

شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۱)



چون یال AB بر یالهای AO_1 و BO_1 عمود است، بنابراین با منشوری قائم سرو کار داریم.

در مستطیل O_1CO_1D ، قطر O_1O_2 با یال O_1D ، زاویه 45° درجه می سازد، پس این مستطیل، یک مربع است. برای قطر این مربع داریم: $|O_1O_2| = 4$ ، پس طول ضلع این مربع، برابر است با $2\sqrt{2}$. قاعده های این منشور، مثلث های قائم الزاویه ای با رأس های زاویه قائمه D و O هستند (زیرا $|AO_1|^2 - |AC|^2 = |OC|^2 = 9 - 1$). نقطه M ، بنابر شرط به فاصله ۳ از O_1 و روی خط راست AB است. ولی $|O_1B| = 3$.

بنابراین، دو حالت ممکن است: (۱) M بر نقطه B منطبق باشد؛ (۲) M قرینه نقطه B نسبت به نقطه A باشد.

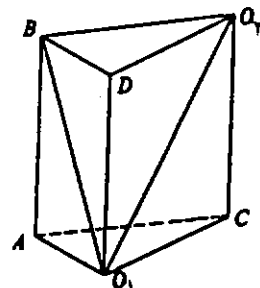
سپس توجه می کنیم که مماس دوم عبارت است از قرینه AB نسبت به صفحه MO_1O_2 . بنابراین، زاویه بین دو مماس برابر است با دو برابر زاویه بین یکی از آنها با صفحه MO_1O_2 (یا مکمل آن).

حالت اول را مورد بررسی قرار می دهیم: M بر B منطبق است. باید زاویه بین خط راست BA و صفحه BO_1O_2 را پیدا کنیم. این زاویه برابر است با زاویه بین خط راست DO_1 با صفحه BO_1O_2 . هرم BDO_1O_2 را (که یک چهار وجهی

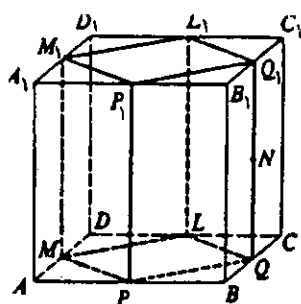
اکنون برای مساله زیر (شبيه مساله ۸) تفسیری به باری شکل پیدا کنید.

مساله ۱۰: دو کره، یکی به شعاع برابر ۱ و دیگری به شعاع برابر ۳ بر یکدیگر از بیرون مماس اند. از نقطه M ، که به فاصله ۳ از مرکز کره کوچکتر، دو خط راست گذرانده ایم که بر هر دو کره مماس باشند. مطلوب است محاسبه زاویه بین دو مماس، به شرطی که بدانیم، یکی از آنها، با خط راستی که از مرکزهای دو دایره گذشته است، زاویه 45° درجه می سازد.

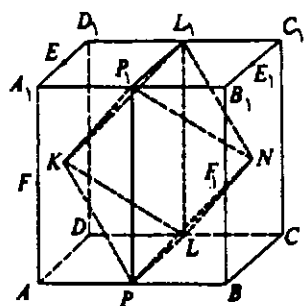
مرکزهای دو دایره را O_1 و O_2 و نقطه های تماس مماسی را که با O_1O_2 زاویه 45° درجه می سازد، با دو کره، A و B می نامیم. این ساختمان را تا پدید آمدن منشور O_1ACDBO_2 (که قاعده های مثلثی شکل دارد) تکمیل می کنیم (شکل ۹)



راست BB_1 و CC_1 می‌گذرد، از منشور اول، «گوشه‌ای» به رأس Q جدا می‌کند، که عبارت است از چهاروجهی (هرم) $PQLN$ ، که در آن، N ، نقطه وسط پاره خط راست QQ_1 است. به همین ترتیب، «گوشه‌هایی» در رأسهای M_1 و M هم جدا می‌شوند. در نتیجه چند وجهی PLL_1P_1KN به دست می‌آید (شکل ۱۱). اکنون باید منشور سوم را رسم کرد (که قاعده‌های آن روی وجه‌های BCC_1B_1 و ADD_1A_1 است) و بخشی از چند وجهی را که در بیرون مرزهای این منشور قرار



شکل ۱۰



شکل ۱۱

دارد، از آن حذف کرد. اگر بخواهیم، این بخش مشترک سه منشور را روی شکل نشان دهیم، چنان درهم می‌رود که، عینی بودن خود را، به کلی از دست می‌دهد. به همین مناسبت، بهتر است، دنباله ساختمان را در ذهن خود مجسم کنیم. بخش مشترک دو منشور عبارت است از اجتماع دو هرم منتظم با قاعده مشترک PLL_1P_1 . همین چند وجهی (که یک هشت وجهی است) می‌تواند به عنوان برخورد دو هرم (غیر منتظم) با قاعده مشترک PNL_1K در نظر گرفته شود. مرز منشور سوم، از نقطه‌های F, E, F_1, E_1 ، وسط یالهای AA_1 و AD_1 ، P_1K و BB_1 از مکعب می‌گذرد و یالهای جانبی P_1P و P_1L_1 از هرم PKL_1NP_1 را در نقطه‌های وسط آنها قطع می‌کند و بنابراین، این مرز $\frac{1}{8}$ حجم این هرم یا $\frac{1}{16}$ حجم هشت وجهی PKL_1NP_1L را می‌برد. همین استدلال را درباره هر یک از سه وجه جانبی دیگر منشور سوم می‌توان داشت.

است). حجم این هرم برابر است با

$$\frac{1}{6} |BD| |DO_1| |DO_2| = \frac{4}{3}$$

مثلث BO_1O_2 را قاعده هرم می‌گیریم. داریم:

$$|BO_2| = 3, |BO_1| = 3, |O_1O_2| = 4$$

از این جا مساحت مثلث BO_1O_2 برابر $2\sqrt{5}$ می‌شود. اگر h را طول ارتفاعی بگیریم، که از D بر BO_1O_2 فرود آمده است، باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{3} \sqrt{5} h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

به این ترتیب، سینوس زاویه بین DO_1 و صفحه BO_1O_2 برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ می‌شود. پس

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} (= 2 \arctg \frac{1}{3})$$

که در آن α همان زاویه مجهول، یعنی زاویه بین دو مماس است.

حالت دوم را به عهده خودتان می‌گذاریم. با وجود این، می‌توان پی‌برد که، پاسخ حالت دوم هم همان پاسخ حالت اول است. در واقع، AO_1 ، عمود مشترک AB و O_1O_2 است؛ در ضمن، نقطه M در حالت دوم، قرینه نقطه M در حالت اول نسبت به نقطه A است. اشاره کنیم، شکلی را که در این جا مورد استفاده قرار دادیم، تنها ساختمانی نیست که بتواند ما را به نتیجه برساند می‌توان روشهای دیگری هم برای ملموس کردن مساله در جریان حل، پیدا کرد. به مساله دیگری توجه کنید:

مساله ۱۱. سه منشور منتظم با قاعده‌های چهارضلعی، در مکعبی با ضلع به طول واحد، به نحوی محاط شده‌اند که رأسهای هر منشور در وسط یالهای مکعب واقع شده‌اند. حجم بخش مشترک این سه منشور را پیدا کنید.

ساختمان شکل را به تدریج و گام به گام انجام می‌دهیم. در آغاز، مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ را رسم می‌کنیم. (این گام نخست است، ولی ما برای صرفه جویی آن را به طور جداگانه نداده‌ایم). گام دوم رسم منشور $PQLMPQ_1 L_1 M_1$ ، محاط در آن است (مجموعه این دو گام، در شکل ۱۰ نشان داده شده است). اکنون باید به سراغ منشوری برویم که قاعده‌های آن بر وجه‌های $ABB_1 A_1$ و $DCC_1 D_1$ واقع‌اند. روشن است که وجه جانبی این منشور که از نقطه‌های P و L و وسط پاره خط‌های

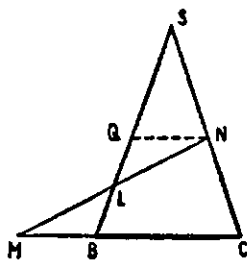
$$|MB| = \frac{1}{4}|BC| \quad (|MC| = \frac{3}{4}|BC|),$$

$$|ED| = \frac{1}{4}|DC| \quad (|EC| = \frac{3}{4}|DC|)$$

N را وسط یال CS می گیریم. نقطه های M و N، روی وجه SBC قرار دارند؛ بنابراین، خط راست MN، یال BS را در نقطه ای مانند L قطع می کند.

اکنون ببینیم، نقطه L، یال BS را به چه نسبتی قطع می کند. برای این منظور، در مثلث CBS (شکل ۱۳)، خط راست NQ را — که وسط دو ضلع CS و BS را به هم وصل می کند — رسم می کنیم. مثلث های NQL و LBM، که به این طریق به دست می آیند، با هم برابرند، زیرا:

$$|BM| = |NQ| = \frac{1}{4}|BC|, \quad \angle BLM = \angle NQL, \quad \angle BML = \angle QNL$$



شکل ۱۳

از برابری این دو مثلث نتیجه می شود:

$$|BL| = |QL|$$

از این جا روشن می شود که نقطه L، یال BS را به نسبت ۱:۳ بخش کرده است.

چون نقطه های E و N بر صفحه وجه SBC قرار دارند، خط راست EN، یال SD را در نقطه ای مانند P قطع می کند. به سادگی می توان ثابت کرد، این نقطه هم، یال DS را به نسبت ۱:۳ بخش می کند.

به این ترتیب توانستیم مقطع مورد نظر خود را بسازیم. صفحه این مقطع، هرم را در پنج ضلعی LKFPN قطع و آن را به دو چند وجهی بخش می کند، که البته حجم آنها را نمی توان به سادگی پیدا کرد. برای محاسبه دست کم یکی از این حجم ها باید ساختمانهای تازه ای اندیشید و چند هرم را مورد بررسی قرار داد.

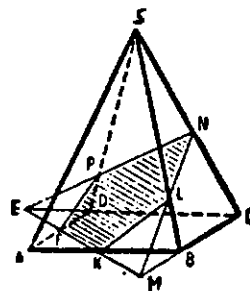
بنابراین، منشور سوم $\frac{1}{4}$ حجم هشت وجهی PLL_1PKN را از آن جدا می کند و بخش مشترک سه منشور حجمی برابر $\frac{3}{4}$ حجم آن دارد؛ یعنی حجم بخش مشترک برابر است با

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

III. درباره مقطع یک جسم، ضمن برخورد با یک صفحه. اغلب به مساله هایی برمی خوریم که در آنها صفحه ای یک چند وجهی (مکعب، هرم، منشور) را بریده است و می خواهیم بدانیم، این صفحه، حجم چند وجهی را به چه نسبتی قطع کرده است. برای حل چنین مساله هایی با دو گونه دشواری روبه رو می شویم: (۱) رسم مقطع و (۲) محاسبه حجم هر یک از دو بخشی که بعد از برش چند وجهی به دست آمده است. ولی اگر برای حل مساله به ساختمان هایی بیرون از چند وجهی، تن در دهیم، می توانیم این دشواری ها را، تا حد زیادی کم کنیم. یکی از این مساله ها را درباره یک چند وجهی منتظم در نظر می گیریم (حل مساله، برای حالت های کلی تر، یعنی چند وجهی های دلخواه، تفاوت چندانی با این حالت ویژه ندارد).

مساله ۱۲. هرم منتظم SABCD به رأس S داده شده است. صفحه ای از نقطه های وسط یالهای AB، AD، CS و گذرانده ایم. این صفحه، حجم هرم را به چه نسبتی قطع می کند؟

K و F را، به ترتیب، وسط ضلع های AB و AD می گیریم (شکل ۱۲)؛ این دو نقطه را به هم وصل می کنیم و ادامه می دهیم تا امتداد ضلع های CB و CD را به ترتیب، در M و E قطع

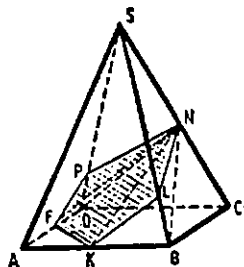


شکل ۱۲

کند. از مقایسه مثلث های BKM، AKF و DEF، به دست می آید:

نقطه‌های N و D و F می‌گذرانیم (شکل ۱۴). این دو صفحه، ضمن برخورد، چند وجهی CDFKBLNP را به سه هرم بخش می‌کنند:

هرم NKBCDF (به رأس N و قاعده KBCDF)، هرم NKPL (به رأس N و قاعده KBL) و هرم NPDF (به رأس N و قاعده PDF).



شکل ۱۴

حجم این هرمها را محاسبه می‌کنیم.

چون نقطه N یال CS را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند، طول عمودی که از نقطه N بر صفحه ABCD فرود آید، برابر با نصف طول ارتفاع هرم مفروض، یعنی برابر $\frac{1}{4}h$ است.

مساحت پنج ضلعی KBCDF، برابر است با مساحت مربع ABCD، به شرطی که مساحت مثلث AKF از آن کم شود، یعنی

$$S_{KBCDF} = a^2 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} a^2 = \frac{3}{4} a^2$$

بنابراین حجم V_1 از هرم NKBCDF، چنین می‌شود:

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} h \times \frac{3}{4} a^2 = \frac{1}{16} ha^2 = \frac{1}{16} V$$

(V را حجم هرم SABCD گرفته‌ایم).

اکنون V_2 ، حجم هرم NKBL را پیدا می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم، V، حجم هرم SABCD، دو برابر حجم

هرم SABC است که، در آن، C رأس و ABS قاعده باشد.

ارتفاع هرم اخیر را h_1 می‌گیریم؛ در این صورت

$$\frac{1}{3} V = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_{ABS} \Rightarrow V = \frac{2}{3} h_1 \cdot S_{ABS}$$

چون نقطه N وسط یال CS است، عمود وارد از این نقطه بر

اگر شکل را دقیقتر مورد مشاهده قرار دهیم، قانع می‌شویم که، حجم چند وجهی CDFKBLNP (که به وسیله مثلثهای DFP و KLB، چهار ضلعیهای CNLB و CDPN، پنج ضلعیهای PFKLN و DFKBC احاطه شده است)، برابر است با حجم چهار وجهی NECM، به شرطی که حجمهای دو چهار وجهی LKBM و PEDF از آن کم شود.

حجم هر یک از این سه هرم را محاسبه می‌کنیم.

ارتفاع هرم مفروض SABCD را برابر h و طول ضلع قاعده آن را برابر a می‌گیریم؛ در این صورت، حجم هرم SABCD، چنین می‌شود.

$$V = \frac{1}{3} a^2 h$$

چون نقطه N وسط یال CS است، به سادگی می‌توان ثابت کرد، طول عمود وارد از این نقطه بر صفحه ABCD، برابر است با نصف طول عمودی که از نقطه S بر صفحه ABCD فرود آید، یعنی طول این عمود برابر $\frac{1}{4}h$ می‌شود. به همین ترتیب روشن می‌شود، که طول هر یک از عمودهای وارد از نقطه‌های L و P بر صفحه ABCD، برابر $\frac{1}{4}h$ است.

مساحت مثلث ECM برابر است با $\frac{9}{8}a^2$ و مساحت هر یک از مثلثهای DEF و BMK برابر است با $\frac{1}{8}a^2$ به این ترتیب، حجم هرم NECM چنین می‌شود:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} h \times \frac{9}{8} a^2 = \frac{3}{16} ha^2 = \frac{9}{16} V$$

و حجم هر یک از هرمهای PEDF و LKBM برابر است با

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} h \times \frac{1}{8} a^2 = \frac{1}{96} ha^2 = \frac{1}{32} V$$

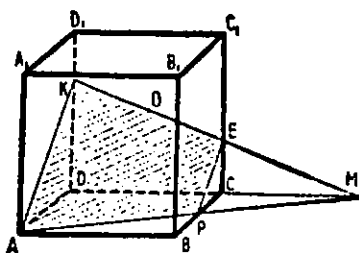
بنابراین، برای حجم چند وجهی CDFKBLNP به دست می‌آید:

$$V_1 = \frac{9}{16} V - 2 \times \frac{1}{32} V = \frac{1}{4} V$$

یعنی صفحه مفروض، حجم هرم را به نسبت ۱:۱ تقسیم می‌کند.

توجه کنید: اگر برای محاسبه حجم چند وجهی CDFKBLWP، از این راه استفاده نمی‌کردیم، گرفتار محاسبه‌ای طولانی می‌شدیم. با وجود این، برای مقایسه، این راه طولانیتر را، که کمتر عینی و ملموس است، می‌آوریم.

دو صفحه، یکی از نقطه‌های K و B و N و دیگری از



شکل ۱۵

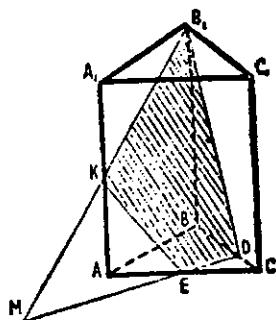
یال D_1D را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند. حجم چند وجهی ABCDKE برابر است با تفاضل حجمهای دو چهار وجهی KAMD و EPMC. اگر حجم مکعب مفروض را V و حجم هرهای KAMD و EPMC را به ترتیب V_1 و V_2 و حجم چند وجهی ABCDAE را V_3 بنامیم، به دست می‌آید (خودتان محاسبه کنید):

$$V_1 = \frac{2}{9}V, \quad V_2 = \frac{1}{36}V, \quad V_3 = \frac{7}{36}V$$

یعنی صفحه‌ای که مکعب را بریده است، حجم آن را به نسبت ۲۹:۷ تقسیم می‌کند.

مسئله ۱۴. منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 داده شده است. از وسط یالهای AA_1 و AC و رأس B صفحه‌ای گذرانده‌ایم. این صفحه، حجم منشور را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

وسط یال AA_1 را K می‌نامیم (شکل ۱۶). خط راستی که از نقطه‌های B_1 و K می‌گذرد، امتداد یال BA را در نقطه M قطع می‌کند. در ضمن $|MA| = |AB|$. نقطه‌های M و E را با یک خط راست به هم می‌پیوندیم (E ، وسط یال AC است)؛ این خط راست، یال BC را در نقطه D قطع می‌کند؛ در ضمن پاره-خط راست BC ، در نقطه D ، به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌شود.



شکل ۱۶

صفحه ABS (یعنی ارتفاع هرم $NKBL$) برابر $\frac{1}{4}h_1$ می‌شود. در ضمن $|KB| = \frac{1}{4}|AB|$ و $|BL| = \frac{1}{4}|BS|$ بنابراین

$$S_{KBL} = |BL| \cdot \sin \angle KBL \times \frac{1}{2} |KB| = \frac{1}{8} S_{ABS}$$

و حجم V_4 را می‌توان به این ترتیب بیان کرد:

$$V_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} h_1 \times \frac{1}{8} S_{ABS} = \frac{1}{96} V$$

به همین ترتیب V_3 ، حجم هرم $NPDL$ هم به دست می‌آید:

$$V_3 = \frac{1}{32} V$$

اکنون دیگر حجم چند وجهی $CDFKBLNP$ محاسبه می‌شود:

$$V_4 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4} V$$

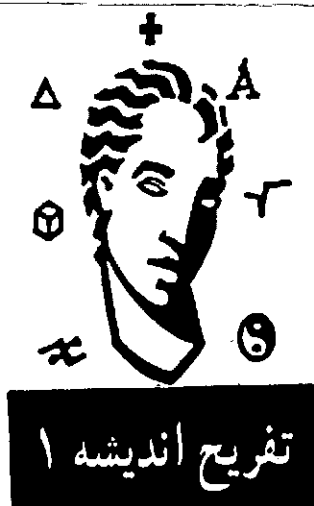
یعنی هرم مفروض، به وسیله صفحه قاطع، به نسبت ۱:۱ تقسیم شده است.

در مساله‌ای که حل کردیم، کم و بیش روشن بود که در مقطع، یک پنج ضلعی به دست می‌آید. ولی اگر یکی از نقطه‌های مشخص کننده مقطع، در درون چند وجهی قرار می‌گرفت، دیگر نمی‌شد شکل مقطع را، خیلی زود تصور کرد. حل چنین مساله‌هایی، اغلب طولانی و نیازمند ساختمانهای اضافی است. در این گونه موردها، می‌توان صفحه‌ای کمکی رسم کرد که از یک خط راست واقع بر مقطع مورد نظر و یک خط راست واقع بر یکی از وجه‌های چند وجهی گذشته باشد. بعد باید نقطه برخورد این دو خط راست را پیدا کرد، یعنی یک نقطه اضافی از مقطع که بر یکی از وجه‌های چند وجهی قرار دارد. دنباله کار، شبیه روشی است که برای حل مسئله ۱۲ به کار گرفتیم.

مسئله ۱۳. مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 مفروض است. اگر صفحه‌ای، از نقطه A و وسط یال BC و مرکز وجه $DCC_1 D_1$ بگذرانیم،

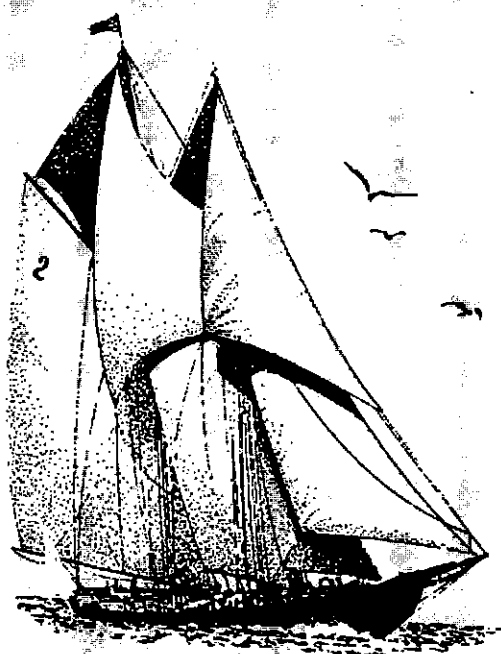
حجم مکعب به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

وسط یال BC را P می‌نامیم (شکل ۱۵) خط راستی که از نقطه‌های A و P بگذرد، امتداد یال DC را در نقطه M قطع می‌کند؛ در ضمن داریم: $|CM| = |DC|$. مرکز وجه $DCC_1 D_1$ را O می‌نامیم. در این صورت، خط راستی که از نقطه‌های O و M می‌گذرد، یالهای CC_1 و DD_1 را به ترتیب در E و K قطع می‌کند. در ضمن نقطه E یال C_1C را به نسبت ۲:۱ و نقطه K ،



تعدادی جعبه

آقای اعتباری کارمند کشتیرانی با سفارش غیرمعمول بسته‌بندی ۱۰۰ جعبه روبرو شده بود. هر جعبه باید به شکل مکعب و ضلع هر مکعب یک اینچ طولانیتر از مکعب قبلی، و ضلع کوچکترین مکعب ۱ اینچ باشد. می‌توانید راهی ساده برای یافتن سطح کل پارچه لازم به او نشان دهید؟ و در ضمن حجم محصور توسط ۱۰۰ جعبه مزبور را؟



جواب در صفحه ۸۸

حجم چند وجهی $ABDEKB_1$ (V_2) برابر است با تفاوت حجمهای دو هرم B_1BDM و $KAEM$ (V_1, V_2) و داریم:

$$V_1 = \frac{4}{9} V, \quad V_2 = \frac{1}{12} V,$$

$$V_2 = V_1 - V_2 = \frac{13}{36} V$$

که در آن V ، حجم منشور مفروض است. بنابراین، صفحه مقطع، حجم منشور را به نسبت ۱۳:۲۲ تقسیم می‌کند.

تا بعد

