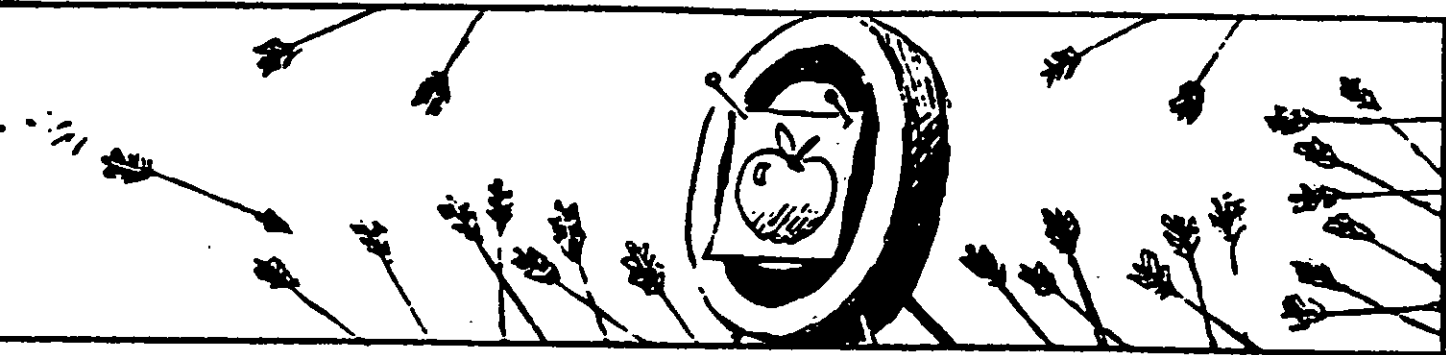




شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۶)

● پرویز شهریاری

§۳. روش ضریبهای نامعین

روش استفاده از ضریبهای نامعین، روشی ساده و در ضمن نیرومند، برای حل برخی از مسأله‌های مربوط به جبر محاسبه‌ای است. این روش را، به تقریب می‌توان این طور تعریف کرد: وقتی منظور از حل مسأله، یافتن یک چند جمله‌ای باشد، مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و چند جمله‌ای مورد نظر را (که با توجه به شرطهای مسأله از درجه آن آگاهییم)، با ضریبهای مجهول (نامعین) می‌نویسیم. سپس با انجام عملهای ناشی از شرطهای مسأله، خود را به دستگاهی از معادله‌ها می‌رسانیم، که مجهولهای آنها، همان ضریبهای نامعین باشند و سرانجام، با حل دستگاه (اگر شدنی باشد)، مقدار ضریبها و در نتیجه، چند جمله‌ای مورد نظر را می‌یابیم. با چند نمونه، با این روش آشنا می‌شویم و نقطه‌های قوت و ضعف آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. m را طوری پیدا کنید که معادله $x^3 + mx + \sqrt{2} = 0$ دارای یک ریشه مضاعف (یعنی دو ریشه برابر) باشد، و سپس، معادله را حل کنید. فرض می‌کنیم معادله را حل کرده‌ایم، ریشه مضاعف آن را α

و ریشه ساده آن را β می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$x^3 + mx + \sqrt{2} = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

این برابری یک اتحاد است (چرا؟)، و بنابراین، باید ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری با هم برابر باشند. سمت راست برابری را باز می‌کنیم:

$$x^3 + mx + \sqrt{2} = x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta$$

به این ترتیب، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = m \\ \alpha^2\beta = -\sqrt{2} \end{cases}$$

که دستگاهی است شامل سه معادله و سه مجهول α ، β و m . اگر بتوانیم این دستگاه را حل کنیم، نه تنها مقدار m ، که مقدار ریشه‌ها هم به دست می‌آید. مقدار $\beta = -2\alpha$ را به جای β در معادله سوم قرار می‌دهیم.

$$2\alpha^3 = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



باشد، در این صورت می‌توان آن را چنین نوشت :

$$f(x) = (x-a)^2 \varphi(x)$$

(a را ریشه مضاعف $f(x)$ گرفته‌ایم). اگر مشتق $f(x)$ را پیدا کنیم، به دست می‌آید :

$$f'(x) = (x-a)[2\varphi(x) + (x-a)^2 \varphi'(x)]$$

یعنی، عدد a، ریشه $f'(x)$ است. به طور کلی :

اگر عدد a، هم $f(x)$ و هم $f'(x)$ را برابر صفر کند، آن وقت a ریشه مضاعف $f(x)$ است.

برای این که معادله $x^3 + mx + \sqrt{2} = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، باید با مشتق خود، یعنی $3x^2 + m = 0$ ، ریشه مشترک داشته

باشد. این معادله دو ریشه دارد : $x_1 = \sqrt{-\frac{m}{3}}$ و

$x_2 = -\sqrt{-\frac{m}{3}}$. در این جا، در ضمن نتیجه می‌شود که m عددی

منفی است. یکی از دو مقدار x_1 یا x_2 (و مثلاً x_1) را، در معادله درجه سوم مفروض قرار می‌دهیم (در این جا، چه x_1 را در معادله قرار دهیم و چه x_2 را، در نتیجه کار تغییری حاصل نمی‌شود، آزمایش کنید.) توجه کنیم :

$$\left(\sqrt{-\frac{m}{3}}\right)^3 = \left|\frac{m}{3}\right| \sqrt{-\frac{m}{3}} = -\frac{m}{3} \sqrt{-\frac{m}{3}}$$

(زیرا $m < 0$) به دست می‌آید :

$$-\frac{m}{3} \sqrt{-\frac{m}{3}} + m \sqrt{-\frac{m}{3}} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}$$

مقدار m محاسبه شد. ولی کدام یک از دو عدد x_1 یا x_2 ریشه مضاعفند؟ اکنون معادله درجه سوم چنین است :

$$x^3 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} x + \sqrt{2} = 0 \quad (1)$$

با آزمایش معلوم می‌شود که تنها x_1 در این معادله صدق می‌کند و

با در دست داشتن مقدار α ، برابری $\beta = -2\alpha$ ، مقدار β را به ما می‌دهد : $\beta = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}$. اکنون، مقدار m، از معادله دوم دستگاه محاسبه می‌شود :

$$m = \alpha^2 + 2\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، هم مقدار m و هم مقدار ریشه‌ها به دست آمد و داریم :

$$x^3 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} x + \sqrt{2} = \left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

یادداشت: روش ضریبهای نامعین، روشی ساده است؛ ولی همیشه زیباترین راه حل را به ما نمی‌دهد. بجز این، همان طور که در مثالهای بعد خواهید دید، کار را به محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور می‌کشاند. بنابراین، از روش ضریبهای نامعین، هنگامی استفاده کنید که از یافتن راه حل بهتر و زیباتر در مانده باشید.

در همین مثال ۱، می‌توان روشهای دیگری برای حل انتخاب کرد. می‌دانیم، معادله درجه سوم به صورت $x^3 + px + q = 0$ ، وقتی و تنها وقتی، دو ریشه برابر دارد، که برای آن داشته باشیم :

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

در مسأله ما $p = m$ و $q = \sqrt{2}$ ؛ بنابراین باید داشته باشیم :

$$4m^3 + 27(\sqrt{2})^2 = 4m^3 + 54 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}$$

می‌بینید، اگر منظور از حل مسأله، تنها پیدا کردن مقدار m باشد، از این راه، خیلی سریعتر به دست می‌آید. ولی پس از به دست آمدن مقدار m، اگر نخواهیم از مفهوم مشتق استفاده کنیم، برای یافتن مقدار ریشه‌ها، دوباره باید به روش ضریبهای نامعین متوسل شویم.

ولی استفاده از مفهوم مشتق، کار را در همه موارد ساده‌تر می‌کند. فرض کنید $f(x)$ ، یک چند جمله‌ای با ریشه مضاعف

کرد. تیرمان به سنگ خورد و گرفتار دور باطل شدید.

راه دیگری را، برای جست و جوی ریشه ها، با روش ضریبهای نامعین آزمایش می کنیم. این اتحاد را در نظر می گیریم:

$$x^2 - vx + 2\sqrt{2} = \alpha(x+a)^2 + \beta(x+b)^2 \quad (3)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای α ، β ، a و b را پیدا کنیم، آن وقت، یکی از ریشه های معادله به دست می آید:

$$\alpha(x+a)^2 + \beta(x+b)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{a^2\sqrt{\alpha} + b^2\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \quad (4)$$

به یاری اتحاد (۳)، به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \\ a^2\alpha + b^2\beta = -\frac{v}{3} \\ a^3\alpha + b^3\beta = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

از دو معادله اول و دوم، دستگاه زیر به دست می آید:

$$\alpha = -\frac{b}{a-b}, \quad \beta = \frac{a}{a-b} \quad (5)$$

که اگر در دو معادله سوم و چهارم دستگاه قرار دهیم، بسادگی نتیجه می شود:

$$ab = \frac{v}{3}, \quad a+b = -\frac{6\sqrt{2}}{v}$$

بنابراین، a و b ، ریشه های این معادله درجه دوم هستند:

$$t^2 + \frac{6\sqrt{2}}{v}t + \frac{v}{3} = 0$$

این معادله، ریشه های حقیقی ندارد و ریشه های مختلط آن، به فرض $i = \sqrt{-1}$ ، چنین اند:

$$a = -\frac{3\sqrt{2}}{v} + \frac{1v}{v\sqrt{3}}i, \quad b = -\frac{3\sqrt{2}}{v} - \frac{1v}{v\sqrt{3}}i$$

با در دست داشتن a و b و استفاده از برابریهای (۵)، مقدارهای α و β هم به دست می آیند:

$$\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{34}i, \quad \beta = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{34}i$$

(ضمن محاسبه، i^2 را برابر -1 گرفته ایم). α ، β ، a و b به دست

$$x_1 = \sqrt{-\frac{m}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}}{3}} = +\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

معادله (۱) سه ریشه دارد، که دو ریشه آن برابر $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ است. ولی حاصل ضرب سه ریشه، با توجه به معادله (۱) در این مسأله برابر است با $-\sqrt[3]{2}$. پس

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x_3 = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x_3 = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow x_3 = -\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{4} = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

برای حل این مسأله، نه تنها توانستیم از روش ضریبهای نامعین استفاده کنیم؛ بلکه این روش، تا حدی برتری خود را نسبت به روشهای دیگر نشان داد؛ زیرا با روش ضریبهای نامعین، نه تنها مقدار m ، که مقدار هر یک از ریشه ها هم بسادگی به دست آمد. مثال ۲. این معادله درجه سوم را حل کنید:

$$x^3 - vx + 2\sqrt{2} = 0 \quad (1)$$

تلاش برای حل معادله: می دانیم، هر معادله درجه سوم، به شرط این که دارای ضریبهای حقیقی باشد، دست کم یک ریشه حقیقی دارد. بنابراین، به احتمال زیاد، نخستین اندیشه ای که به ذهن راه می یابد، این است که عبارت درجه سوم سمت چپ معادله (۱) را، به صورت ضرب یک عامل خطی در یک عامل درجه دوم درآوریم. اگر ریشه حقیقی معادله را α بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x^3 - vx + 2\sqrt{2} = (x-\alpha)(x^2 + ax + b) \quad (2)$$

که برای حل معادله (۱)، باید ضریبهای نامعین α ، a و b را پیدا کنیم. اگر در دو طرف اتحاد (۲)، ضرب توانهای مساوی را برابر قرار دهیم، به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} \alpha - a = 0 \\ a\alpha - b = v \\ \alpha b = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

از معادله اول، $\alpha = a$ را در معادله دوم قرار می دهیم، $b = a^2 - v$ به دست می آید. مقدارهای α و b را (که برحسب a در اختیار داریم)، در معادله سوم می گذاریم؛ به این معادله می رسم:

$$a(a^2 - v) + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a^3 - va + 2\sqrt{2} = 0$$

یعنی برای پیدا کردن مقدار a ، باید همان معادله (۱) را حل

و در نتیجه :

$$x_1 = -(a+b) = -2\sqrt{2}$$

می بیند چه نتیجه جالبی به دست آمد : عمل با عددهای مختلط

یاریمان کرد، تا ریشه حقیقی معادله را به دست آوریم.

اکنون دیگر می توانیم معادله (۱) را، به طور کامل حل کنیم.

سه جمله ای درجه سوم سمت چپ برابری در معادله (۱)، بر

$x + 2\sqrt{2}$ بخش پذیر است (زیرا به ازای این عدد برابر صفر می شود) و معادله (۱)، به این صورت درمی آید :

$$(x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) = 0 ;$$

$$x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} + 1, x_3 = \sqrt{2} - 1$$

سرانجام موفق شدیم. البته می توان حدس زد که این روش

هم، همیشه کارساز نیست، و از آن جا که اغلب منجر به محاسبه

روی عددهای مختلط می شود، ممکن است کار را دشوار کند :

ولی به هر حال، در بیشتر حالتها، از روش قبلی ساده تر است.

در مثال ۲، روی یک نمونه عددی، دو روش (که هر دو،

براساس استفاده از ضریبهای نامعین بود) آوردیم که برای حل هر

معادله درجه سوم، وقتی به صورت $x^3 + px + q = 0$ باشد، به

کار می روند. و این، البته به شرطی است که در عملهای مربوط به

عددهای مختلط تسلط یافته باشیم. ولی به هر حال، حل معادله

درجه سوم در حالتها کلی، طولانی است و به صرف وقت زیادی

نیاز دارد. در حالتها عددی، باید پیش از آزمایش روش استفاده

از ضریبهای نامعین، راه های دیگری را جست و جو کرد و تنها در

حالت ناجاری، به سراغ این روش رفت. همین معادله (۱) را

می توان با روش ساده تری حل کرد.

اگر معادله (۱) را، به صورت :

$$x^3 - (4 \times 2 - 1)x + 2\sqrt{2} = 0$$

بنویسیم و فرض کنیم $\sqrt{2} = a$ ، به این معادله پارامتری می رسیم :

$$x^3 - (4a^2 - 1)x + 2a = 0$$

معادله را نسبت به a ، منظم می کنیم، که معادله ای درجه دوم به دست

می آید :

$$4xa^2 - 2a - (x^3 + x) = 0$$

و بسادگی قابل حل است و مقدارهای a ، برحسب x ، چنین

می شوند :

$$a_1 = -\frac{x}{2}, a_2 = \frac{1+x^2}{2x}$$

آمدند ؛ بنابراین، مقدار x ، از رابطه (۴) محاسبه می شود ؛ ولی

اجازه بدهید ادامه ندهیم. برای محاسبه x ، باید $\sqrt[3]{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta}$ را

پیدا کرد، و برای این منظور، به محاسبه های خسته کننده روی

عددهای مختلط نیاز داریم.

در این راه، گرچه مقدار ضریبهای نامعین به دست آمد ؛ ولی

دشواری و طولانی بودن محاسبه های بعدی، ما را از ادامه کار

بازداشت. البته، حالتها ای از معادله درجه سوم وجود دارد، که

همین روش می تواند ما را به جواب برساند ؛ بدون این که گرفتار

محاسبه های ملال آور بشویم. ولی به طور معمول، این روش استفاده

از ضریبهای نامعین، کار را به دشواری می کشاند.

به جست و جوی خود ادامه می دهیم. اتحاد زیر را می شناسیم :

$$x^3 + a^3 + b^3 - 3abx =$$

$$(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

اکنون، این اتحاد را در نظر می گیریم :

$$x^3 - 7x + 2\sqrt{2} = x^3 - 3abx + a^3 + b^3 \quad (6)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای a و b را بیابیم، آن وقت

روشن است، که یکی از ریشه های معادله (۱)، برابر $x = -(a+b)$

خواهد بود.

با توجه به اتحاد (۶)، به این دستگاه می رسیم :

$$\begin{cases} 3ab = 7 \\ a^3 + b^3 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 b^3 = \frac{343}{27} \\ a^3 + b^3 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین، a^3 و b^3 ، ریشه های این معادله درجه دوم هستند :

$$t^2 - 2\sqrt{2}t + \frac{343}{27} = 0$$

که ریشه های آن، عددهایی مختلطند. با فرض $i = \sqrt{-1}$ ، به دست

می آید :

$$a^3 = \sqrt{2} + \frac{17}{3\sqrt{3}}i, b^3 = \sqrt{2} - \frac{17}{3\sqrt{3}}i$$

در این جا، با اندکی کاوش به دست می آید :

$$\sqrt{2} \pm \frac{17}{3\sqrt{3}}i = (\sqrt{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i)^3$$

بنابراین :

$$a = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}i, b = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

الف) در این حالت، باید داشته باشیم:

$$2x^4 + 3x^2y + nx^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = \\ = (x+y)(2x^3 + mx^2y + mxy^2 + 2y^3)$$

(چون عبارت درون پرانتز دوم، باید نسبت به x و y متقارن باشد، ضریبهای x^2y و xy^2 را یکسان در نظر گرفته ایم؛ با وجود این، اگر هم ضریبها را یکی m و دیگری p در نظر می‌گیریم، نتیجه درست به دست می‌آید). بسادگی و با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، مقدارهای m و n به دست می‌آیند:

$$m=1, n=2$$

که در نتیجه، $f(x,y)$ ، به این صورت قابل تجزیه است:

$$f(x,y) = (x+y)(2x^3 + x^2y + xy^2 + 2y^3)$$

ب) در این حالت، باید داشته باشیم:

$$2x^4 + 3x^2y + nx^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = \\ = (x^2 + \alpha xy + y^2)(2x^2 + \beta xy + 2y^2)$$

با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta + 4 = n \end{cases}$$

اگر β را بین این دو معادله حذف کنیم، می‌توانیم α را برحسب n محاسبه کنیم:

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{41 - 8n}}{4}$$

α عددی حقیقی و درست است، پس $0 < n \leq \frac{41}{8}$. پس n یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ است (بنابر شرط مسأله، n عددی طبیعی است). به ازای $n=1$ و $n=3$ ، برای α ، عددی گویا به دست نمی‌آید و برای بقیه مقدارهای n داریم:

$$n=2 \Rightarrow \alpha=2, \beta=-1;$$

$$n=4 \Rightarrow \alpha=0, \beta=3;$$

$$n=5 \Rightarrow \alpha=1, \beta=1$$

(جوابهای غیر درست α و β را کنار گذاشته‌ایم). در نتیجه، یکی از سه تجزیه زیر، برای $f(x,y)$ ، به دست می‌آید:

$$f(x,y) = (x^2 + 2x + y^2)(2x^2 - xy + 2y^2),$$

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)(2x^2 + 3xy + 2y^2),$$

اکنون، اگر دوباره به جای a ، مقدارش $\sqrt{2}$ را قرار دهیم، برای ریشه‌های معادله (۱)، به این دو معادله می‌رسیم:

$$x + 2\sqrt{2} = 0, \quad x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

که از آنها، همان جوابهای قبلی به دست می‌آید.

معادله (۱) را، با راه ساده‌تری می‌توان حل کرد و برای حل آن، نیازی به این همه تلاش نبود. اگر در این جا، حل آن را با شیوه‌های مختلف مورد آزمایش قرار دادیم، تنها به این دلیل بود که راه‌های کاربرد روش ضریبهای نامعین را نشان دهیم.

عبارت سمت چپ معادله (۱)، بسادگی قابل تجزیه است:

$$x^3 - 7x + 2\sqrt{2} = x(x^2 - 8) + (x + 2\sqrt{2}) = \\ = x(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) + (x + 2\sqrt{2}) = \\ = (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)$$

که بسادگی، ریشه‌های آن به دست می‌آیند.

اکنون به نمونه مثالی می‌پردازیم که، به احتمال زیاد، بدون استفاده از روش ضریبهای نامعین، قابل حل نیست.

مثال ۳. عدد طبیعی n را طوری بیابید که چند جمله‌ای

$$f(x,y) = 2x^4 + 4x^2y + nx^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4$$

به ضرب دو چند جمله‌ای با ضریبهای درست، قابل تجزیه باشد.

در آغاز یادآوری می‌کنیم که: $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن است؛ یعنی، اگر در آن، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، تغییر نمی‌کند. بنابراین، اگر داشته باشیم:

$$f(x,y) = f_1(x,y).f_2(x,y)$$

ممکن است یکی از دو حالت پیش آید:

(۱) هر یک از چندجمله‌ایهای $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ نسبت به x و y متقارن هستند؛

(۲) در تبدیل x به y و y به x ، چندجمله‌ای f_1 به f_2 و چندجمله‌ای f_2 به f_1 تبدیل می‌شوند؛ یعنی

$$f_1(y,x) = f_2(x,y), \quad f_2(y,x) = f_1(x,y)$$

که در این صورت، f_1f_2 نسبت به x و y متقارن خواهد شد. مسأله را، در هر یک از این دو حالت، به طور جداگانه حل می‌کنیم.

(۱) در این حالت، دو صورت مختلف ممکن است: الف) f_1 یک دوجمله‌ای درجه اول است؛ ب) f_1 ، یک سه جمله‌ای درجه دوم است.

خطی سه مجهولی (از همان نوع)، دست کم شش دقیقه وقت لازم است.

استفاده کورکورانه از روش ضریبهای نامعین، در بسیاری حالتها، ما را به دستگاه‌های بزرگی می‌رساند، که گرچه راه حل آن روشن است، در عمل نمی‌تواند به نتیجه برسد. اگر محاسبه‌ها با دست (و نه ماشین محاسبه) انجام شود، همیشه احتمال اشتباه وجود دارد و بازیابی اشتباه‌ها، به همان اندازه حل دستگاه، وقت می‌گیرد.

روش ضریبهای نامعین، تا حد زیادی ما را قانع می‌کند که مسأله قابل حل است. ولی اگر با دستگاه‌های بزرگ سروکار پیدا کردیم، یا با دستگاهی روبه‌رو شدیم که شامل معادله‌های غیرخطی است و امکان حل آن در اختیار ما نیست و یا سرانجام، اگر با محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور روبه‌رو شویم (راه حل اول مثال (۲) را ببینید)، باید در جست‌وجوی راه حل دیگری برای مسأله باشیم.

دربارۀ مسأله مثال ۴، می‌توان با انتخاب تنها یک ضریب نامعین، مسأله را حل کرد. اگر عبارت درجه چهارم

$$a(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

را در نظر بگیریم، بر هر یک از دوجمله‌ایهای $x+1$ ، $x-1$ ، $x+2$ و $x-3$ بخش‌پذیر است. بنابراین، عبارت درجه چهارم

$$f(x) = a(x-1)(x+1)(x+2)(x-3) - 12$$

در تقسیم بر هر یک از این دوجمله‌ایها، به باقی مانده‌ای برابر ۱۲- می‌رسد؛ یعنی $f(x)$ ، همان چندجمله‌ای درجه چهارم مورد نظر مسأله است که تنها یک ضریب نامعین (a) دارد. برای یافتن مقدار a ، از شرط $f(2) = 0$ استفاده می‌کنیم که، از آن جا، بسادگی به دست می‌آید:

$$-12a - 12 = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین، چندجمله‌ای درجه چهارم مطلوب، به این صورت است:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-1)(x+1)(x+2)(x-3) = \\ &= -x^4 + x^2 + 7x - x - 18 \end{aligned}$$

مثال ۵. چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه پنجم را بیابید، به

شرطی که $f(x) + 2$ بر $(x+2)^3$ و $f(x) - 2$ بر $(x-2)^3$ بخش‌پذیر باشد.

اگر چشم بسته، چندجمله‌ای درجه پنجم $f(x)$ را به صورت:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

در نظر بگیریم، پس از ماجراهایی (که خود به اندازه کافی

$$f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(2x^2 + xy + 2y^2)$$

(۲) در این حالت، باید داشته باشیم:

$$2x^4 + 3x^2y + nx^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 =$$

$$= (2x^2 + axy + y^2)(x^2 + axy + 2y^2)$$

که از آن، مقدارهای a و n ، بسادگی به دست می‌آیند:

$$a = 1, n = 6$$

که تجزیه $f(x, y)$ به این صورت درمی‌آید:

$$f(x, y) = (2x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 2y^2)$$

به این ترتیب، چندجمله‌ای $f(x, y)$ ، به ازای $n = 2$ ، $n = 4$ ،

$n = 6$ و قابل تجزیه به ضرب دو چندجمله‌ای با ضریبهای درست است.



ضمن استفاده از روش ضریبهای نامعین، باید هوشیار بود و تا جایی که شدنی است، از ضریبهای مجهول کمتری استفاده کرد. به این مثال توجه کنید:

مثال ۴. چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه چهارم را طوری پیدا کنید، که بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد و ضمن تقسیم بر هر یک از دوجمله‌ایهای $x-1$ ، $x+1$ ، $x+2$ و $x-3$ ، باقیمانده‌ای برابر ۱۲- پیدا کند.

چندجمله‌ای درجه چهارم را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

با توجه به شرطهای مسأله، باید داشته باشیم:

$$f(2) = 0, f(1) = f(-1) = f(-2) = f(3) = -12$$

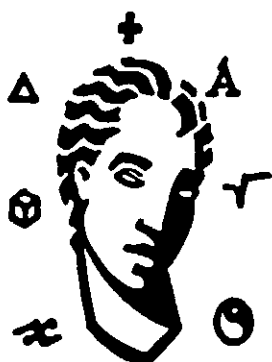
که در نتیجه، به دستگاهی شامل پنج معادله پنج مجهولی می‌رسیم:

$$\begin{cases} 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \\ a + b + c + d + e = -12 \\ a - b + c - d + e = -12 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = -12 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = -12 \end{cases}$$

حل این دستگاه دشوار نیست، ولی محاسبه‌های طولانی و خسته‌کننده‌ای را می‌طلبد. در دستگاه‌های خطی، هر چه تعداد معادله‌ها بیشتر شود، میزان وقت لازم برای حل آنها، سرعت بالا می‌رود. مثلاً اگر برای حل یک دستگاه شامل دو معادله خطی، تنها دو دقیقه وقت لازم باشد، برای حل یک دستگاه سه معادله

بخش پذیر است.

این مسأله، با اندکی دقت، به مسأله‌ای شبیه مسأله قبل تبدیل می‌شود. $f(x+2)-2$ بر $(x-2)^2$ بخش پذیر است. اگر $x-2=y$ بگیریم، آن وقت به معنای آن است که $f(y)-2$ بر $(y-4)^2$ ، یعنی $f(x)-2$ بر $(x-4)^2$ بخش پذیر است. همچنین، از شرط دوم مسأله نتیجه می‌شود که $f(x)+2$ بر $(x+4)^2$ بخش پذیر است. دنباله حل شبیه حل مثال ۵ است.



تفریح اندیشه ۱

۶	۶	۶	۶	= ۵
۶	۶	۶	۶	= ۶
۶	۶	۶	۶	= ۸
۶	۶	۶	= ۱۳۰	
۶	۶	۶	= ۲۱۴	
۶	۶	۶	= ۱۴۸	
۶	۶	۶	= ۶۶	
۶	۶	۶	= ۱۸۰	

در هر سطر، چگونه می‌توان تساوی را با قرار دادن علامتهای

+، -، ×، و () بین رقمهای ۶، برقرار ساخت؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

ملال آورند)، به دستگاهی از شش معادله خطی شش مجهولی می‌رسیم که، حل آن، به محاسبه‌ای سنگین و خسته کننده نیاز دارد.

ولی اگر از مفهوم مشتق و سپس، تابع اولیه استفاده کنیم، یک چند جمله‌ای درجه پنجم با دو ضریب نامعین به دست می‌آید. وقتی $f(x)+2$ بر $(x+2)^2$ بخش پذیر باشد، مشتق آن، یعنی $f'(x)$ ، بر $(x+2)^2$ بخش پذیر است. همچنین، از آن جا که $f(x)-2$ بر $(x-2)^2$ بخش پذیر است، $f'(x)$ بر $(x-2)^2$ بخش پذیر می‌شود. به این ترتیب، $f'(x)$ بر $(x+2)^2$ و بر $(x-2)^2$ ، یعنی بر حاصل ضرب آنها $(x^2-4)^2$ بخش پذیر است $(x+2)$ و $x-2$ نسبت به هم اولند. در نتیجه $f'(x)$ به این صورت است:

$$f'(x) = a(x^4 - 8x^2 + 16)$$

چون $f(x)$ از درجه پنجم است، مشتق آن از درجه چهارم درمی‌آید. اکنون، برای پیدا کردن $f(x)$ ، باید تابع اولیه $f'(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int a(x^4 - 8x^2 + 16)dx = \\ &= a\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right) + b \end{aligned}$$

(b مقداری است ثابت). می‌بینیم برای $f(x)$ ، تنها دو ضریب نامعین وجود دارد: a و b .

برای پیدا کردن a و b ، از این دو شرط استفاده می‌کنیم:

$$f(-2)+2=0, \quad f(2)-2=0$$

در نتیجه، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} a\left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) + b + 2 = 0 \\ a\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + b - 2 = 0 \end{cases}$$

از مجموع این دو معادله، به دست می‌آید: $b=0$ ، سپس، از

معادله دوم، مقدار a محاسبه می‌شود: $a = \frac{15}{128}$. از آن جا:

$$f(x) = \frac{1}{128}(3x^5 - 40x^3 + 240x)$$

مثال ۶. $f(x)$ از درجه پنجم را بیابید؛ به شرطی که بدانیم

$f(x+2)-2$ بر $(x-2)^2$ و $f(x-2)+2$ بر $(x+2)^2$