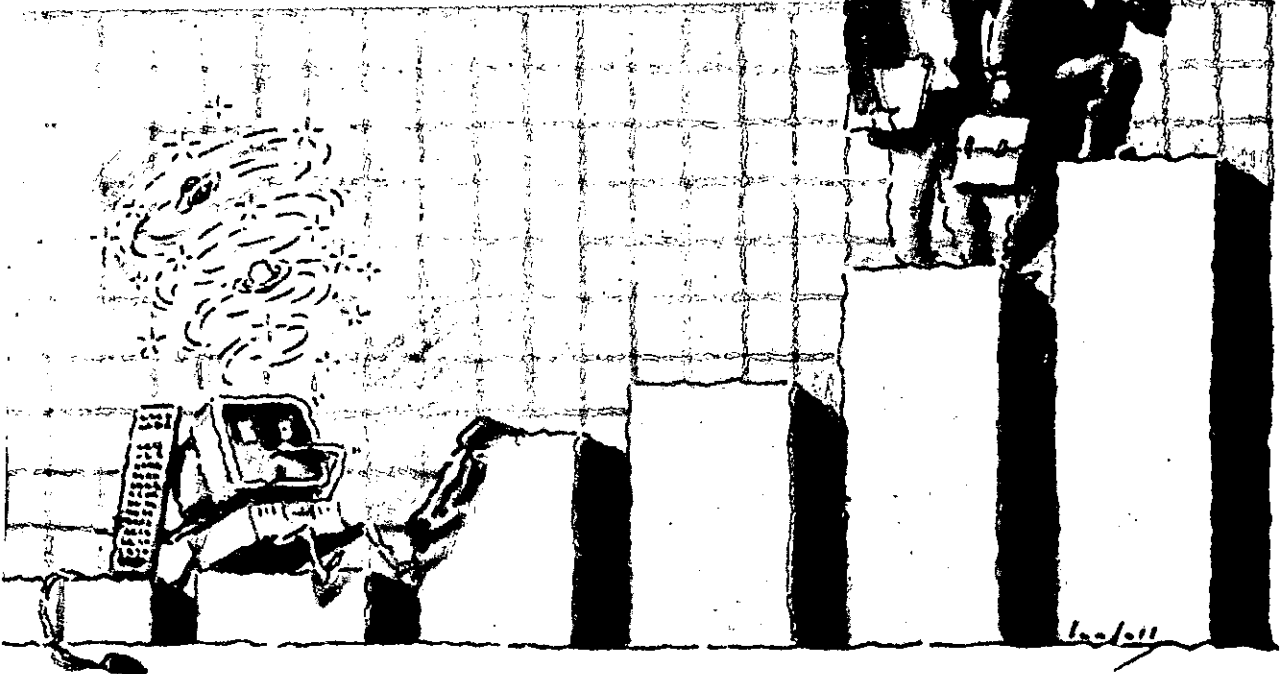


شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۲)



کنیم. برای پیدا کردن سایه، کافی است بتوانیم دوره آن را تشخیص دهیم.

دشواریهایی که ممکن است در عمل پیدا شود، مربوط به این است که: کدام نیم‌خط‌های راست را، برای تشخیص دوره سایه، باید رسم کرد؟

مسئله‌های مربوط به سایه، بیش از همه، در دو مورد ممکن است دشواری ایجاد کند: (۱) پیدا کردن شکل سایه و (۲) محاسبه برخی از عنصرهای آن (مثل محاسبه مساحت سایه). دشواری مربوط به محاسبه را، مثل حالت مقطع، باید ناشی از دشواری حل مسئله‌های فضایی و کاربرد مثلثات در آنها دانست، ولی دشواری مربوط به شکل سایه را، باید با تجسم فضایی، همراه با استدلال منطقی برطرف کرد.

در آغاز، به ساده‌ترین مسئله از این گونه، یعنی سایه یک پاره‌خط راست می‌پردازیم.

مسئله ۱۵. پاره‌خط راست AB ، به وسیله نقطه نورانی

IV ساختمان سایه یک جسم فضایی بر صفحه. اگر بخواهیم این عنوان «فیزیکی» را - که به ظاهر به مبحث نور مربوط می‌شود - به زبان ریاضی درآوریم، باید بگوییم: «مسئله‌هایی درباره تصویر یک شکل فضایی بر صفحه».

در واقع، همان‌طور که از فیزیک می‌دانیم، نور روی خط راست حرکت می‌کند؛ بنابراین، اگر نور از نقطه S بر جسم بتابد (سرچشمه نور را برای سادگی کار، یک نقطه به حساب می‌آوریم)، برای پیدا کردن سایه جسم بر صفحه، باید از نقطه S به همه نقطه‌های جسم وصل کنیم و ادامه دهیم تا صفحه را قطع کنند: مجموعه نقطه‌هایی که روی صفحه به دست می‌آید، سایه جسم را تشکیل می‌دهد. این روش ساختن سایه را، در هندسه، تصویر مرکزی جسم بر صفحه، و نقطه S را، مرکز تصویر گویند.

برای پیدا کردن سایه جسم بر صفحه، لازم نیست همه نیم‌خط‌های راستی را که از S و نقطه‌های جسم گذشته‌اند، رسم

دهیم، این پاره‌خط‌های راست می‌توانند سودمند باشند. خودتان ثابت کنید، نقطه K روی پاره‌خط راست TA' و نقطه L روی پاره‌خط راست TB' قرار دارند. در ضمن برای دو حالت دیگر هم، خودتان شکل را رسم کنید :

(۱) حالتی که فاصله نقطه S از صفحه P ، مقداری بین فاصله‌های A و B از P باشد ؛ و (۲) وقتی که فاصله ST ، از دو فاصله SK و SL کوچکتر باشد.

با توجه به مسأله ۱۵، روشن می‌شود که، سایه هر مثلث، مثلث دیگری است که، ضلعهای آن، سایه ضلعهای متناظر خود در مثلث اصلی است ؛ تنها در حالتی که نقطه S ، روی صفحه مثلث باشد، سایه مثلث، به صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید. [در این جا، هر وقت از سایه یک جسم صحبت کنیم، فرض بر این است که سرچشمه نور (که به جسم و به صفحه می‌تابد) طوری است که سایه، بخش محدودی از صفحه را گرفته است.]

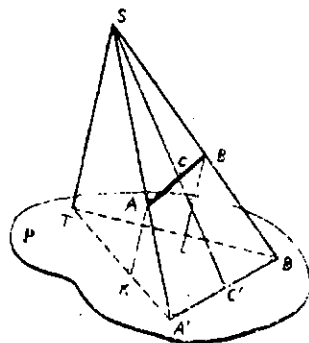
به گزاره شرطی مهم زیر هم توجه کنیم : اگر پاره‌خط راست AB ، موازی صفحه P باشد، سایه آن، $A'B'$ هم، موازی AB خواهد بود ؛ در این حالت، صفحه $SA'B'$ ، از پاره‌خط راست AB (که موازی صفحه P است) می‌گذرد و بنابراین، صفحه P را در خط راستی موازی AB قطع می‌کند. از این جا نتیجه می‌شود که : سایه هر متوازی‌الاضلاع بر صفحه‌ای که از یک ضلع دلخواه آن می‌گذرد، یک دوزنقه است، به جز در حالتی که سرچشمه نور، بر صفحه متوازی‌الاضلاع واقع باشد (در این حالت، سایه، به یک پاره‌خط راست تبدیل می‌شود).

مسأله‌ای می‌آوریم تا با دستگیره آن روشن کنیم، در این گونه موردها، چگونه باید به محاسبه پرداخت. ضمن حل مسأله، به اثبات حکمهای هندسی نمی‌پردازیم، ولی طبیعی است، برای حل کامل مسأله، باید همه این حکمها ثابت شوند.

مسأله ۱۶: قاعده AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC ، بر صفحه P واقع است و طولی برابر $2a$ دارد. در ضمن می‌دانیم، مقدار زاویه C (زاویه رأس مثلث) برابر است با 2α و صفحه مثلث با صفحه P ، زاویه‌ای برابر β می‌سازد.

S روشن شده است و می‌دانیم، نقطه S ، نسبت به صفحه P ، بالای نقطه‌های A و B واقع است. پاره‌خط راست AB ، چه سایه‌ای روی صفحه P می‌اندازد؟

با توجه به موقعیت نقطه‌های S ، A و B ، نیم‌خط‌های راست SA و SB ، صفحه P را در نقطه‌هایی مثل A' و B' قطع می‌کنند. روشن است، پاره‌خط راست $A'B'$ ، همان سایه



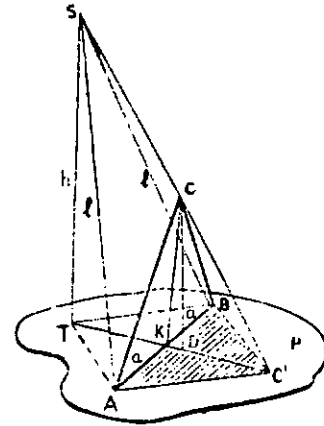
شکل ۱۷

پاره‌خط راست AB است. اثبات این حکم دشوار نیست : هر خط راستی که در درون مثلث $SA'B'$ ، طوری رسم شود که از رأس S بگذرد، پاره‌خط‌های راست AB و $A'B'$ را به ترتیب، در نقطه‌هایی مثل C و C' قطع می‌کند که در ضمن، C' سایه C است. از این جا نتیجه می‌شود که : سایه هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست AB ، بر $A'B'$ قرار می‌گیرد و برعکس، هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست $A'B'$ ، سایه نقطه‌ای از AB است.

برای دقیقتر شدن مطلب، باید نکته‌ای را به آن چه گفته‌ایم، اضافه کنیم : ما نقطه‌های A' و B' را جدا از هم در نظر گرفتیم و در این باره سکوت کردیم که، اگر S ، A و B روی یک خط راست باشند، آن وقت A' و B' دو نقطه متمایز نخواهند بود. در این حالت، سایه پاره‌خط راست AB ، تنها همان نقطه A' خواهد بود، یعنی سایه پاره‌خط راست، به یک نقطه تبدیل می‌شود.

برای پیدا کردن سایه پاره‌خط راست، به پاره‌خط‌های راست ST ، AK و BL نیازی نیست (در شکل ۱۷، این پاره‌خط‌های راست بر صفحه P غموذند). ولی اگر بخواهیم محاسبه‌ای انجام

مثلاً، به وسیله نقطه S روشن می‌شود که به فاصله h از صفحه P و در بالای رأس C و به فاصله l از دو نقطه A و B قرار دارد. مساحت سایه مثلث ABC را، بر صفحه P، پیدا کنید (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

پاره‌خطهای راست ST و CD را، عمود بر صفحه P، رسم می‌کنیم. از برابری طولهای دو پاره‌خط راست SA و SB نتیجه می‌شود که، خط راست TD از نقطه K، وسط قاعده AB، و همچنین، از نقطه C'، سایه C، می‌گذرد (هر دو حکم را؛ به طور جداگانه، خودتان ثابت کنید). به جز این، روشن است که، زاویه CKD، زاویه دو وجهی بین صفحه مثلث ABC و صفحه P است و، بنابراین $\widehat{CKD} = \beta$.

سایه مثلث ABC، یعنی ABC'، یک مثلث متساوی‌الساقین است و برای حل مسأله، باید طول ارتفاع آن، KC' را پیدا کرد. از تشابه دو مثلث STC' و CDC' به دست می‌آید:

$$\frac{|CD|}{|DC'|} = \frac{|ST|}{|TK| + |KD| + |DC|}$$

که از آن محاسبه می‌شود:

$$|DC'| = \frac{|CD|(|TK| + |KD|)}{|ST| - |CD|}$$

طول پاره‌خطهای راست CD و KD، از مثلث CKD،

محاسبه می‌شوند:

$$|CD| = |CK| \cdot \sin \beta = a \cot \alpha \sin \beta;$$

$$|DK| = a \cot \alpha \cos \beta$$

از طرف دیگر، از مثلثهای ATK و ATS به دست می‌آید:

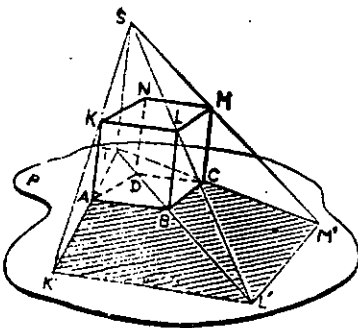
$$|TK|^2 = |TA|^2 - |AK|^2 = l^2 - h^2 - a^2$$

با قرار دادن مقادارهایی که برای طول پاره‌خطهای راست CD، KD و TK پیدا کردیم، مقدار طول پاره‌خط راست DC' و، سپس،

$$|KC'| = |KD| + |DC'|$$

به دست می‌آید. پاسخ نهایی، به اندازه کافی طولانی است، ولی پیدا کردن آن دشوار نیست.

ساختن سایه چند وجهی‌ها، دشواری عمده‌ای، در مقایسه با ساختن تصویر قائم آنها، پیدا نمی‌کند. به شکل ۱۹ توجه کنید:



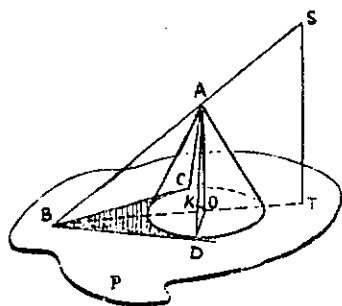
شکل ۱۹

قاعده ABCD از مکعب ABCDKLMN روی صفحه P قرار دارد، نقطه S، سرچشمه نور را روی صفحه قطری مکعب (صفحه‌ای که از مربع NLBD می‌گذرد) طوری انتخاب کرده‌ایم که تصویر قائم S بر P، یعنی نقطه T، در بیرون قاعده مکعب قرار گیرد. سایه چنین مکعبی خیلی ساده به دست می‌آید: روشن است، این سایه، از سایه‌های دو وجهی AKLB و BLMC به دست می‌آید و از دو دوزنقه تشکیل شده است. برای این که، به عنوان نمونه، دوزنقه ABLK' را، با دقت هندسی، پیدا کنیم، باید عمود ST را بر صفحه قاعده مکعب در نظر بگیریم،

سطح کره رسم شوند، مولدهای یک مخروط را تشکیل می‌دهند و، روشن است که سایه آن، به صورت یک دایره درمی‌آید.

تنها یادآوری می‌کنیم، اگر فاصله نقطه S از صفحه، بزرگتر از قطر کره باشد، سایه آن بر صفحه به صورت بیضی درمی‌آید؛ اگر فاصله S از صفحه، برابر قطر کره باشد، سایه آن، بخشی نامتناهی از صفحه را فرا می‌گیرد، که در داخل یک سهمی قرار گرفته است. و اگر فاصله S از صفحه، کوچکتر از قطر دایره باشد، سایه کره در درون شاخه‌های یک هذلولی واقع می‌شود؛ این مطلب را در هندسه تحلیلی ثابت می‌کنند. بیضی، سهمی و هذلولی، سه حالت مختلف از مقطعهای مخروطی هستند.

مسئله ۱۷. قاعده مخروط قائمی، بر یک صفحه قرار دارد. شعاع قاعده مخروط برابر ۱ متر و ارتفاع مخروط برابر ۲ متر است. سرچشمه نور، در ۴ متری صفحه، طوری قرار گرفته است که، فاصله پای عمودی که از آنجا بر صفحه رسم شده است تا مرکز قاعده مخروط، برابر ۲ متر است. مساحت سایه مخروط بر صفحه را، بدون در نظر گرفتن قاعده مخروط، پیدا کنید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

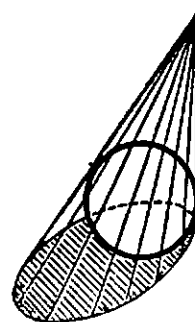
قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم، اگر OK بر مولد AD عمود باشد، صفحه‌ای که از AD بگذرد و بر OK عمود باشد، جز نقطه‌های واقع بر AD ، نقطه مشترک دیگری با سطح مخروطی ندارد. بنابراین، هیچ خط راستی از این صفحه، به جز خط راست AD ، نمی‌تواند بیش از یک نقطه مشترک با سطح مخروطی داشته باشد.

اکنون از نقطه B ، مماسهای BC و BD را بر دایره قاعده

آن وقت نقطه K' ، به عنوان نقطه برخورد خطهای راست TA و SK به دست می‌آید. به همین ترتیب، نقطه L' ، در نقطه برخورد خطهای راست TB و SL قرار دارد (هر یک از این دو حکم، نیازمند اثبات است؛ خودتان ثابت کنید). این ساختمان هندسی، بی‌تردید، برای محاسبه عنصرهای سایه، مثل مساحت آن، به درد می‌خورد. اگر موضع سرچشمه نور معین باشد (به عنوان مثال، با معلوم بودن طول پاره خطهای راست ST و TD)، با توجه به این ساختمان هندسی، می‌توان طول سایه هر یک از پاره خطهای راست افقی و قائم را پیدا کرد (که در واقع، همان طول ضلعهای دوزنقه است) و، سپس، مساحت را بر حسب طول ضلعها به دست آورد (خودتان، حل مسئله را تمام کنید).

وقتی با سایه جسمهای گرد سرو کار داشته باشیم، دشواری، به گونه دیگری پدید می‌آید. در این گونه مسأله‌ها، با مفهوم مماس بر جسم برخورد می‌کنیم. در واقع، اگر سرچشمه نور، کره‌ای را که بر صفحه قرار گرفته است، روشن کند، برای پیدا کردن دوره سایه، باید پرتوهایی از نور را در نظر گرفت که، تنها در یک نقطه، با کره مشترک باشند، یعنی نیم خطهای راستی را که بر کره مماس‌اند (شکل ۲۰) و این به بحثی از هندسه فضایی مربوط می‌شود که از برنامه دبیرستانی بیرون است.

به همین مناسبت، این مسأله را تنها در حالت ساده آن، وقتی که S (سرچشمه نور)، درست در بالای مرکز کره قرار گرفته باشد، بررسی می‌کنیم. در این حالت، مماسهایی که از S ، بر



شکل ۲۰

این مسأله را، بدون رسم شکل فضایی هم، می توان حل کرد. به سادگی می توان تصور کرد، اگر از بالا نگاه کنیم، تصویری شبیه شکل ۲۲ دیده می شود: در این شکل، O رأس هرم و دایره π' ، دایره ای است که، سایه رأس هرم، ضمن حرکت S، روی آن حرکت می کند (حرکت S روی دایره π است؛ در شکل، دایره π در پایین و دایره π' در بالا قرار گرفته است).

فرض کنیم، صفحه هایی که از ارتفاع هرم و یکی از بالهای OK و OL می گذرند، به ترتیب، دایره π را در نقطه های N و B قطع کنند. با توجه به تقارن، روشن است که، کافی است، حرکت S را، تنها روی کمان NB مورد بررسی قرار دهیم.

اکنون فرض کنید، نقطه S، روی محیط دایره π ، از N به طرف نقطه B حرکت می کند. ضمن این حرکت، سایه رأس هم از N' به طرف نقطه B' جابه جا می شود.

R' را نقطه ای از محیط دایره π' می گیریم که بر خط راست KL واقع باشد و R را، نقطه متناظر آن از S، فرض می کنیم. نقطه R بر خط راست OR' قرار دارد و، نقطه های O و R' ، روی وجه OKL واقع اند. بنابراین، نقطه R هم روی صفحه OKL قرار می گیرد. به این ترتیب، اگر نقطه S، در نقطه ای مثل Q، بین N و R قرار گیرد (و از آن جمله، خود نقطه های N و R)، از آن جا، تنها یک ضلع LM از قاعده هرم دیده نمی شود و، سایه هرم، به صورت مثلث $LQ'M$ در می آید. وقتی حرکت S، از N به طرف R باشد، مساحت این مثلث، روبه کاهش می رود، زیرا قاعده مثلث، یعنی LM، ثابت می ماند و ارتفاع آن، به روشنی، کوچک و کوچکتر می شود.

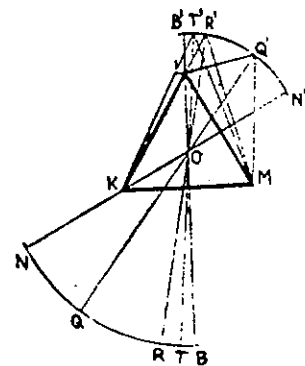
اگر نقطه S، در نقطه ای مثل T، بین R و B باشد، از آن جا، دو ضلع LM و KL، از قاعده هرم، دیده نمی شوند. بنابراین سایه هرم، به صورت چهارضلعی $T'KLM$ در می آید. مثلث KLM، با اضافه شدن این سایه به آن، به مثلث $T'KM$ تبدیل می شود. مساحت مثلث $T'KM$ ، وقتی نقطه S از R به سمت B می رود، بزرگتر می شود، زیرا قاعده مثلث ثابت می ماند و ارتفاع آن روبه افزایش است. بنابراین، روشن است که، ضمن این

مخروط رسم می کنیم. در این صورت، خط BD بر DO عمود می شود و در نتیجه، خط راست BD، بر صفحه AOD عمود است. بنابراین BD بر OK هم عمود می شود. چون، بنابر فرض، OK بر DA عمود است، بنابراین OK بر صفحه ABD عمود می شود. یعنی، صفحه ABD از همان نوعی است که، در آغاز حل، از آن صحبت کردیم. به این ترتیب، هر نیم خط راستی که از نقطه S روی این صفحه رسم شود، بر سطح مخروطی مماس خواهد بود و بنابراین، مرز سایه به وسیله همین نیم خط راست معین می شود، یعنی این مرز، بر مماس BD منطبق است. به همین ترتیب، مرز دیگر سایه، یعنی BC هم معین می شود.

به این ترتیب، سایه مخروط، شکلی است که به دو پاره خط راست BD و BC و کمان کوچکتر CD محدود شده است. خودتان مساحت این شکل را پیدا کنید.

در پایان مسأله ای را می آوریم که، در آن، سرچشمه نور، جابه جا می شود و می خواهیم، حرکت سایه را دنبال کنیم.

مسأله ۱۸. چهار وجهی منتظمی روی صفحه P قرار دارد. چشمه نور S، روی محیط دایره ای، که بر صفحه ای موازی P واقع است، حرکت می کند. مرکز دایره، روی ارتفاع هرم قرار دارد. بزرگی شعاع دایره چنان است که، از هر نقطه واقع بر محیط آن، دست کم، یکی از ضلعهای قاعده هرم دیده نمی شود. ثابت کنید، کمترین مساحت سایه، وقتی به دست می آید که نقطه S، بر صفحه یکی از وجههای جانبی هرم قرار گیرد.



شکل ۲۲

حرکت، مساحت چهار ضلعی T'KLM هم ترقی می کند، زیرا اختلاف مساحت این چهارضلعی با مساحت مثلث T'KM مقدار ثابتی است (برابر با مساحت قاعده هرم).
به این ترتیب، وقتی نقطه S، از N به طرف R می رود، مساحت سایه کم می شود و، وقتی از R به طرف B می رود، این مساحت زیاد می شود. یعنی، کمترین مقدار مساحت سایه، وقتی به دست می آید که، چشمه نور، در نقطه R، یعنی روی وجه OKL باشد.



تفریح اندیشه ۱

لوبیاهای جهنده مکریکی

قوطی اول، دو لوبیای سیاه در قوطی دوم، و یک لوبیای قرمز و یک لوبیای سیاه در قوطی سوم قرار داد، و بعد از بستن در جعبه ها جای آنها را جلوی من عوض کرد، و گفت: هر یک از قوطیها را که می خواهی بردار و یک لوبیا از آن بیرون بیاور. یک لوبیای قرمز بیرون آوردم.

دوستم پرسید: احتمال اینکه دومین لوبیای واقع در قوطی ای که انتخاب کرده ای نیز قرمز باشد چیست؟

با صدای بلند استدلال کردم: لوبیای قرمزی که بیرون آوردم باید یا از قوطی «قرمز - قرمز» یا از قوطی «قرمز - سیاه» باشد، و از آنجا که احتمال انتخاب هر یک از قوطیها دقیقاً یکی است، احتمال اینکه لوبیای دوم نیز قرمز باشد پنجاه - پنجاه است. و اضافه کردم: این یکی نیز بسیار آسان بود.

دوستم با لبخند گفت: خیر، دوست عزیز آسان نیست، مشکل است.

دوستم سه قوطی یک شکل و شش لوبیای جهنده - سه قرمز و سه سیاه - در کنارش گذاشته بود، و هنگامی که پشتم به او بود در هر قوطی دو لوبیا قرار داد و اولی را با برجسب «ق - س» (به جای قرمز - سیاه)، دومی را با برجسب «ق - ق»، و آخری را با برجسب «س - س» مشخص کرد، و در حالی که آنها را مقابل من می گذاشت، گفت: هیچ یک از این قوطیها دارای برجسب درست نیست. اجازه داری از هر قوطی که انتخاب می کنی، هر بار یک لوبیا - البته بدون نگاه کردن به داخل قوطی - برداری. مسأله ای که برای تو مطرح کرده ام این است که مشخص کنی در هر قوطی کدام لوبیاها قرار دارند. این را هم به خاطر داشته باش که مجاز نیستی بیش از حد لزوم لوبیا از قوطیها بیرون بیاوری. پس از چند دقیقه فکر کردن گفتم: حلش کردم، خیلی ساده بود!

دوستم که از حرفم اصلاً تعجب نکرده بود گفت: حالا مسأله را به طریق دیگری طرح می کنم.

سپس برجسبها را از قوطیها برداشت و دو لوبیای قرمز در