

شهود ریاضی و استدلال شهودی

شهود در ریاضیات چیست و چه جایگاهی دارد؟ آیا استدلال بر مبنای شهود معتبر است یا خیر؟ متأسفانه کتاب درسی جبر و احتمال که این بحث در فصل اول آن و در ابتدای مبحث استدلال ریاضی مطرح شده است نیز از کنار این موضوع به سرعت گذشته و آن را به طور دقیق به خواننده معرفی نکرده است. بسیاری از دانش آموزان (و حتی معلمان) رشته‌ی ریاضی نیز، شناخت دقیقی از این موضوع ندارند و مفهوم آن را دقیقاً درک نکرده‌اند. برای آشنایی با این موضوع اساسی در ریاضیات، در این مقاله کوشیده‌ایم، در حد توان شهود در ریاضی را با مثال‌های متنوع بشکافیم و آن را به خوبی بازشناسی کنیم.

فرض کنید از دانش آموز دوره‌ی راهنمایی تحصیلی بپرسیم: دو عدد که مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، کدامند؟ در واقع از او می‌خواهیم، با حفظ مجموع دو عدد، حاصل ضرب آن‌ها را تا حد امکان زیاد کند. چون این دانش آموز بیش‌تر با عددهای طبیعی سر و کار داشته، در ذهن خود ممکن است عددهای زیر را امتحان کند:

$$\begin{aligned} 1+9 &= 10 \text{ و } 1 \times 9 = 9 & 2+8 &= 10 \text{ و } 2 \times 8 = 16 \\ 3+7 &= 10 \text{ و } 3 \times 7 = 21 & 4+6 &= 10 \text{ و } 4 \times 6 = 24 \\ 5+5 &= 10 \text{ و } 5 \times 5 = 25 \end{aligned}$$

و به طور شهودی می‌فهمد که هر چه اختلاف دو عدد کم‌تر شود، حاصل ضرب آن‌ها بیش‌تر می‌شود. بنابراین به طور شهودی به این حکم می‌رسد: «هر گاه مجموع دو عدد مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار ممکن

را دارد که آن دو عدد باهم مساوی باشند.»

بنابراین در پاسخ به سؤال مورد نظر، عددهای ۵ و ۵ را معرفی می‌کند. اکنون سؤال مشابه دیگری را از همان دانش آموز می‌پرسم: «می‌خواهیم با سیمی فلزی به طول ثابت، یک مستطیل درست کنیم؛ یعنی دو سر سیم را به یکدیگر وصل و شکل بسته‌ی حاصل را به مستطیل تبدیل کنیم اگر بخواهیم مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، آن را به چه صورت درست کنیم؟» به عبارت دیگر، از میان همه‌ی مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها مقدار ثابتی (مثلاً ۲۰ cm) است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد؟

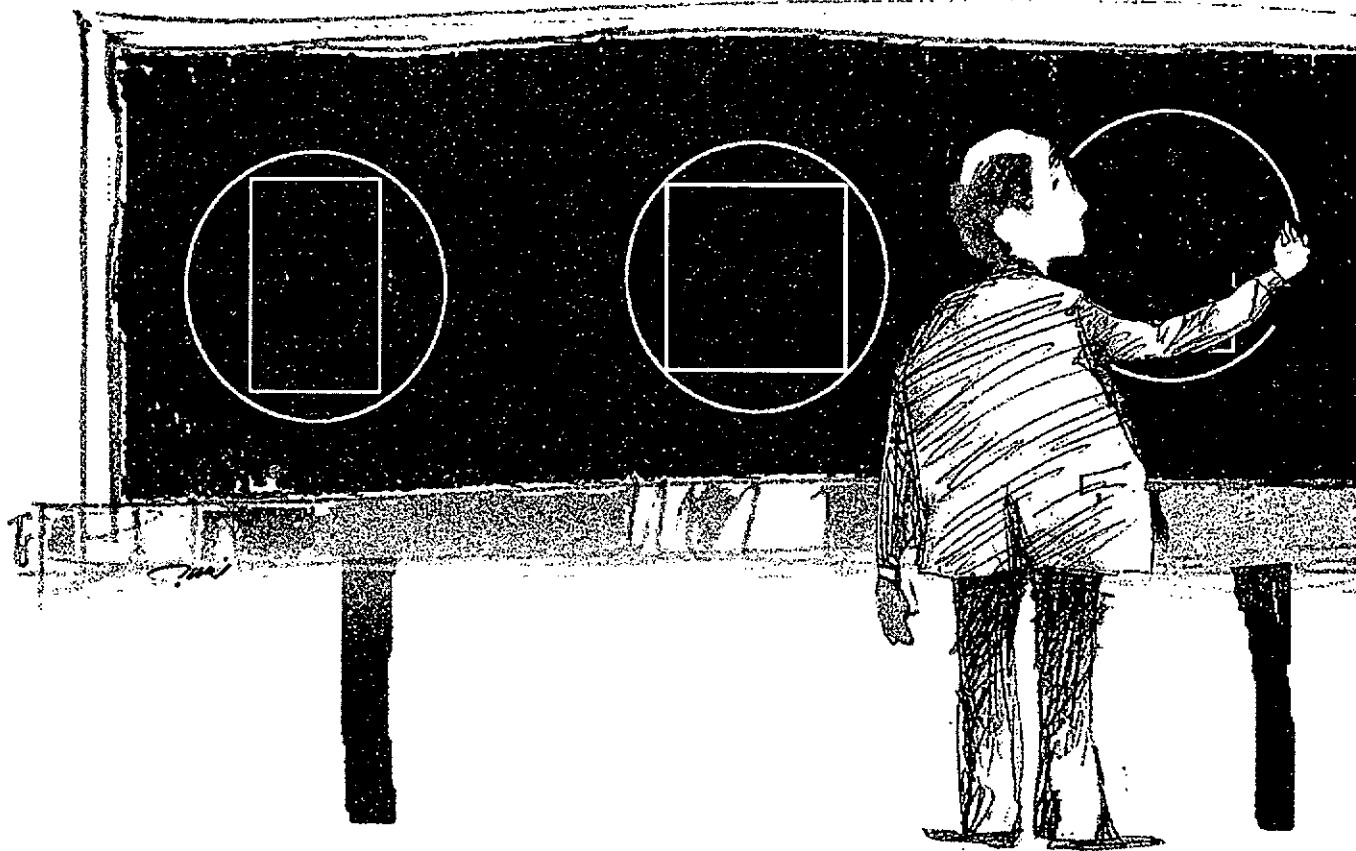
ممکن است دانش آموز ما با همان شهود و با کمی دقت به جواب برسد، ولی دانش آموز دبیرستانی (که شهود قوی‌تری دارد)، حتی اگر برای اولین بار با این مسأله مواجه شود، احتمالاً فوراً می‌تواند بگوید: «مستطیل را باید به شکل مربع بسازیم».

اما آیا دلیلی هم برای ادعای خود دارد؟

تجربه‌ی نویسنده که این پرسش را با دانش آموزان بسیاری در میان گذاشته است، نشان می‌دهد که اکثر آن‌ها، همین پاسخ را تقریباً بی‌درنگ داده‌اند، ولی علت دقیق موضوع را تنها عده‌ی انگشت شماری می‌دانستند.

اگر این دانش آموزان با مسأله‌ی بهینه‌سازی از کتاب «حسابان» سال سوم رشته‌ی ریاضی آشنایی دقیق داشته باشند، می‌توانند مسأله را به صورتی منظم حل کنند و به جواب برسند، در غیر این صورت، با روش استدلالی زیر هم می‌توانند به جواب برسند:

محیط این مستطیل مقدار معینی است مساوی با طول سیم



مربعی به ضلع یک چهارم طول سیم درست کنیم.

ملاحظه می کنید که شما پاسخ مسأله را به طور «غریزی» می دانستید، ولی علت دقیق آن را با استدلال استنتاجی، آن گونه که در بالا دیدید، احتمالاً نمی دانستید. اگر هم می توانستید این گونه استدلال کنید، باز هم بدون نیاز به این استدلال، از ابتدا جواب صحیح را حدس می زدید.

اکنون همان سؤال را قدری پیچیده تر کنیم: «اگر محدودیتی در ساختن شکل بسته به کمک همان سیم به طول ثابت (L) نداشته باشیم، برای آن که مساحت آن بیش ترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکلی بسازیم؟ به عبارت دیگر، از بین تمام شکل های هندسی بسته به محیط ثابت L ، کدام یک بیش ترین مساحت ممکن را دارد؟»

کمی فکر کنید. بله، درست حدس زده اید. تجربه ی من می گوید که اکثر دانش آموزان باز هم درست حدس می زنند. این یک قضیه ی معروف در ریاضیات است که «هم پیرامونی» نامیده می شود: «از بین تمام شکل های بسته ی هندسی با محیط ثابت، دایره بیش ترین مساحت را دارد.»

ولی آیا می توانید این موضوع را ثابت کنید؟! احتمالاً این بار حتی اگر به تمام مسائل دبیرستانی (یا حتی به ریاضیات پایه ی دوره ی دانشگاهی) نیز مسلط باشید، باز هم نتوانید این

(L). یعنی براساس شکل داریم:

$$2(x+y) = L \Rightarrow y = \frac{L}{2} - x \quad (1)$$

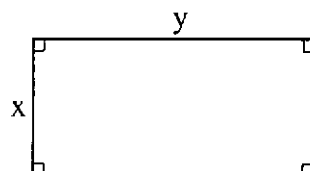
و مساحت مستطیل $S = xy$ است که در آن x و y هر دو متغیرند و با تغییر آن ها مقادیر متفاوتی برای S به دست می آید که ما به دنبال بیش ترین مقدار هستیم. از رابطه ی (۱)، y را بر حسب x در دستور $S = xy$ قرار می دهیم و رابطه ی جدید را به صورت زیر ساده می کنیم:

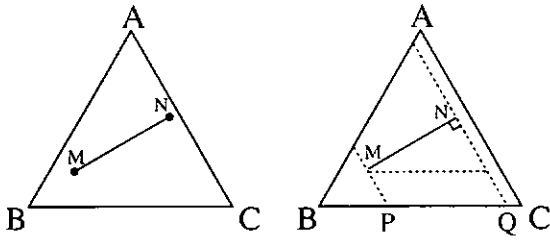
$$S = x\left(\frac{L}{2} - x\right) = \frac{Lx}{2} - x^2 = -\left(x^2 - \frac{L}{2}x\right) =$$

$$-\left[\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 - \frac{L^2}{16}\right] = \frac{L^2}{16} - \left(x - \frac{L}{4}\right)^2$$

و چون $\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 \geq 0$ است، بنابراین حداکثر مقدار S وقتی است که $\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 = 0$ باشد (چرا؟) و در نتیجه:

$S \leq \frac{L^2}{16}$. یعنی حداکثر مقدار S مساوی $\frac{L^2}{16}$ است و به ازای $x = y = \frac{L}{4}$ به دست می آید. پس باید مستطیل را به صورت





شکل ۱

شکل ۲

در نقاط M و N دو عمود بر MN رسم می‌کنیم. هر وضعی که داشته باشد، این دو عمود حداقل یکی از سه ضلع مثلث را در دو نقطه که هیچ کدام خارج از مثلث نیستند، قطع می‌کند. مثلاً در شکل ۲، نقاط P و Q روی BC و هیچ یک خارج از مثلث نیست. (علت این امر چیست؟) اکنون از M خط راستی به موازات همان ضلع (ضلع BC) رسم می‌کنیم تا NQ را در نقطه T قطع کند. حال واضح است که در مثلث قائم الزاویه MNT، وتر MT بلندترین ضلع است؛ یعنی $MT \geq MN$. و در متوازی الاضلاع MTQP، $MT = PQ$ و نیز $PQ \leq BC$. بنابراین: $MN \leq BC$ و اثبات حکم تمام است.

سؤال: بیشترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه که درون یاروی محیط یک مربع هستند، چیست؟ می‌توانید حدس خود را اثبات کنید؟
حال به سؤال دیگر از شاخه‌ای دیگر از ریاضیات توجه کنید:

عبارت جبری $x^5 + x + 1$ را به حاصل ضرب دو پرانتز تجزیه کرده‌ایم. کدام یک از عبارت‌های جبری زیر، معادل یکی از دو پرانتز است؟

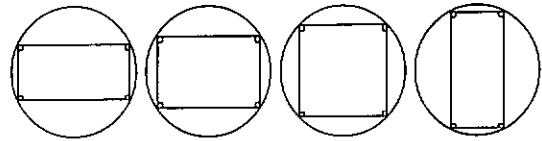
(۱) $x^2 + x + 1$ (۲) $x^2 + x + 1$

(۳) $x^2 - x + 1$ (۴) $x^5 + x + 1$

ابتدا بکوشید، با کمک درک شهودی خود گزینه‌ی درست را حدس بزنید. سپس این عبارت را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید و درستی یا نادرستی حدس خود را ببینید. چگونگی تجزیه‌ی این عبارت جبری در بسیاری از کتاب‌های کمک درسی موجود است، ولی به عنوان راهنمایی می‌گوییم: عوامل x^9 و x^8 و x^7 و x^6 و x^5 و x^4 و x^3 و x^2 و x و 1 را به عبارت فوق اضافه کنید و سپس با دسته‌بندی مناسب که شامل

قضیه را که یک قضیه در ریاضیات عالی است، اثبات کنید. ولی شهود شما به راحتی بر درستی آن گواهی می‌دهد. اکنون به این سؤالات پاسخ دهید:

- از بین تمام شکل‌های هندسی بسته با مساحت ثابت، کدام یک کمترین محیط را دارد؟
- با مقدار معینی ورقه‌ی کاغذ می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. اگر بخواهیم حجم این مکعب مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکل بسازیم؟
- از بین تمام شکل‌های فضایی بسته، با مساحت رویه‌ی ثابت، کدام یک بیشترین حجم ممکن را دارد؟
- از بین تمام مستطیل‌هایی که در یک دایره‌ی معین می‌توان محاط کرد، کدام یک بیشترین حجم ممکن را دارد؟ (به شکل‌های زیر دقت کنید.)



- از بین تمام مثلث‌هایی که در یک دایره می‌توان محاط کرد، کدام یک بیشترین مساحت ممکن را دارد؟
- از بین تمام مکعب مستطیل‌هایی که می‌توان در یک کره‌ی معین محاط کرد، کدام یک بیشترین حجم ممکن را دارد؟ اکنون به یک سؤال دیگر از هندسه پاسخ دهید: «درون یک مثلث متساوی الاضلاع (یاروی محیط آن) دو نقطه‌ی دلخواه M و N اختیار کنید. حداکثر فاصله‌ی دو نقطه (یعنی طول MN) چه قدر است؟» پاسخ این سؤال که دیگر کاملاً بدیهی است! حتی اگر از یک دانش‌آموز دوره‌ی ابتدایی (که با مفهوم مثلث و مثلث متساوی الاضلاع آشنا باشد) هم این سؤال را بپرسیم، احتمالاً پاسخ می‌دهد: «معلوم است! طول ضلع مثلث.» شما هم به طور یقین به سرعت همین پاسخ را می‌دهید. ولی اگر بخواهید آن را به طور دقیق اثبات کنید، چه می‌گویید؟ باز هم تجربه‌ی من می‌گوید، اکثر دانش‌آموزان به مشکل برمی‌خورند و فقط می‌گویند: بدیهی است! اما می‌دانیم که در ریاضیات هیچ چیز بدیهی نیست. و به خصوص مطلب بالا، کاملاً قابل اثبات است.
به شکل ۲ دقت کنید.

$(x^8 + x^9 + x^{10})$ و $(-x^8 - x^9 - x^{10})$... می شود و نیز فاکتورگیری، این عبارت را تجزیه کنید. آیا درک شهودی شما درست بوده است؟

آخرین مثال ما، مثالی ساده از نظریه ی اعداد است. احتمالاً از دوران ابتدایی به یاد دارید که شرط بخش پذیری یک عدد طبیعی بر عدد ۶ چیست؟ بله، درست است. هر عدد طبیعی که بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد، بر ۶ بخش پذیر است. آیا می توان این موضوع را تعمیم داد؟ شرط بخش پذیری یک عدد طبیعی بر ۱۵ چیست؟

باز هم حدس شما درست است: «هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۱۵ بخش پذیر است.»

حالا ادامه می دهیم: هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۷ بخش پذیر باشد، ... بله، درست است، بر ۲۱ بخش پذیر است و حتماً هر عدد طبیعی که بر ۴ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۲۰ بخش پذیر است. آری همه ی این نتیجه گیری ها درست هستند. اما حالا بگویید، آیا عددی که بر ۶ و ۴ بخش پذیر باشد، بر ۲۴ بخش پذیر است؟ با کمی اندیشه در می یابید که نه این طور نیست. مثلاً ۳۶ بر ۴ و ۶ بخش پذیر است، ولی بر ۲۴ بخش پذیر نیست. تفاوت این مورد با موارد قبلی چیست؟ اگر شهود خوبی داشته باشید، با کمی تفکر به این حکم کلی صحیح می رسید: «هر گاه a و b دو عدد صحیح و نسبت به هم اول (یعنی بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک آن ها مساوی ۱) باشند، عددی که بر هر دوی آن ها بخش پذیر باشد، بر حاصل ضرب آن ها نیز بخش پذیر است.»

اما اگر می خواهید اثبات دقیق این حدس شهودی را بدانید، ناگزیر باید تا دوره ی پیش دانشگاهی و مطالعه ی دقیق بحث نظریه ی اعداد صبر کنید.

* * *

اکنون این بحث را با دو پرسش اساسی و پاسخ آن ها به پایان می رسانیم. پرسش نخست این است: «آیا شهود افراد گوناگون، در زمان های متفاوت یکسان است؟»

پاسخ به وضوح منفی است. درست است که شهود نوعی درک غریزی است، اما درک غریزی افراد گوناگون، با سطح اطلاعات و دیدگاه های متفاوت، یکسان نیست. سال ها پیش از میلاد مسیح (ع) در یونان باستان، اکثر مردم به طور شهودی

احساس می کردند که زمین مرکز دنیاست و خورشید دور آن می گردد؛ زیرا آن ها به ظاهر می دیدند که هر روز خورشید از مشرق طلوع می کند و در مغرب فرو می رود و این خورشید است که می گردد! همچنین همه ی آن ها و نیز بسیاری از مردمان، تا قرن ها بعد (و در اروپا تا قرن شانزدهم میلادی) تصور می کردند زمین مسطح است و به دنبال یافتن پایان دنیا بودند!

البته در همان یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، مدور بودن و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن ها با شهود خود، تنها از آن جایی که دیده بودند، وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دور دست به ساحل نزدیک می شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه ی آن بر ساحل نشینان آشکار می شود، به این باور رسیده بودند.

پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح تحصیلات و حتی نوع کار آن ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت های چشمگیری دارد.

پرسش دوم این است که: «جایگاه شهود در استدلال و ریاضیات چیست؟» پاسخ این است: شهود ابزار مناسبی است برای درک موضوع از سوی دانش آموزان و نیز شروع مسأله و فهم آغازین آن برای پژوهشگران. اما هرگز نباید جانشین و جایگزین استدلال شود. بنابراین، استدلال شهودی پایه و اساس منطقی ندارد. تکیه ی بیش از حد بر شهود، به جای استدلال دقیق، دانش آموزان را از تفکر منطقی و اهمیت آن باز می دارد.

اما در عین حال استفاده ی به جا از شهود، ابزار مناسب و شایسته ای برای فهم مطلب است. برای مثال، در بحث حد و پیوستگی در کتاب حسابان سال سوم ریاضی، از شهود استفاده ی بسیار مناسبی شده است. یعنی فهم اولیه ی موضوع به جز این تقریباً ناممکن است. اما مفهوم دقیق و ریاضی حد و پیوستگی را دانش آموزان در کتاب «حساب و دیفرانسیل و انتگرال» دوره ی پیش دانشگاهی می آموزند.

در هر حال، نکته ی بسیار مهمی که هم دانش آموزان و هم معلمان رشته ی ریاضی باید به آن توجه اکید داشته باشند، این است که: «شهود ابزار درک است نه ابزار استدلال.»

زیرنویس

1. Isoperimetric Problem