمه‌ی «حد» را طراحی کرده‌ایم (مفهوم حد در کتاب‌های ریاضی سال سوم متوسطه آمده است).

طرح ۲. روی کاغذ شطرنجی، کلمه‌ی هندسه را به این صورت طراحی کرده‌ایم (نمودار ۱۳). رابطه‌هایی جبری بنویسید که پس از رسم آن‌ها، طرح زیر به دست آید.



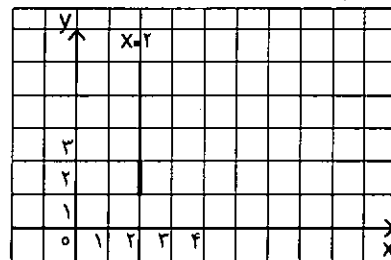
نمودار ۱۳

رابطه‌ی «۱» پاره‌خطی موازی محور x ‌ها است. برای رسم نمودار آن، ابتدا خط به معادله‌ی $y = 1$ را رسم می‌کنیم. سپس قطعه‌ای از آن را که مختص x بین ۱ و ۷ است، جدا می‌کنیم. (نمودار ۸).



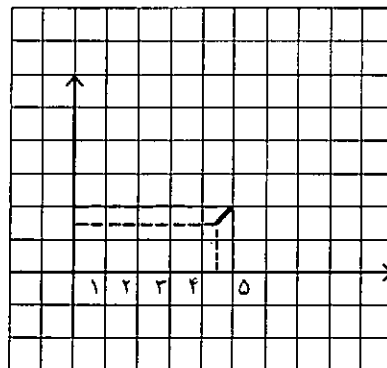
نمودار ۸

رابطه‌ی «۲» پاره‌خطی موازی محور y ‌ها است که طول آن برابر یک واحد است (نمودار ۹).



نمودار ۹

رابطه‌ی «۳» قسمتی از خط به معادله‌ی $y = x - 3$ است که مختص x آن‌ها بین $4/5$ و ۵ است. برای رسم این پاره‌خط در معادله‌ی $y = x - 3$ یک بار $x = 4/5$ را قرار می‌دهیم و مقدار y را می‌یابیم. بار دیگر $x = 5$ را قرار می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم. سپس به کمک دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره‌خط، نمودار آن را رسم می‌کنیم (نمودار ۱۰).



$$y = x - 3;$$

x	4/5	5
y	-1/5	2

نمودار ۱۰

هم چنین پاره‌خط‌هایی که نمایش حرف «س» را طراحی می‌کنند، موازی محور y ها و معادله‌هایشان چنین اند:

$$\begin{cases} x=5 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ x=4 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{3}{4} \\ x=3 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{1}{4} \end{cases} \quad (8)$$

و اما آخرین دستگاهی که مشخص‌کننده‌ی حرف «ه» آخر در کلمه‌ی هندسه است، از یک ربع دایره و پاره‌خط تشکیل شده است. ربع دایره، قسمتی از دایره به مرکز $S(2, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y=2$ و $y=3$ و هم چنین بین دو خط عمودی $x=1$ و $x=2$ قرار دارد. پاره‌خط به کار رفته در حرف «ه»، موازی محور y است و بین دو خط $y=2$ و $y=3$ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (9)$$

$x=2$; $2 \leq y \leq 3$ (10)
اکنون اگر معادله‌ها و نامعادله‌های نوشته شده از رابطه‌های ۳ تا ۱۰ را در یک دستگاه بنویسیم، نمودار این دستگاه، واژه‌ی هندسه را طراحی می‌کند.

از آن‌جا که رهبر معظم انقلاب اسلامی امسال را با عنوان «اصلاح الگوی مصرف» نام‌گذاری کرده است، با رابطه‌های ریاضی، عبارت «اصلاح الگوی مصرف» را با قلم (فونت) دل‌خواه طراحی کنید و معادله‌ها و نامعادله‌های مربوط به آن را بنویسید و برای ما بفرستید. هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه، پس از بررسی آثار رسیده، بهترین‌ها را در مجله به چاپ می‌رساند و برای طراحان آن‌ها جوایز ویژه‌ای ارسال خواهد کرد.

بعد از طراحی این عبارت و نوشتن رابطه‌های ریاضی مربوط به آن، متوجه خواهید شد که طراحی این عبارت به صرف وقت و نوشتن رابطه‌های ریاضی آن به ظرافت و دقت خاصی نیاز دارد. پس متناظر با آن هم اکنون فکر کنید و با مدتی صرف وقت، طوری برنامه‌های زندگی و درسی خود را تدوین کنید که این امر در زندگی روزمره‌ی شما محقق شوند.

در این طراحی دو سطح مستطیل شکل وجود دارد: یکی زیر «هند» که رابطه‌ی آن مطابق نمودار ۵ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

و دیگری سطح مستطیل شکل زیر «سه» که به طور مشابه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

رابطه‌های ۱ و ۲ را به طور خلاصه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

حرف «ه» در این طرح از یک نیم دایره و یک پاره‌خط تشکیل شده است. نیم دایره، قسمتی از یک دایره به مرکز $S(9, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y=2$ و $y=3$ قرار دارد. بنابراین مشابه نمودار ۷ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (4)$$

پاره‌خطی که در حرف «ه» وجود دارد، موازی محور y ها است که رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=9 \\ 2 \leq y \leq 3\frac{1}{3} \end{cases} \quad (5)$$

نقطه‌ی حرف «ن» دایره‌ای به مرکز $S'(7/5, 3/5)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ است که رابطه‌ی آن به این صورت زیر است:

$$(x-7/5)^2 + (y-3/5)^2 = \frac{1}{16} \quad (6)$$

پاره‌خط‌هایی که مشخص‌کننده‌ی دو حرف «ن» و «د» هستند، معادله‌هایشان به این صورت اند:

$$\begin{cases} x=7/5; 2 \leq y \leq 3 \\ x=7 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ y=3 & ; 6 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad (7)$$