

ضرب ماتریس ها

و خواص عمل ضرب ماتریسی

حال اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد، در این صورت، حاصل ضرب ماتریس A در B ، یعنی $A \times B$ ، ماتریسی است از مرتبه $m \times n$ (مرتبه ماتریس حاصل، از حذف ستون و سطر مشترک به دست می آید) که در حالت کلی درایه روی سطر i ام و ستون j ام در این ماتریس از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می آید. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn}$ و $C = [c_{ij}]_{mn}$ ، در این صورت:

$$c_{ij} = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

$$\Rightarrow A \times B = C = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]$$

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و

$$A \times B = C = [c_{ij}] \text{ اگر } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و $B \times A = D = [d_{ij}]$ ، آن گاه: اولاً درایه های

عمل ضرب ماتریس ها جزو اعمال بسیار مهم بین ماتریس هاست که در کتاب ریاضی سال دوم شروع و در کتاب «هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی» همراه با بعضی از ویژگی های عمل ضرب، کامل شده است. در این مقاله بیش تر کوشیده ایم، خواص عمل ضرب بررسی شود.

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

اگر A یک ماتریس سطری با p ستون و B یک ماتریس ستونی با p سطر باشد، در این صورت حاصل ضرب $A \times B$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times B = [a_{11} a_{12} \dots a_{1p}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1}$$

$$\Rightarrow A_{1 \times p} \times B_{p \times 1} = \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1}$$

مثال: اگر $A = [2 \ 1 \ 3 \ -2]$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، در این صورت، حاصل $A \times B$ را به دست آورید.

$$A \times B = [2 \ 1 \ 3 \ -2] \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times 0 + 1 \times (-2) + 3 \times 1 + (-2) \times 4 = -7$$

$$A \times B \neq B \times A$$



$$d_{34} = [2 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 + 0 - 1 = -3$$

c_{23} و d_{34} را به دست آورید. ثانیاً دو ماتریس C و D را بیابید.

(سطر سوم A در ستون چهارم B ضرب شده است.)

$$A_{r \times t} \times B_{t \times r} = C_{r \times r}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = [2 \ 0 \ -3 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -4 + 0 - 3 + 0 = -7$$

(سطر دوم A در ستون سوم B ضرب شده است.)

ج) $A \times (-B) = -(A \times B)$

د) $(-A) \times B = -(A \times B)$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 5 \\ -1 & 11 & -7 \\ 17 & 19 & -6 \end{bmatrix}$$

اثبات ویژگی ۱. فرض کنیم A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد و فرض کنیم $A \times B = C = [c_{ij}]$ در این صورت:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 5 \\ 17 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m = (rA) \times (sB) \text{ درایه‌ی سطر زام و ستون زام ماتریس}$$

$$= (rA \text{ (سطر زام ماتریس)}) \times (sB \text{ (ستون زام ماتریس)})$$

$$= \sum_{k=1}^p (ra_{ik})(sb_{kj}) = (rs) \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$= (rs) \times C \text{ درایه‌ی سطر زام ستون زام}$$

آزمون: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) -۸ د) صفر
حل: گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

(سطر اول B ، یعنی $[-2]$ در ستون اول A ، یعنی $[1]$ و همچنین در ستون دوم A ، یعنی $[2]$ و... ضرب می‌شود.)
 $-2 = -2 - 4 + 6 - 1 - 2 + 3 + 3 + 6 - 9 = 0$

ویژگی ۲. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت توزیع پذیری نسبت به جمع است؛ یعنی:

$$A_{ml} \times (B_{lp} + C_{pn}) = A \times B + A \times C$$

ویژگی ۳. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت پذیری است؛ یعنی:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

(اثبات دو ویژگی اخیر در کتاب درسی وجود دارد.)

ویژگی ۴. اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n و I_n ماتریس واحد (همانی) هم مرتبه با A باشد، در این صورت داریم:

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

(I_n عضو خنثی نسبت به عمل ضرب است.)

تعریف توان برای ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت، $A^2 = A \times A$ و $A^0 = I$ و $A^3 = A \times A^2$ و... و $A^n = A \times A^{n-1}$.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱. اگر r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A \times B$ قابل تعریف باشد، در این صورت داریم:

$$(rA) \times (sB) = (rs)A \times B$$

$$(rA) \times B = A \times (rB) = r(A \times B) \text{ (الف)}$$

$$(-A) \times (-B) = A \times B \text{ (ب)}$$

ویژگی ۵. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A \times B$ تعریف شود و سطر زام ماتریس A صفر باشد، آن گاه سطر زام ماتریس $A \times B$ صفر است.

ویژگی ۶. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A \times B$ تعریف شود و ستون زام ماتریس B صفر باشد، در این صورت، ستون



زام ماتریس $A \times B$ صفر است.

ویژگی ۷، به راحتی امکانپذیر است.

ویژگی ۷. اگر A ماتریسی قطری و B مربعی و هم مرتبه با A باشد، در این صورت:

الف) برای محاسبه $(A \times B)$ کافی است هر درایه i روی قطر اصلی A را در سطر نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(در سطر اول B ، عدد ۲ و در سطر دوم عدد (-1) و در سطر سوم عدد ۳ را ضرب کرده ایم.)

ب) برای محاسبه $B \times A$ ، کافی است هر درایه i روی قطر اصلی A را در ستون نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: ضرب ماتریس ها در حالت کلی، خاصیت جابه جایی ندارد (حتی در حالتی که A و B هر دو مربعی و هم مرتبه باشند، ممکن است: $AB \neq BA$)

ویژگی ۸. اگر A و B دو ماتریس قطری و هم مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$$A \times B = B \times A$$

(مجموعه i ماتریس های قطری و هم مرتبه نسبت به عمل ضرب خاصیت جابه جایی دارد.)

ویژگی ۹. اگر A ماتریسی اسکالر و B ماتریسی هم مرتبه با A و دلخواه باشد، همواره داریم:

$$A \times B = B \times A$$

تذکر: اثبات هریک از ویژگی های ۸ و ۹، با توجه به

ویژگی ۱۰. (در ماتریس های 2×2) اگر فرض کنیم

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ و } H = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

در این صورت، هر دو مجموعه M و H نسبت به عمل ضرب ماتریسی خاصیت جابه جایی دارند. به عبارت دیگر،

$$\text{اگر فرض کنیم: } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} (A, B \in M)$$

$$\text{و } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} (C, D \in H), \text{ در این صورت همواره داریم:}$$

$$A \times B = B \times A \text{ یا } C \times D = D \times C$$

تذکر: هر عضو M (یا H) فقط با ماتریسی به فرم خودش، یعنی ماتریسی از M (یا از H) تعویض پذیر است. به عبارت

$$\text{دیگر، اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ و } AB=BA \text{، در این صورت باید داشته باشیم: } y=z \text{ و } x=t.$$

ویژگی ۱۱. اگر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B تعویض پذیر باشند ($A \times B = B \times A$)، در این صورت تمام اتحادهای جبری برای آن ها برقرار است. برای مثال:

$$AB=BA \Leftrightarrow (A+B)^T = A^T + 2AB + B^T$$

$$AB=BA \Leftrightarrow (A-B)(A+B) = A^T - B^T$$

نتیجه: چون ماتریس همانی یا وحد (I) با هر ماتریس هم مرتبه i خود تعویض پذیر است، تمام اتحادهای جبری برای I و هر ماتریس هم مرتبه با آن برقرار است. برای مثال:

$$(A^T - I^T) = (A - I)(A^T + AI + I^T)$$

ویژگی ۱۲. اگر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B تعویض پذیر باشند ($A \times B = B \times A$)، در این صورت برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:



$$A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k^n \end{bmatrix} = k^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = k^n I$$

ویژگی ۱۴. (در ماتریس‌های 2×2) اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

ماتریسی شبه‌مثلثی باشد، در این صورت همواره داریم:

$$I) \text{ زوج } n: A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

$$II) \text{ فرد } n: A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(اثبات هر دو قسمت (I) و (II)، به استقرای روی n امکان‌پذیر است.)

تذکر مهم: قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها، در حالت کلی برقرار نیست؛ یعنی در حالت کلی از $A \times B = A \times C$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $B=C$. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{، در این صورت داریم:}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

درواقع، با این که می‌بینید $A \times B = A \times C$ ولی $B \neq C$

نتیجه‌ی مهم: در ماتریس‌ها از تساوی $A \times B = \bar{0}$ ، در حالت کلی، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = \bar{0}$ یا $A = \bar{0}$.

$$A^m \times B^n = B^n \times A^m$$

اثبات: ابتدا برای هر $n \in \mathbb{N}$ با استفاده از استقرا ثابت

می‌کنیم: $A \times B^n = B^n \times A$

$$n=1: (A \times B) = (B \times A)$$

فرض استقرا:

$$n=k: A \times B^k = B^k \times A$$

حکم استقرا:

$$n=k+1: A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A$$

$$A \times B^k = B^k \times A$$

$$\Rightarrow (A \times B^k) \times B = (B^k \times A) \times B$$

$$\Rightarrow A \times (B^k \times B) = B^k \times (A \times B)$$

$$\Rightarrow A \times B^{k+1} = B^k \times (B \times A) = (B^k \times B) \times A$$

$$\Rightarrow A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A$$

(که در این صورت حکم ثابت شده است.)

حال اگر فرض کنیم $B^n = C$ ، در این صورت قبلاً ثابت باشد که: $A \times C = C \times A$ یا $C \times A = A \times C$ ، و با استفاده از حکم قبل می‌توان برای هر $m \in \mathbb{N}$ نوشت:

ویژگی ۱۲ به اثبات می‌رسد. $B^n \times A^m = A^m \times B^n$ یا $C \times A^m = A^m \times C$

تذکر: در تعریف توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی، به استقرا ثابت می‌شود:

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

ویژگی ۱۳. اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه‌ی A^n کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی اسکالر و $a_{11} = k$ باشد، در این صورت داریم:



این مثال توجه کنید:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \text{ (د)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \text{ (ج)}$$

حل: گزینه ی (ب) صحیح است؛ زیرا در گزینه ها فقط گزینه ی (ب) ماتریسی را معرفی می کند که حاصل جمع درایه های روی قطر اصلی آن یا $\text{trace}(A \times B)$ یعنی ۱۸ برابر است.

نتیجه: اگر A ، B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، داریم:

$$\text{trace}(A \times B \times C) = \text{trace}(B \times C \times A)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{trace}(A \times B \times C) &= \text{trace}[A \times (B \times C)] = \text{trace}[(B \times C) \times A] \\ &= \text{trace}(B \times C \times A) \end{aligned}$$

ویژگی ۱۷. مجموعه ی ماتریس های بالا مثلثی از مرتبه ی n (پائین مثلثی از مرتبه ی n) نسبت به عمل ضرب بسته است. در واقع، ضرب دو ماتریس بالا مثلثی (پائین مثلثی) و هم مرتبه ماتریسی است بالا مثلثی (پائین مثلثی). نتیجه: حاصل ضرب دو ماتریس قطری و هم مرتبه،

مثال: فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، در این صورت داریم:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در صورتی که $A \neq \bar{0}$ و $B \neq \bar{0}$.

ویژگی ۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ، در این صورت داریم:

$$(A \times B)^n = A^n \times B^n$$

اثبات: به استقرا روی n ، فرض کنیم $A \times B = B \times A$ در این صورت داریم:

$$n=1 \Rightarrow A \times B = A \times B$$

$$n=k \Rightarrow (A \times B)^k = A^k \times B^k \quad \text{فرض استقرا:}$$

$$n=k+1 \Rightarrow (A \times B)^{k+1} = A^{k+1} \times B^{k+1} \quad \text{حکم استقرا:}$$

$$\begin{aligned} (A \times B)^{k+1} &= (A \times B) \times (A \times B)^k \\ &= (A \times B) \times (A^k \times B^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \times B)^{k+1} &= A \times (B \times A^k) \times B^k \stackrel{\text{ویژگی ۱۲}}{=} A \times (A^k \times B) \times B^k \\ &= (A \times A^k) \times (B \times B^k) = A^{k+1} \times B^{k+1} \end{aligned}$$

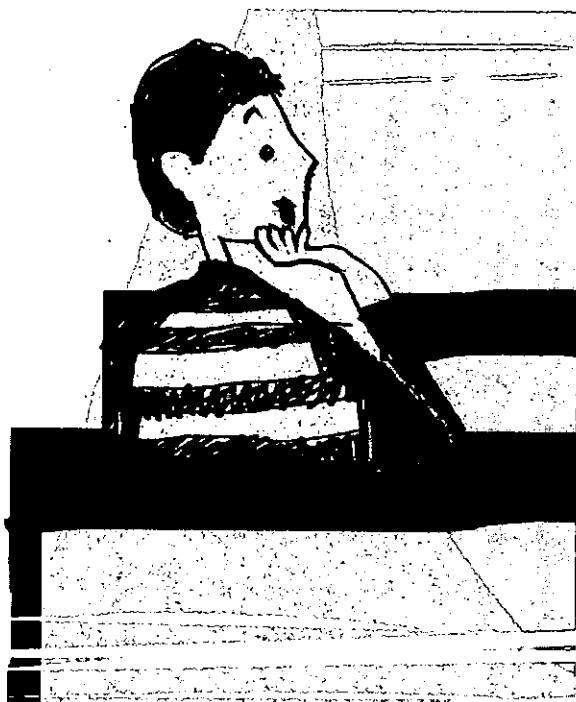
ویژگی ۱۶. اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$$\text{trace}(A \times B) = \text{trace}(B \times A)$$

آزمون: اگر A و B ماتریس های 2×2 و

$$A \times B = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \text{ در این صورت } (B \times A) \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$





ماتریسی قطری از همان مرتبه است.

تعریف ماتریس خودتوان: ماتریس مربعی A را خودتوان می‌نامیم، هرگاه:

$$A^T = A$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ماتریسی خودتوان

است، زیرا:

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = A$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \text{ پوچ توان از مرتبه ی } 3 \text{ است.}$$

حل: ثابت می‌کنیم $A^T \neq \bar{0}$ و $A^T = \bar{0}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} \cdot & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdot & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a_1 a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$A^T = A \times A^T = \begin{bmatrix} \cdot & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a_1 a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \bar{0}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبه ی m و α یک عدد حقیقی باشد، در این صورت (αA) نیز پوچ توان از مرتبه ی m است.

$$\text{اثبات: } (\alpha A)^m = \alpha^m A^m = \alpha^m \bar{0} = \bar{0}$$

نتیجه: حاصل ضرب دو ماتریس تعویض پذیر مانند A و B که یکی از آن‌ها مثلاً A پوچ توان از مرتبه ی m باشد، ماتریسی پوچ توان از مرتبه ی m است.

تمرین: نشان دهید، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

ماتریسی خودتوان است.

اثبات: فرض کنیم $AB = BA$ و $A^m = \bar{0}$ ، در این صورت داریم:

$$(AB)^m = A^m B^m = \bar{0} B^m = \bar{0}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی ناصفر و خودتوان باشد، آن‌گاه پوچ توان نیست؛ زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ همواره داریم: $A^n = A \neq \bar{0}$. پس A پوچ توان نیست.

نتیجه: اگر A ماتریسی خودتوان باشد، در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$A^n = A$$

اثبات به عهده ی شما (با فرض $A^T = A$ و با کمک استقرا، به راحتی حکم ثابت می‌شود).

مسأله: اگر $AB = A$ و $BA = B$ ، ثابت کنید A و B خودتوان هستند.

$$AB = A \Rightarrow (AB)A = AA$$

حل: (A خودتوان است.)

$$\Rightarrow A(BA) = A^T \Rightarrow A(B) = A^T \Rightarrow A = A^T$$

(به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $B^T = B$. شما ثابت کنید.)

تعریف ماتریس پوچ توان: ماتریس مربعی A را پوچ توان از مرتبه ی m می‌نامیم، هرگاه m کوچک ترین توانی باشد که $A^m = \bar{0}$.

واضح است که برای هر $n > m$ همواره $A^n = \bar{0}$ و برای هر $k < m$ $A^k \neq \bar{0}$ است.

مسأله: نشان دهید هر ماتریس به شکل



طرح و حل چند مسأله‌ی مهم

$$AB - BA = I \Rightarrow \text{trace}(AB - BA) = \text{trace}(I)$$

$$\Rightarrow \text{trace}(AB) - \text{trace}(BA) = n \Rightarrow 0 = n \text{ (تناقض)}$$

و تناقض حاصل یعنی $0 = n$ فرض خلف را باطل می‌کند و حکم برقرار خواهد بود.

مسأله‌ی ۵. اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n و

$$A^T = I, \text{ ثابت کنید ماتریس } \frac{1}{4}(I - A) \text{ خودتوان است.}$$

حل:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4}(I - A) \right]^T &= \frac{1}{4}(I - A)^T = \frac{1}{4}(I^T - A^T) \\ &= \frac{1}{4}(I - A) = \frac{1}{4}(I - A) \end{aligned}$$

مسأله‌ی ۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3(2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: اثبات به استقرای n :

$$n=1 \rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 3(2^1 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=k \rightarrow A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3(2^k - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ فرض استقرا}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(2^{k+1} - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ حکم استقرا}$$

$$A^{k+1} = A^k \times A = \begin{bmatrix} 2^k & 3(2^k - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 2^k \times 3 + 3(2^k - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(2^k + 2^k - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(2^{k+1} - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مسأله‌ی ۱. اگر A, B, C ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه‌ی n باشند و داشته باشیم $AC=CA$ و $BC=CB$ ، ثابت کنید که ماتریس (AB) با C تعویض پذیر است.

حل:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times (C \times B) = (A \times C) \times B$$

$$(C \times A) \times B = C \times (A \times B)$$

مسأله‌ی ۲. اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، ثابت کنید:

$$\text{trace}(A \pm B) = \text{trace}(A) \pm \text{trace}(B)$$

حل: فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ در این صورت

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $\text{trace}(A \pm B) = \text{trace}(A) \pm \text{trace}(B)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} \pm b_{ii}) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}) \pm \sum_{i=1}^n (b_{ii}) \\ &= \text{trace}(A) \pm \text{trace}(B) \end{aligned}$$

مسأله‌ی ۳. اگر A ماتریسی $n \times n$ و α یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$\text{trace}(\alpha A) = \alpha \text{trace}(A)$$

$$\text{trace}(\alpha A) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad A = [a_{ij}]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha \text{trace}(A)$$

مسأله‌ی ۴. ثابت کنید هیچ دو ماتریس $n \times n$ مانند A

و B یافت نمی‌شوند که در رابطه‌ی $AB - BA = I$ صدق کنند.

حل: فرض کنیم چنین ماتریس‌هایی وجود داشته باشند

(فرض خلف)، آن‌گاه: