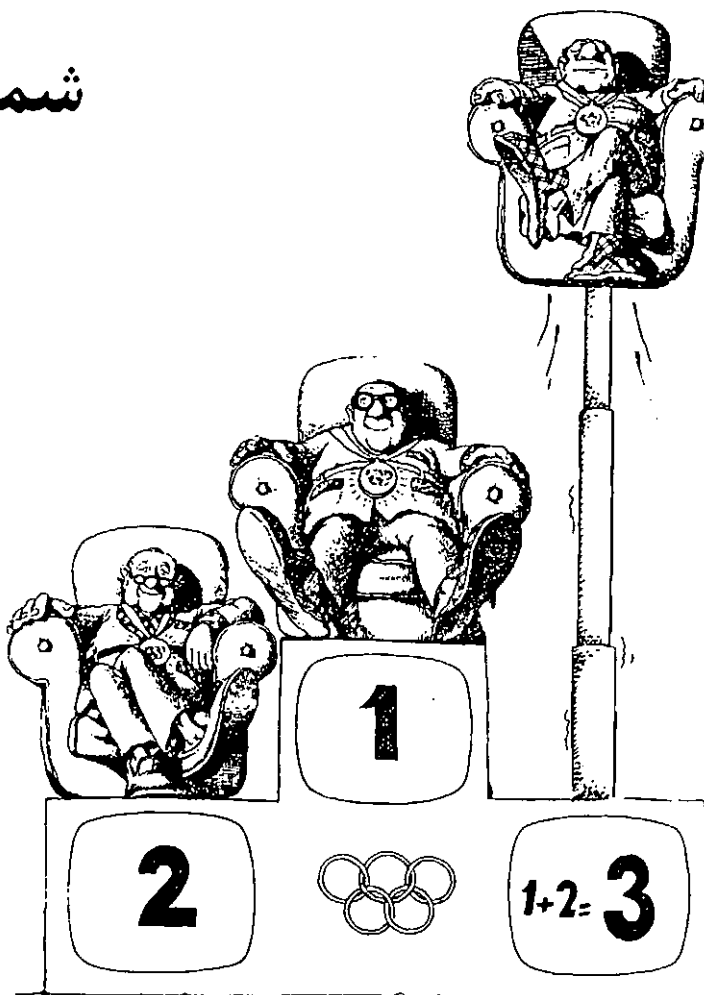


شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۵)

• پرویز شهریاری



۲.۵. روش برهان خلف

مثال ۱: می‌دانیم هریک از عددهای طبیعی a, b, c و d بر عدد طبیعی $ab - cd$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید:

$$ab - cd = 1$$

گزاره را نادرست می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$ab - cd = m \neq 1$$

پس، با توجه به فرض مسأله، هریک از عددهای a, b, c و d بر m بخش‌پذیرند. وقتی دو عدد a و b بر m بخش‌پذیر باشند، آن وقت ab بر m^2 بخش‌پذیر می‌شود؛ به همین ترتیب، cd هم بر m^2 بخش‌پذیر خواهد بود، پس تفاضل آنها، یعنی $ab - cd$ ، یعنی m هم باید بر m^2 بخش‌پذیر باشد و این ممکن نیست؛ مگر m برابر ۱ یا -۱ باشد. ولی بنا بر صورت مسأله، $ab - cd$ ، یعنی m عددی طبیعی است. به این ترتیب، با فرض $ab - cd \neq 1$ ، نتیجه گرفتیم:

$$ab - cd = 1$$

در طول تاریخ، تعریفهای دیگری هم از برهان خلف شده است:

«اگر B درست باشد و درضمن، از درستی A ، نادرستی B

نتیجه شود، به معنای نادرستی A است.»

«برهان خلف» یکی از روشهای جالب برای اثبات قضیه‌ها در جبر و هندسه است. در برهان خلف، به جای این که درستی یک گزاره را به طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با نپذیرفتن درستی گزاره، به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم. به زبان مثال، برای اثبات برابری دو عدد a و b ، ثابت می‌کنیم: a از b بزرگتر یا کوچکتر نیست. اصطلاح برهان خلف، ترجمه‌ای از واژه لاتینی *Reduction ad absurdum*، به معنای «اثبات از جهت مخالف» یا «اثبات از راه رد کردن حکم مخالف» است.

تا آنجا که می‌دانیم، «اقلیدس» نخستین کسی بود که از «برهان خلف» در کتاب مشهور خود به نام «مقدمات» استفاده کرد. او آن را «معنای برهان خلف» می‌نامید و درباره آن می‌گفت: «گزاره A را می‌توان ثابت شده دانست، وقتی که آن را نادرست بدانیم، باز هم درستی A را نتیجه می‌دهد.» برای بیان اقلیدس درباره برهان خلف، مثال ساده‌ای می‌آوریم.

همیشه برقرار است :

$$\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

فرض می کنیم، این نابرابری درست نباشد و داشته باشیم :

$$\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} < \sqrt[3]{abc}$$

در این صورت، به طور طبیعی، هر بخشی از سمت چپ نابرابری، از سمت راست آن کوچکتر می شود :

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{abc}, \sqrt[4]{b} < \sqrt[3]{abc}, \sqrt[4]{c} < \sqrt[3]{abc}$$

این سه نابرابری را می توان این طور نوشت (توجه کنیم در هریک از نابرابریها، هر دو طرف مقادارهایی مثبتند) :

$$a^{1/6} < abc, b^{1/6} < (abc)^2, c^{1/6} < (abc)^{12}$$

از ضرب این نابرابریها در یکدیگر به دست می آید :

$$a^{1/6} b^{1/6} c^{1/6} < (abc)^{16} \Rightarrow abc < abc$$

و این، یک حقیقت روشن را نقض می کند.

مثال ۴: یک تکه سیم به طول ۲ متر را به پنج بخش طوری تقسیم کرده ایم که، کمترین مقدار طول هر بخش برابر ۱۷ سانتیمتر باشد، ثابت کنید می توان از این پنج بخش، سه بخش را انتخاب کرد که بشود با آنها یک مثلث ساخت.

پنج بخش سیم را، با طولهای x, y, z, t, s می گیریم و فرض می کنیم :

$$x \leq y \leq z \leq t \leq s$$

اگر با هیچ سه بخشی نتوان یک مثلث ساخت، باید داشته باشیم :

$$z \geq x + y, t \geq y + z, s \geq z + t$$

نابرابری $t \geq y + z$ را با توجه به نابرابری $y \leq x + y$ ، می توان چنین نوشت :

$$t \geq y + (x + y) = x + 2y$$

و برای نابرابری $s \geq z + t$:

$$s \geq z + t \geq (x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y$$

اکنون سه نابرابری داریم :

$$\begin{cases} z \geq x + y \\ t \geq x + 2y \\ s \geq 2x + 3y \end{cases}$$

این سه نابرابری را با هم جمع و به دو طرف نابرابری حاصل،

مثال ۲: عده ای از دانش آموزان یک دبیرستان، در یک مسابقه

شطرنج انفرادی شرکت کردند. هر دانش آموز با هریک از دانش آموزان دیگر شرکت کننده، تنها یک بار بازی کرد. در هر بازی به برنده، یک امتیاز مثبت و به بازنده یک امتیاز منفی دادند. اگر بازی برنده نداشت، یعنی به تساوی می انجامید، امتیازی داده نمی شد. در این مسابقه، یکی از شرکت کنندگان ۱۳ امتیاز و دیگری ۸ امتیاز آورد. ثابت کنید، در بین بازیهای که انجام شده است، دست کم یک بازی، به تساوی رسیده است.

درستی این گزاره روشن است : «هیچ عدد فردی، زوج و هیچ عدد زوجی، فرد نیست.» (گزاره B)

اکنون فرض می کنیم : «در این مسابقه شطرنج، تساوی وجود نداشته است.» (گزاره A)

ببینیم از گزاره A چه نتیجه ای به دست می آید؟ هریک از شرکت کنندگان در مسابقه، در هر بازی، یکی از دو امتیاز +۱ یا -۱ را گرفته است. اگر تعداد دانش آموزان، عددی فرد باشد، هر دانش آموز، به تعداد زوج، امتیاز +۱ یا -۱ گرفته است. (چون دانش آموز با خودش بازی نمی کند و تعداد بقیه دانش آموزان، عددی زوج است) پس مجموع امتیازهای هریک از دانش آموزان، باید عددی زوج باشد. به همین ترتیب، اگر تعداد کل دانش آموزان شرکت کننده، عددی زوج باشد، جمع امتیازهای هر دانش آموز، عددی فرد می شود (به شرطی که در مسابقه، تساوی نداشته باشیم). در صورت مسأله گفته شده است، یکی از دانش آموزان ۱۳ امتیاز آورده است، بنابراین اگر همه بازیها، همراه با برد و باخت باشد، باید تعداد دانش آموزان شرکت کننده در مسابقه، عددی زوج باشد ؛ ولی چون دانش آموز دیگری ۸ امتیاز آورده است، باید تعداد دانش آموزان شرکت کننده، عددی فرد باشد، یعنی باید (تعداد دانش آموزان) هم زوج و هم فرد باشد. با فرض درستی A، به نتیجه نادرستی B رسیدیم. پس A نادرست است یعنی در مسابقه تساوی وجود داشته است.

و تعریفی دیگر، برای «برهان خلف» :

«اگر گزاره A را نپذیریم و به تناقض برخورد کنیم، به این معناست که باید A را بپذیریم.»

منظور از پدیده آمدن تناقض، این است که : نتیجه حاصل، حقیقت روشنی را نقض کند (مثلاً به دست آید $3=4$) و یا منجر به نقض فرض مسأله بشود.

مثال ۳: a, b, c عددهایی حقیقی اند. ثابت کنید، این نابرابری

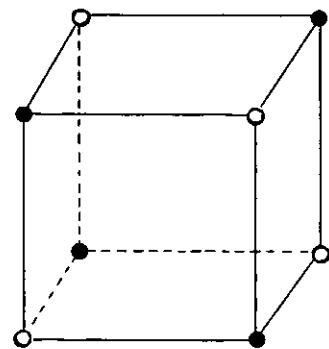
$x+y$ را اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x+y+z+t+s \geq 5x+7y$$

و چون طول هر بخش سیم از ۱۷ سانتیمتر کمتر نیست، پس:

$$x+y+z+t+s \geq 5 \times 17 + 7 \times 17 = 204$$

که فرض مسأله را نقض می‌کند (در صورت مسأله گفته‌اند، طول تکه سیم اصلی ۲ متر (۲۰۰ سانتیمتر) است؛ در حالی که در این جا، طول مجموع پنج بخش، نمی‌تواند از ۲۰۴ سانتیمتر کمتر باشد).



(شکل ۱)

مثال ۵: یک هشت ضلعی فضایی (یا یک خط شکسته بسته در فضا) چنان است که ضلعهای غیرمجاور آن یکدیگر را قطع نمی‌کنند (خط شکسته با خودش برخورد ندارد) و در ضمن، هشت رأس آن، بر رأسهای یک مکعب منطبقند. ثابت کنید دست کم یکی از ضلعهای هشت ضلعی، بر یکی از یالهای مکعب قرار دارد. فرض می‌کنیم این طور نباشد و هیچ ضلعی از هشت ضلعی فضایی، روی یالی از مکعب قرار نگیرد. رأسهای مکعب را به رنگهای سیاه و سفید، طوری درمی‌آوریم که هیچ رأسی، با رأس مجاورش، به یک رنگ نباشد (شبیه شکل ۱). هر ضلع هشت ضلعی، برای این که روی یال مکعب نباشد، باید دو رأس با رنگهای مختلف را به هم وصل کرده باشد؛ یعنی روی یکی از قطرهای یک وجه مکعب یا روی یکی از قطرهای خود مکعب قرار گیرد. مکعب دارای شش وجه است و در هر وجه، تنها یکی از قطرها را می‌توان برای ضلع هشت ضلعی در نظر گرفت (زیرا دو قطر هر وجه، یکدیگر را قطع می‌کنند). همچنین از بین چهار قطر مکعب، تنها یکی می‌تواند به عنوان ضلع هشت ضلعی انتخاب شود (زیرا قطرهای مکعب یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند).

بنابراین شش ضلع هشت ضلعی روی شش وجه (در امتداد یک قطر از هر وجه) و یک ضلع هم روی یکی از قطرهای مکعب قرار می‌گیرد و اگر ضلع هشتم را روی یکی دیگر از قطرهای مکعب یا روی یکی از قطرهای دوم یکی از وجههای مکعب انتخاب کنیم، دو ضلع هشت ضلعی، یکدیگر را قطع می‌کنند، که مخالف فرض مسأله است.

یادداشت: مسأله، در محدوده آنچه خواسته شده بود، حل شد؛ ولی به این پرسش پاسخ داده نشد که: آیا می‌توان این هشت ضلعی را طوری رسم کرد که تنها یکی از ضلعهای آن، بر یک یال مکعب قرار گیرد؟ در این باره آزمایش کنید و اگر پاسخ به این پرسش ممکن است، نمونه‌ای از چنین هشت ضلعی را پیدا کنید.

به ذکر مثال ادامه می‌دهیم و نمونه‌های دیگری از کاربرد «برهان خلف» را می‌آوریم. ولی پیش از آن، به مناسبت یادداشتی که برای مثال ۵ آوردیم، مثال دیگری هم می‌آوریم تا محدوده کاربرد «برهان خلف» روشنتر شود. در هر حال، باید دقت کنیم به طور دقیق، چه نتیجه یا نتیجه‌هایی از استدلال ما، که بر پایه برهان خلف انجام گرفته است، به دست می‌آید و چه نتیجه‌هایی به دست نمی‌آید.

مثال ۶: دنباله نامتناهی (a_k) ، که همه جمله‌های آن، عددهایی مثبتند، چنان است که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$(a_{k+1} + k)a_k = 1 \quad (1)$$

ثابت کنید همه عددهای این دنباله، عددهایی گنگ هستند.

فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله، عددی گویا و به

صورت $a_k = \frac{p}{q}$ باشد، که در آن، p و q را، عددهایی طبیعی

گرفته‌ایم. با توجه به برابری (۱) می‌توان مقدار جمله بعدی را به دست آورد:

$$a_{k+1} = \frac{1}{a_k} - k = \frac{q}{p} - k = \frac{q - pk}{p}$$

مجموع عددهای صورت و مخرج، در a_k برابر $p+q$ و در a_{k+1} برابر $p+q-pk$ است؛ یعنی این مجموع، در a_{k+1} کمتر از آن در a_k است و بنابراین بعد از چندگام، به جایی می‌رسیم که یکی از دو جمله صورت یا مخرج، عددی منفی می‌شود و فرض را که باید همه جمله‌ها مثبت باشند، نقض می‌کند. این تناقض ثابت می‌کند که در این دنباله، جمله گویا وجود ندارد.

بنابراین $|AM| \cdot |FM| = |CM| \cdot |DM|$ ؛ یعنی

$$|AM| \cdot |FM| > |CN| \cdot |DP| \quad (۱)$$

به همین ترتیب، می توان دو نابرابری دیگر به دست آورد:

$$|DP| \cdot |EP| > |AM| \cdot |BN| \quad (۲)$$

$$|BN| \cdot |CN| > |FM| \cdot |EP| \quad (۳)$$

اگر سه نابرابری (۱)، (۲) و (۳) را در هم ضرب کنیم، پس از حذف عاملهای مساوی از دو طرف نابرابری حاصل به نابرابری ناممکن $۱ > ۱$ می رسیم. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

مثال ۸: سه زیر مجموعه جدا از هم A ، B و C را از مجموعه عددهای طبیعی جدا کرده ایم؛ به نحوی که هر عدد طبیعی، در یکی و تنها یکی از سه زیر مجموعه باشد، ثابت کنید می توان دو عدد طبیعی a و b را از دو زیر مجموعه مختلف انتخاب کرد؛ به نحوی که مجموع آنها، یعنی $a+b$ عضو زیر مجموعه سوم نباشد. فرض می کنیم چنین نباشد؛ یعنی مجموع هر دو عضو از دو مجموعه A ، B و C ، عضوی از مجموعه سوم باشد. دو عدد طبیعی پشت سر هم، مثل a و b را در نظر می گیریم بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه ای وارد شود، می توان a را عددی زوج و عضو A و b را عددی فرد و عضو B در نظر گرفت. بنابه فرضی که کرده ایم، باید $a+b$ ، عضو C باشد. به همین ترتیب:

$$(a+b)+b = a+2b \in A;$$

$$a+2b \in C; a+2b \in A; \dots; a+2kb \in A;$$

$$a+(2k+1)b \in C; (a+b)+a = 2a+b \in B;$$

$$3a+b \in C; \dots;$$

$$\dots 2ka+b \in B; (2k+1)a+b \in C; \dots$$

اکنون عدد $ab+a+b$ را در نظر می گیریم، a عددی زوج و عددی فرد است، پس:

$$ab+(a+b) = a+(2m+1)b \in C$$

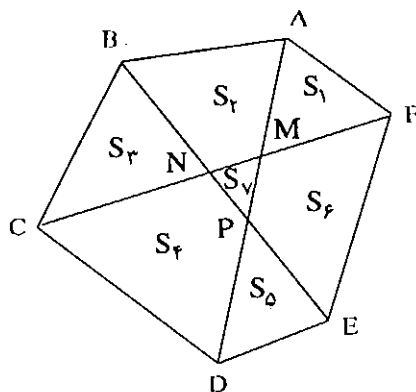
$$ab+(a+b) = (a+1)b+a = (2m+1)b+a \in C$$

$$ab+(a+b) = (b+1)a+b = 2ka+b \in B$$

عدد $ab+a+b$ هم عضو زیرمجموعه C و هم عضو زیرمجموعه B درآمد که فرض مسأله را نقض می کند، که به معنای درستی حکم مسأله است.

توجه کنید ما ثابت کردیم دنباله ای که برای آن، دستور (۱) برقرار باشد، نمی تواند جمله گویا داشته باشد؛ ولی ثابت نکردیم چنین دنباله ای با جمله های گنگ وجود دارد. خودتان در این باره ببینید. آیا چنین دنباله ای وجود دارد؟ و روشن است برای پاسخ مثبت یا منفی به این پرسش، استدلال ریاضی لازم است. البته اگر بتوان یک نمونه عددی برای چنین دنباله ای پیدا کرد، کافی است تا حکم کنیم، چنین دنباله ای وجود دارد. ولی آیا می توانید چنین نمونه ای را پیدا کنید؟

مثال ۷: در یک شش ضلعی کوژ (محدب) که بریک صفحه قرار دارد، هر یک از سه قطر بزرگتر شش ضلعی را به دو بخش با مساحت های برابر تقسیم می کند. ثابت کنید این سه قطر بزرگتر، از یک نقطه می گذرند.



(شکل ۲)

فرض می کنیم، قطرهای بزرگتر شش ضلعی، در یک نقطه به هم نرسیده و از برخورد با یکدیگر، مثلث MNP را به وجود آورده باشند (شکل ۲). مساحت بخش هایی از شش ضلعی را که به وسیله این سه قطر پدید آمده اند، طبق شکل (۲) نامگذاری می کنیم. چون هر یک از دو قطر AD و CF ، شش ضلعی را به دو بخش با مساحت های برابر تقسیم می کنند، باید داشته باشیم:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 + S_7$$

$$S_1 + S_5 + S_6 = S_2 + S_3 + S_4 + S_7$$

اگر این دو برابری را با هم جمع کنیم و سپس از جمله های مساوی، در دو طرف برابری صرف نظر کنیم، سرانجام به این برابری می رسیم:

$$S_1 = S_4 + S_7$$

یعنی دو مثلث AMF و CMD ، مساحت هایی برابر دارند و از طرف دیگر:

$$2S_{AMF} = |AM| \cdot |FM| \cdot \sin \hat{M}; 2S_{CMD} = |CM| \cdot |DM| \cdot \sin \hat{M}$$

که باز هم با توجه به $pq = 3$ ، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = \frac{9a^2}{16} - 6 \\ p^2 + q^2 = 3b - 16 \end{cases}$$

با برابر قرار دادن سمت راست برابریها، به برابری $48b - 9a^2 = 16$ می‌رسیم که برای عددهای درست a و b ممکن نیست؛ زیرا سمت چپ برابری بر ۳ بخش‌پذیر و سمت راست آن بر ۳ بخش‌ناپذیر است.

در حالت $p = q$ ، دو ریشه برابر $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ می‌شوند.

$\sqrt{3}$ باید در معادله (۱) صدق کند:

$$9 + 3a\sqrt{3} + 3b + a\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{3} + (3b + 10) = 0$$

که برای برقراری آن، باید داشته باشیم:

$$a = 0, \quad b = -\frac{10}{3}$$

برای b ، عددی درست به دست نمی‌آید.

بنابراین، نمی‌توان برای a و b عددهای درستی پیدا کرد که به ازای آنها، معادله (۱)، دو ریشه به حاصل ضرب ۳ داشته باشد.

مثال ۱۰: آیا می‌توان همه عددهای حقیقی را از بازه $[0, 1]$ بین دو مجموعه A و B طوری تقسیم کرد که تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه A ، عددی گویا و تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه B ، عددی گنگ باشد؟

فرض می‌کنیم توانسته باشیم همه عددهای بازه $[0, 1]$ را به دو مجموعه مورد نظر A و B تقسیم کرده باشیم. در مجموعه B بیش از یک عدد گویا نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ زیرا تفاضل هر دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود. بنابراین، همه عددهای گویا، به جز حداکثر یکی، عضو مجموعه A هستند و در نتیجه، تفاضل هر دو عضو آن عددی گویاست. به این ترتیب، همه عددهای گنگ متعلق به بازه $[0, 1]$ باید عضو مجموعه B باشند؛ ولی در این صورت، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد که تفاضل آنها عددی گویاست؛

مثل $\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ یعنی بازه عددی $[0, 1]$ را نمی‌توان

به دو مجموعه مورد نظر فراز کرد.

مثال ۱۱: پاره‌خط‌های راست $a_1, a_2, \dots, a_{1375}, \dots, b_1, b_2, \dots, b_{1375}$ روی یک خط راست واقع هستند. می‌دانیم، هر پاره‌خط راست

مثال ۹: ثابت کنید نمی‌توان عددهای درست a و b را طوری پیدا کرد که حاصل ضرب دو ریشه از چهار ریشه معادله (۱) برابر ۳ باشد.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و p و q را دو ریشه از معادله (۱) می‌گیریم که حاصل ضربی برابر ۳ داشته باشند. چون $x = 0$ ریشه‌ای از معادله (۱) نیست، بنابراین می‌توان دوطرف معادله را بر x^2 بخش کرد که در نتیجه به این معادله می‌رسیم:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + a(x + \frac{1}{x}) + b = 0$$

که با فرض $x + \frac{1}{x} = y$ ، به این معادله درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2 + ay + b - 2 = 0 \quad (2)$$

عددهای $p + \frac{1}{p}$ و $q + \frac{1}{q}$ ، ریشه‌های این معادله‌اند؛ در ضمن، وقتی و تنها وقتی این دو ریشه برابرند که p و q برابر باشند، زیرا با توجه به شرط $pq = 3$ داریم:

$$p + \frac{1}{p} = q + \frac{1}{q} \Rightarrow p - q = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow p - q - \frac{p - q}{3} = 0 \Rightarrow p = q$$

[توجه کنیم اگر شرط $pq = 3$ را در نظر نگیریم، آن وقت برابری

$$p + \frac{1}{p} = q + \frac{1}{q}$$

$$p = q \text{ و در حالت } pq = 1]$$

ابتدا حالت $p \neq q$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه ویت (رابطه بین ریشه‌ها و ضریبها)، از معادله (۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} p + \frac{1}{p} + q + \frac{1}{q} = -a \\ (p + \frac{1}{p})(q + \frac{1}{q}) = b - 2 \end{cases}$$

با توجه به فرض $pq = 3$ ، این دو برابری به این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases} p + q = -\frac{3a}{4} \\ \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = b - \frac{16}{3} \end{cases}$$

مثال ۱۳: جوابهای حقیقی این دستگاه را پیدا کنید :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

یک جواب این دستگاه، بروشنی و بلافاصله به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

ثابت می‌کنیم این دستگاه، جواب منفی برای مجهولها ندارد، از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض بر این می‌گیریم که، یکی از مقدارهای x_i و مثلاً x_1 ، مقداری منفی باشد. x_1 را منفی می‌گیریم: $x_1 < 0$. از تفاضل معادله‌های چهارم و پنجم دستگاه به دست می‌آید:

$$x_4 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 \quad (1)$$

چون x_1 را منفی گرفته‌ایم، بنابراین $x_4 - x_1$ و در نتیجه $x_1^2 - x_2^2$ مقداری غیرمنفی می‌شود:

$$x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \geq |x_2|$$

بنابراین $x_1 + x_2$ مقداری منفی یا صفر است:

$$x_1 + x_2 = x_3^2 \leq 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

با توجه به (۱) داریم:

$$x_4 - x_1 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_4$$

یعنی x_4 عددی منفی است. اکنون به معادله سوم دستگاه توجه کنید. در این معادله $x_3 = 0$ و $x_4 < 0$ ، بنابراین باید داشته باشیم: $x_5 < 0$ ، که نشدنی است.

یادداشت: اگر دوری بودن دستگاه را در نظر می‌گرفتیم، (درباره این مفهوم، کمی بعد صحبت خواهیم کرد) به این نتیجه می‌رسیدیم که اگر یکی از مجهولها منفی باشد، باید همه مجهولها منفی باشند و در این صورت $x_1 + x_2$ یا x_3^2 عددی منفی می‌شود که نشدنی است.

به این ترتیب، باید در بین عددهای نامنفی، در جست و جوی جوابهای دستگاه باشیم. اگر در بین مقدارهایی که برای x_i به دست می‌آید، x_1 را بزرگترین و x_5 را کوچکترین آنها فرض کنیم (هر

a_k با هریک از دو پاره خط راست b_{k+1} و b_{k-1} ، نقطه مشترکی دارد. به جز این، پاره خط راست a_{1375} با پاره خط راست b_1 ، پاره خط راست a_1 با پاره خط راست b_{1375} ، دارای نقطه مشترک است. ثابت کنید به ازای هر مقدار k ، دو پاره خط راست a_k و b_k دارای نقطه مشترکند.

فرض می‌کنیم به ازای مقداری از k ، a_k و b_k نقطه مشترک نداشته باشند. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، پاره خط راست a_1 را در سمت چپ پاره خط راست b_1 می‌گیریم؛ چون b_2 با a_1 و a_2 با b_1 نقطه مشترک دارند، بنابراین، بناچار b_2 باید در سمت چپ a_2 باشد. اگر همین استدلال را برای پاره خطهای راست بعدی ادامه دهیم، که a_{1375} در سمت چپ b_{1375} و سپس b_1 در سمت چپ a_1 قرار دارد و این نشدنی است که هم a_1 در سمت چپ b_1 و هم b_1 در سمت چپ a_1 قرار گیرد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

مثال ۱۲: $u_1, u_2, \dots, u_n$ را عددی مثبت به حاصل ضرب برابر واحد می‌گیریم. ثابت کنید عدد طبیعی k با شرط $k < n$ وجود دارد؛ به نحوی که به ازای آن، داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1} + 1) \geq 2$$

(u_{n+1} را باید برابر u_1 گرفت.)

فرض می‌کنیم، برای هر مقدار $k \leq n$ داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1} + 1) < 2$$

این نابرابری را برای همه مقدارهای k می‌نویسیم:

$$u_1(u_2 + 1) < 2$$

$$u_2(u_3 + 1) < 2$$

.....

$$u_n(u_{n+1} + 1) = u_n(u_1 + 1) < 2$$

از ضرب همه این نابرابریها در یکدیگر به دست می‌آید:

$$u_1 u_2 \dots u_n (u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1) < 2^n \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که نابرابری $u + 1 \geq 2\sqrt{u}$ برای هر مقدار u برقرار است (چرا؟)، بنابراین:

$$(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1) \geq 2^n \sqrt{u_1 u_2 \dots u_n} = 2^n \quad (2)$$

دو نابرابری (۱) و (۲) یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین فرض ما مبنی بر این نابرابری $u_k(u_{k+1} + 1) < 2$ به ازای هر مقدار k برقرار است، فرض نادرستی است که در نتیجه، حکم مسأله ثابت می‌شود.

منفی اند، بر p بخش پذیر می شوند. ولی در میان این عددها، عدد $\binom{n}{0}$ ، به ازای $i=j=0$ وجود دارد که برابر است با واحد و نمی تواند بر p بخش پذیر باشد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.



برای اثبات این تساوی ها چه علائمی از چهار عمل اصلی در بین اعداد ۲ قرار می دهید؟

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

فرض دیگر، با این فرض اختلافی پیدا نمی کند) آن وقت مثلاً از معادله چهارم دستگاه داریم:

$$x_1^2 = x_4 + x_5 \leq 2x_1$$

و از معادله سوم دستگاه:

$$x_5^2 = x_3 + x_4 \geq 2x_5$$

از $x_5^2 \geq 2x_5$ به دست می آید: $x_5 \leq 0$ یا $x_5 \geq 2$ و چون x_5 منفی نیست، پس $x_5 \geq 2$. به همین ترتیب، از نابرابری $x_1^2 \leq 2x_1$ به دست می آید $x_1 \leq 2$ ، در نتیجه خواهیم داشت:

$$2 \leq x_5 \leq x_1 \leq 2$$

و این تنها برای $x_1 = x_5 = 2$ ممکن است. به این ترتیب، دستگاه یک جواب مثبت دارد:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$$

مثال ۱۴: p را عددی طبیعی و بزرگتر از واحد، و n و k را دو عدد طبیعی فرض می کنیم. ثابت کنید دست کم یکی از عددهای

$\binom{n+k}{k}, \dots, \binom{n+1}{k}, \binom{n}{k}$ بر p بخش پذیر نیست؛ به شرطی که:

$$\binom{m}{t} = C_m^t = \frac{m!}{t!(m-t)!}$$

فرض می کنیم، این طور نباشد، در این صورت با توجه به اتحاد:

$$\binom{m}{t} = \binom{m+1}{t+1} - \binom{m}{t+1}$$

باید هریک از عددهای:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k}$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k}$$

.....

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

بر p بخش پذیر باشند. به همین ترتیب همه عددهای به صورت $\binom{n+i}{j}$ ، که در آن $i \leq j$ عددهایی دلخواه، درست و غیر