

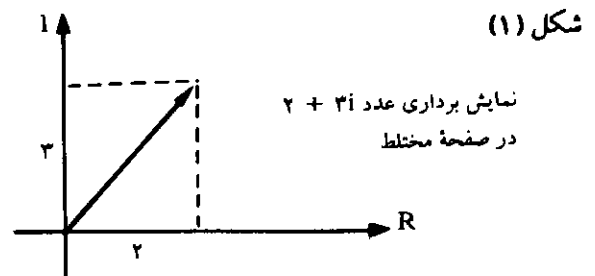
صورت قطبی (مثلثاتی) و نمایش هندسی

جبر و احتمال سوم ریاضی نظام جدید اعداد مختلط

● روح الله جهانی پور

§۲. نمایش مثلثاتی و تعبیر هندسی

دیدیم که هر عدد مختلط را می‌توان به صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی نشان داد. از جبر دبیرستانی می‌دانیم که بین نقاط صفحه دکارتی و زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک برقرار است؛ یعنی به ازای هر زوج از این نوع یک نقطه از صفحه دکارتی و به ازای هر نقطه زوجی از اعداد حقیقی را به دست می‌آوریم. بنابراین اعداد مختلط را می‌توانیم بر روی صفحه‌ای موسوم به صفحه مختلط نشان دهیم. این صفحه همان صفحه دکارتی $\mathbb{R}^2$ است منتها به جای محور x ، محور حقیقی و به جای محور y ، محور موهومی را داریم. ولی تعبیر دیگری نیز از نقاط صفحه یا زوج مرتبها آموخته‌ایم و آن این که هر زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش یک بردار است، برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه متناظر با آن زوج مرتب در صفحه است. بنابراین مثلاً عدد مختلط $2 + 3i$ را که متناظر با زوج مرتب $(2, 3)$ است را می‌توان با برداری که ابتدای آن مبدأ $(0, 0)$ و انتهای آن نقطه $(2, 3)$ است، نشان داد. (شکل ۱)



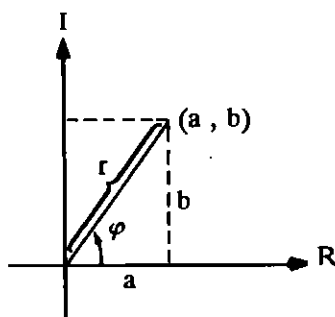
حال فرض کنید $z = (a, b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، طول و عرض نقطه متناظر با این عدد مختلط در صفحه به ترتیب a و b می‌باشند. برداری را که مبدأ را به (a, b) متصل می‌کند رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم φ زاویه بین این بردار و جهت مثبت محور حقیقی در

جهت مثلثاتی، یعنی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. به کمک قضیه فیثاغورس طول بردار مذکور به راحتی به دست می‌آید و برابر است با $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. لذا تعبیر هندسی قدر مطلق عدد مختلط z همان طول بردار نمایش این عدد در صفحه مختلط است، به کمک روابط هندسی داریم:

$$a = r \cos \varphi \quad \text{و} \quad b = r \sin \varphi$$

لذا z را می‌توان به این صورت نشان داد:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



این شکل نمایش عددهای مختلط را نمایش مثلثاتی می‌نامیم. با این طرز نمایش اعداد مختلط یعنی به صورت بردار در صفحه، جمع دو عدد مختلط به صورت جمع برداری دو بردار درمی‌آید و برای به دست آوردن مجموع دو عدد مختلط می‌توان از قانون ستواری الاضلاع برای جمع دو بردار استفاده نمود. این روش در شکل ۳ نشان داده شده است. کافی است ابتدای بردار دوم را بر انتهای بردار اول منطبق نموده، از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم متصل کنیم. بردار حاصل مجموع دو عدد مختلط مفروض را به دست می‌دهد.

حال فرض کنید $z \neq 0$ یک عدد مختلط دلخواه و

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

آنگاه

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2} (r \cos \varphi, -r \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{r} (\cos \varphi, -i \sin \varphi) \end{aligned}$$

بنابراین برای z_1 و z_2 فوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &+ i (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

تبصره ۱: گفتیم که $\text{Arg } z$ یعنی آرگومان اصلی z بین 0 و 2π است. لیکن می‌دانیم که اگر برداری را به اندازه 2π رادیان یا به طور کلی $2k\pi$ رادیان که $k \in \mathbb{Z}$ دوران دهیم بر روی خود منطبق می‌شود و به این ترتیب با دوران هر بردار مختلط آرگومانهای متفاوت آن را به دست می‌آوریم. هر آرگومان دلخواهی از z غیر از آرگومان اصلی آن را با $\arg z$ نشان می‌دهیم. به طور دقیقتر

$$\arg z = \{\varphi : \varphi = \text{Arg } z + 2k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

نکته، این است که روابط بالا مربوط به $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ برای آرگومانهای دلخواه برقرارند و ممکن است به ازای آرگومان اصلی برقرار نباشند. در واقع داریم:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

و

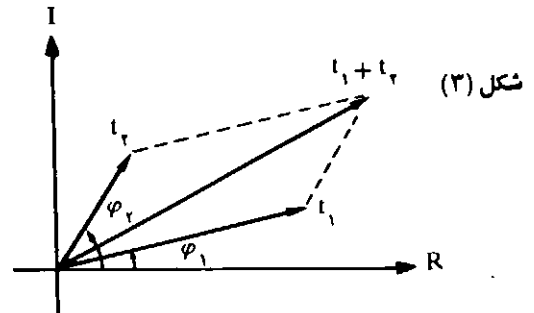
$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

در این جا یک نمادگذاری را معرفی می‌کنیم که هر چند منشأ ریاضی دقیقی دارد لیکن بهتر است فعلاً فقط به صورت یک نماد پذیرفته شود. عبارت $\cos \varphi + i \sin \varphi$ را به صورت $e^{i\varphi}$ نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر عدد مختلط z ، داریم:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \text{Arg } z$$

به این ترتیب روابط ضرب و تقسیم در بالا به این صورت درمی‌آیند:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



برای عدد مختلط $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ زاویه φ را آرگومان یا آوند z می‌نامیم و با $\text{Arg } z = \varphi$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که با قرار دادن فوق مبنی بر این که φ زاویه بردار z با قسمت مثبت محور حقیقی در جهت مثلثاتی است، داریم $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$ و آن را زاویه اصلی یا آرگومان اصلی z می‌نامیم.

حال ببینیم در این نمایش ضرب و تقسیم دو عدد مختلط به چه صورت درمی‌آیند. گیریم

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

دو عدد مختلط دلخواه با آرگومانهای φ_1 و φ_2 باشند. آنگاه طبق فرمول ضرب دو عدد مختلط داریم:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &+ i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

یعنی؛ آرگومان حاصل ضرب برابر است با مجموع آرگومانهای دو عدد مختلط مفروض و قدر مطلق آن برابر حاصل ضرب قدر مطلقهای z_1 و z_2 است و به این ترتیب مطلبی که قبلاً تحقیق کرده بودیم، مجدداً ثابت می‌شود؛ یعنی:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

بویژه اگر $z_1 = z_2 = z$ ، آنگاه $r_1 = r_2 = r$ و $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ، لذا

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

اگر این مطلب را تعمیم دهیم، براحتی می‌توان به استقرا ثابت کرد که برای هر $n \geq 2$:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

این فرمول به فرمول دو موادر موسوم است.

بنابراین :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2(1 - \cos \varphi)} (1 - \cos \varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos n\varphi) \\ &= \frac{2}{2 \times 2 \sin \varphi / 2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi \right) \\ &= \frac{-2}{2 \sin \varphi / 2} 2 \cos \frac{n+1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi n}{2} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{n+1}{2} \varphi}{2 \sin \varphi / 2} = - \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{n+1}{2} \varphi}{\sin \varphi / 2} \end{aligned}$$

مثال ۳: هر يك از اعداد زیر را به صورت نمایی نشان دهید :

(الف) $a > 0$ و $z = a$ ، داریم :

$$|z| = a, \operatorname{Arg} z = 0 \Rightarrow z = ae^{i0}$$

(ب) $a < 0$ و $z = a$ ، داریم :

$$|z| = -a, \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc} \cos \frac{a}{|z|} = \operatorname{Arc} \cos(-1) = \pi$$

پس : $z = -ae^{i\pi}$ (ج) $z = 1 + i$ ، داریم :

$$|z| = \sqrt{2}, \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(د) \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}, |z| = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = 1, \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال ۴: ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی $z \neq 0$ ، داریم :

$$\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \begin{cases} \operatorname{Arg} z = 0 & z \in \mathbb{R}, z > 0 \\ 2\pi - \operatorname{Arg} z & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

حل: اگر $z \in \mathbb{R}$ و $z > 0$ ، آنگاه طبق مثال ۳ ، $\operatorname{Arg} z = 0$ وچون $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ و $\frac{1}{z} > 0$ ، بنابراین $\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = 0$. اگر z عدد

حقیقی مثبت نباشد ، آنگاه

$$0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \quad \text{و} \quad 0 < \operatorname{Arg} \frac{1}{z} < 2\pi$$

از طرفی

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \in \arg 1 = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

بنابراین برای این نمایش ، قانون نماها برقرار است.

مطلب را با ارائه چند مثال ادامه می دهیم.

مثال ۱: ثابت کنید اگر $z \neq 1$ ، آنگاه

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

حل: قرار می دهیم :

$$S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

حال دو طرف را در z ضرب می کنیم :

$$zS = z + z^2 + \dots + z^{n+1} = S + z^{n+1} - 1$$

بنابراین :

$$1 - z^{n+1} = S(1 - z) \Rightarrow S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

مثال ۲: فرمولی برای مجموع

$$A = 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$$

بیابید.

حل: در فرمول مثال ۱ ، قرار می دهیم :

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

و از فرمول دو موادر استفاده می کنیم. توجه می کنیم که اگر $\varphi = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه $A = n + 1$ ، بنابراین فرض می کنیم $\varphi \neq 2k\pi$ یا $z \neq 1$. آنگاه

$$\frac{1 - [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi]}{1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^n (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$$

حال بخشهای حقیقی دو طرف را برابر هم قرار می دهیم. قسمت

حقیقی طرف راست همان A است. بنابراین باید بخش حقیقی طرف

چپ را به دست آوریم. اما طرف چپ برابر است با:

$$\frac{1}{2 - 2\cos \varphi} \{ [(1 - \cos(n+1)\varphi) + i \sin(n+1)\varphi] \cdot [(1 - \cos \varphi) - i \sin \varphi] \}$$

بنابراین $k \in \mathbb{Z}$ موجود است که

$$\text{Arg } \frac{1}{z} = 2k\pi - \text{Arg } z$$

اما

$$0 < \text{Arg } z + \text{Arg } \frac{1}{z} = 2k\pi < 4\pi \Rightarrow k = 1$$

$$\text{بنابراین } \text{Arg } \frac{1}{z} = 2\pi - \text{Arg } z$$

۳.۵. ریشه‌های عددهای مختلط

در مجموعه اعداد حقیقی می‌توانیم ریشه n ام مثبت عددهای

حقیقی را که گاه همراه با شرایط اضافی به دست آوریم. مثلاً اگر n زوج باشد، باید x در $\sqrt[n]{x}$ در شرط $x \geq 0$ صدق کند. در هر صورت ریشه n ام یک عدد دارای این ویژگی است که اگر آن را به توان n برسانیم خود عدد به دست می‌آید. همین ویژگی را می‌توان تعریف توان $\frac{1}{n}$ یا ریشه n ام عدد مختلط z نیز دانست بنابراین $\sqrt[n]{z}$ یا $z^{\frac{1}{n}}$ را (البته بین این دو نماد تفاوت ظریفی وجود دارد) به صورت عدد مختلط w تعریف می‌کنیم، طوری که:

$$w^n = z$$

فرض کنیم:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

برای یافتن w کافی است ρ و θ را تعیین کنیم. بنابر فرمول دومواری داریم:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

حال دو عدد مختلط داریم که با هم مساویند، در نتیجه:

$$\rho^n = r \quad \text{و} \quad \cos n\theta = \cos\varphi \quad \text{و} \quad \sin n\theta = \sin\varphi$$

از مجموع معادلات فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad r > 0$$

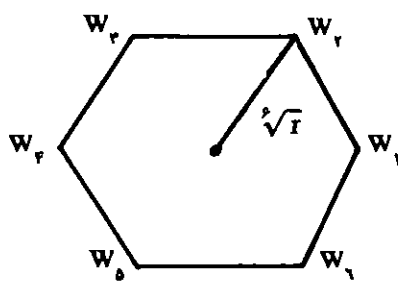
و

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad \text{و} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

بنابراین تفاوت بسیار عمده‌ای که بین ریشه n ام مختلط با حقیقی وجود دارد این است که هر عدد مختلط، n تا ریشه n ام دارد، که به ازای $k = 0$ تا $k = n-1$ از بالا حاصل می‌شوند و به صورت

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

هستند. اگر بار دیگر به تعریف هندسی اعداد مختلط به صورت بردار بازگردیم، مشاهده می‌کنیم که این w_k ها بردارهایی با طول ثابت $\sqrt[n]{r}$ و زوایایی هستند که هر یک به اندازه ثابت $\frac{2\pi}{n}$ با هم اختلاف زاویه دارند. به عبارت دیگر نقاط انتهایی این بردارها رؤوس یک ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r} = \rho$ هستند. به ازای $n = 6$ ، این شش ضلعی در شکل ۴ رسم شده است.



(شکل ۴)

ریشه‌های ۶ام z روی یک ضلعی منتظم

مثال ۵: ریشه‌های n ام واحد را به دست آورید.

حل: به ازای $z = 1$ داریم:

$$r = 1 \quad \text{و} \quad \varphi = 0$$

بنابراین طبق فرمول فوق داریم:

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

مثال ۶: معادله $z^2 + 1 = 0$ را حل کنید و ریشه‌های آن را به صورت هندسی نمایش دهید.

حل: حل این معادله یعنی یافتن اعداد مختلط z به طوری که

$$z^2 = -1$$

یعنی یافتن ریشه‌های سوم عدد -1 . فرم مثلثاتی -1 به صورت زیر است:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

بنابراین به ازای $r = 1$ و $\varphi = \pi$ و $n = 3$ در فرمول ریشه n ام داریم:

$$w_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_k = \cos \frac{\gamma k \pi}{n} + i \sin \frac{\gamma k \pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1$$

بنابراین:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$$

بنابراین مطابق مطلب فوق

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\gamma k \pi}{n} + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\gamma k \pi}{n} = 0$$

یا:

پس (الف) و (ب) با مساوی صفر قرار دادن دو مجموع فوق به دست می‌آیند.

§ ۴. کاربردهای هندسی

مجدداً باز می‌گردیم به تعبیر اعداد مختلط به عنوان نقاط صفحه. این تعبیر ایده نمایش جبری اشکال هندسی گوناگون توسط روابط متضمن اعداد مختلط را در ذهن تقویت می‌کند. پیش از این قدر مطلق یک عدد مختلط را، فاصله نقطه نمایش دهنده آن عدد در صفحه تا مبدأ تعریف کردیم. حال اگر $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$|z_2 - z_1| = |(a_2 - a_1, b_2 - b_1)| = \left[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

که همان فرمول آشنای فاصله دو نقطه در صفحه است. این مطلب اهمیت قدرمطلق را از نظر نمایش جبری مذکور در فوق نشان می‌دهد. مثلاً فرض کنید بخواهیم دایره را به این طریق نشان دهیم. خوب! دایره مجموعه نقاطی است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت موسوم به مرکز برابر مقدار ثابتی موسوم به شعاع است. اگر این نقطه ثابت را z_0 بنامیم، و شعاع را R آنگاه دایره C به مرکز z_0 و شعاع R ، عبارت است از:

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$$

به عنوان مثال دیگر، می‌خواهیم معادله بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات را بیابیم. اگر محور اصلی این بیضی محور x ها و z_0 یک کانون آن باشد، $-z_0$ کانون دیگر آن خواهد بود. بنابراین طبق تعریف بیضی، این بیضی دارای معادله

$$|z - z_0| + |z + z_0| = a = \text{ثابت}$$

است. سعی کنید مثالهای دیگری از این دست را بررسی کنید.

$$k=0 \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\gamma} + i \frac{\sqrt{3}}{\gamma}$$

$$k=1 \Rightarrow w_1 = -1$$

$$k=2 \Rightarrow w_2 = \frac{1}{\gamma} - i \frac{\sqrt{3}}{\gamma}$$

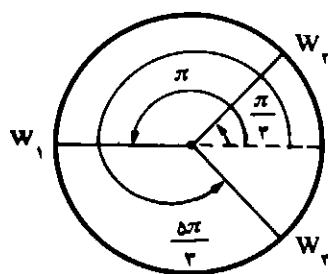
این ریشه‌ها را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. اینها رؤوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره واحد هستند.

مثال ۷: محاسبه کنید:

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad (\text{الف})$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \quad (\text{ب})$$

$$e^{\gamma k \pi i} = \cos \gamma k \pi + i \sin \gamma k \pi = 1 \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{ج})$$



شکل (۵)

مثال ۸: با توجه به این که اگر ریشه‌های معادله چند جمله‌ای

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

را به ترتیب $z_1, \dots, z_n$ بنامیم آنگاه

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{ثابت کنید:}$$

$$1 + \cos \frac{\gamma \pi}{n} + \cos \frac{2\gamma \pi}{n} + \dots + \cos \frac{\gamma(n-1)\pi}{n} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sin \frac{\gamma \pi}{n} + \sin \frac{2\gamma \pi}{n} + \dots + \sin \frac{\gamma(n-1)\pi}{n} = 0 \quad (\text{ب})$$

حل: ریشه‌های n ام واحد در واقع ریشه‌های معادله

$$z^n - 1 = 0$$

هستند که برای آن مطابق نمادگذاری بالا داریم:

$$a_{n-1} = 0 \quad \text{و} \quad a_n = 1$$

از طرفی ریشه‌های n ام واحد را قبلاً یافته بودیم. اینها عبارت بودند از: