

شما هم می توانید در درس

ریاضی خود موفق باشید (۹) پرویز شهریاری

کار در منزل

قبل از هر چیز تأکید می‌کنم، تکلیفهای مربوط به هر درس را، در همان روزی انجام دهید که درسش را در دبیرستان خوانده‌اید. فرض کنید امروز دوشنبه است و شما درس جبر داشته‌اید. وقتی بعد از پایان کلاسها به منزل می‌رسید، دفتر جبر خود را بردارید و تکلیفهای جبر را انجام دهید. اگر فقط هفته‌ای یکبار و روزهای دوشنبه با دبیر جبر خود روبه‌رو می‌شوید، تکلیف هر هفته را باید عصر دوشنبه همان هفته انجام دهید، نه عصر یکشنبه هفته بعد! شما هر قدر هم که حافظه‌ای نیرومند داشته باشید، با گذشت یک هفته، بسیاری از نکته‌هایی را که در کلاس شنیده‌اید، از یاد می‌برید و، در نتیجه، نمی‌توانید با موفقیت کامل بر موضوع درس مسلط شوید.

اگر از همان روز نخست سال تحصیلی، کارهای مربوط به هر درس را در همان روزی انجام دهید که درسش را خوانده‌اید، به‌طور محسوسی از دشواریهای شما کاسته می‌شود. بعد از به پایان رساندن کارهای مربوط به همان روز، کافی است مراجعه‌ای تند به درسهای فردای آن روز بکنید تا برای فردا آمادگی کامل داشته باشید. می‌گویم مراجعه‌ای تند به درسها و تکلیفهای فردا کافی است، زیرا هفته قبل، درباره همه زیر و بمهای درسهای فردا دقت کرده‌اید، تکلیفها را به‌طور کامل انجام داده‌اید و اگر با دشواریهای احتمالی برخورد کرده‌اید، در روزهای بعد، ضمن مشورت با هم‌کلاسیها و یا مراجعه به دبیران خود آنها را برطرف ساخته‌اید و حالا، تنها کافی است نگاهی به آنها بیندازید تا همه چیز دوباره به یادتان بیاید.

اکنون ببینیم، برای انجام تکلیفها چه باید کرد! برای هر درس یک دفترچه داشته باشید (تنها یکی) نوع دفترچه و جنس کاغذ و جلد آن، حتی تعداد صفحه‌های آن مهم نیست. اگر دفترچه تمام شد، می‌توانید دفترچه دیگری بردارید و کارتان را روی آن ادامه دهید. همه کارهای خود را در همین یک دفتر انجام دهید. چیزی را پاک نکنید. اگر اشتباهی رخ داد، خط نازکی روی آن بکشید. باید برای خودتان و هم برای دبیرتان روشن باشد، بیشتر در چه زمینه‌هایی اشتباه می‌کنید! تمیزی کار در این نیست که خط خوردگی نداشته باشد، در این است که منظم و خوانا نوشته باشید. یکی از شیوه‌های بی‌نظمی - که با کمال تأسف، بسیاری از دانش‌آموزان، به آن گرفتارند، بی‌ترتیبی نوشته‌هاست. به این معنا که مطلب را - مثلاً ضمن دنبال کردن حل یک معادله - گاهی به صورت ستونی و گاهی به صورت افقی می‌نویسند. نوشته شما باید طوری باشد که اگر کسی بخواهد آن را دنبال یا بازبینی کند، دچار سردرگمی نشود و براحتی متوجه شود، بعد از هر جمله یا فرمول، کدام جمله یا فرمول آمده است!

به عقیده من، بهترین روش نوشتن، صورت افقی آن است. اگر با مطلب توضیحی و توصیفی سر و کار دارید، از راست به چپ، و اگر رابطه‌ها، دستورها و نمادها را به کار می‌برید، از چپ به راست. در ضمن، وقتی با رابطه‌ها و نمادها سر و کار دارید، به این چند نکته توجه کنید:

(۱) اگر از دو طرف برابری چیزی را حذف می‌کنید، اگر صورت و مخرج کسری را ساده می‌کنید، اگر به جای چند جمله مشابه، مجموع

(۳) وقتی از چپ به راست می‌نویسید، ممکن است تمامی مطلب در یک سطر جا نگیرد و مجبور شوید بقیه آن را در سطر بعد بنویسید، در این صورت آخرین نماد سطر قبل را در آغاز سطر بعد تکرار کنید:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x^2 y^2 &= \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + xy\sqrt{3})(x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(در دفتر خود، اول خلاصه درسی را که معلم داده است، بنویسید.) برای این منظور سعی کنید، تنها با به یاد آوردن سخنان معلم و با مراجعه به واژه‌ها و اشاره‌هایی که سرکلاس نوشته‌اید، موضوع درس را روی کاغذ بیاورید. مراجعه به کتاب درسی یا هر کتاب دیگر، مانعی ندارد، ولی تنها وقتی به آن مراجعه کنید که گیر کرده باشید. از رونویسی جمله‌های کتاب و یا تمرینهای حل شده آن، خودداری کنید. خودتان بنویسید: با قلم خودتان و با فکر و استدلال خودتان، آن‌طور که فهمیده‌اید و قانع شده‌اید. در ضمن، نوشته شما باید چنان باشد که نه در جمله بندیهای آن و نه در نوع استدلالها، کمبودی وجود نداشته باشد و هرکسی بتواند از آن استفاده کند. اگر سرکلاس، تمرینی حل شده یا دستور تازه‌ای ثابت شده، به نقل ساده آن اکتفا نکنید. ببینید با درس قبل چه رابطه‌ای دارد! چگونه می‌توان آن را تعمیم داد؟ چه نتیجه‌هایی از آن به دست می‌آید؟ آیا می‌توانید خودتان، مسأله‌ای برای این درس یا این دستور درست کنید؟ آیا راه حل و یا استدلال معلم را پسندیده‌اید؟ اگر ایرادی به آنها دارید و آنها را قانع کننده نمی‌دانید و یا راه حل تازه‌ای به نظرتان می‌رسد (ولو این که راه حل شما دشوارتر باشد)، همه را یادداشت کنید.

یادداشت خلاصه درس کلاس، باید به میدانی برای زور آزمایی فکری شما تبدیل شود. می‌توانید و باید درباره همه استدلالها و درباره همه راه حلها، نظرتان را بگویید. هرگونه شک که نسبت به گفته‌های دیگران به دل خود راه دهید - ولو این که شک شما به جا و درست نباشد - می‌تواند در رشد فکری شما و در سلامتی و استحکام اندیشه شما، نقشی جدی داشته باشد.

جبری آنها را می‌نویسید... چیزی را خط نزنید، بلکه این عملها را با نمادهایی که می‌شناسید مشخص کنید:

$$\frac{95}{133} = \frac{95:19}{133:19} = \frac{5}{7};$$

$$3x^2 - 2x = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 1 = 0 :$$

(۲) اگر برای انجام تبدیلی یا عملی، شرطی وجود دارد، ذکر شرط را فراموش نکنید:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \quad (a \neq b \text{ شرط});$$

$$mx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0 \text{ شرط});$$

همین جا به این نکته هم اشاره کنیم که، اگر برای عمل خود توضیحی دارید، آن را در مقابل عملی که انجام داده‌اید یادداشت کنید.

مثال: می‌خواهیم عبارت $x^2 + y^2 + g^2 - 3xyg$ را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کنیم.

حل: عبارت $x^2 + y^2 + g^2$ را به صورت:

$$(x+y+g)(x^2+y^2+g^2) - xy^2 - xg^2 - x^2y - yg^2 - x^2g - y^2g$$

و عبارت $-3xyg$ را به صورت

$$-xyg - xyg - xyg$$

می‌نویسیم و به این ترتیب گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + g^2 - 3xyg &= (x+y+g)(x^2+y^2+g^2) - \\ &- (x^2y + xy^2 + xyg) - (x^2g + xyg + xg^2) - \\ &- (xyg + y^2g + yg^2) = (x+y+g)(x^2+y^2+g^2) \\ &- xy(x+y+g) - xg(x+y+g) - yg(x+y+g) = \\ &= (x+y+g)(x^2+y^2+g^2 - xy - xg - yg) \end{aligned}$$

به هر حال، هر جا که لازم است توضیح بدهید از چه قانونی، چه دستوری و چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟ چه نتیجه‌ای به دست آورده‌اید؟ برای به دست آوردن این نتیجه، چه شرط یا شرطهایی لازم است؟ ...

بر حسب توانهای $\cos a$ نوشت:

(۲) در بسط $(\cos n a) \sin n a$ ، نتیجه نسبت به $\sin a$ ($\cos a$) از درجه n و تنها شامل توانهای فرد است؛

(۳) در هر حال، مجموع ضریبهای عددی در بسط $\sin n a$ و $\cos n a$ ، قدر مطلق برابر واحد دارد؛

(۴) ضریب بزرگترین درجه در بسط $(\cos (2k+1)a)$ ($k \in \mathbb{Z}$) همیشه مثبت است؛

(۵) ضریب بزرگترین درجه در بسط $\sin n a$ و $\cos n a$ ، از لحاظ قدر مطلق برابر است با 2^{n-1} .

(۶) در حالت $n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ضریبهای جمله‌های هم درجه در بسطهای $\sin n a$ و $\cos n a$ با هم برابر و در حالت $n = 4k-1$ قرینه یکدیگرند. (سعی کنید این «قانونها» را ثابت کنید.)

اگر این «قانونها» درست باشند، می‌توان مثلاً $\cos 7a$ را، بدون بسط مستقیم، به دست آورد. باید داشته باشیم:

$$(\ast) \quad \cos 7a = 64 \cos^7 a + A \cos^5 a + B \cos^3 a + C \cos a$$

برابری $(\ast)$ یک اتحاد و، بنابراین، به ازای هر مقدار حقیقی a برقرار است. اگر a را به ترتیب برابر 0 ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ قرار دهیم، بعد از تبدیلهای ساده، به این سه معادله سه مجهولی (برای A و B و C) می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C = -63 \\ A+2B+2C = -28 \\ A+4B+16C = 0 \end{cases}$$

که از آن، به دست می‌آید:

$$A = -112, B = 56, C = -7$$

یعنی:

$$\cos 7a = 64 \cos^7 a - 112 \cos^5 a + 56 \cos^3 a - 7 \cos a$$

با توجه به «قانون» ۶:

$$\sin 7a = -64 \sin^7 a + 112 \sin^5 a - 56 \sin^3 a + 7 \sin a$$

به نمونه‌ای پردازیم. در کلاس مثلثات، دستورهای مربوط به تابعهای مثلثاتی کمان دو برابر و کمان سه برابر را ثابت کرده‌اند:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ;$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a ;$$

$$\sin 3a = -4 \sin^3 a + 3 \sin a ;$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

(در این جا، به اثبات درستی این دستورها نپرداخته‌ایم، ولی شما باید در دفتر مثلثات خود، آن را بیاورید؛ از این به بعد هم، برای کوتاهی مطلب، از بسیاری از استدلالها و محاسبات صرف نظر کرده‌ایم). خیلی جالب است. در بسط $\sin 3a$ و $\cos 3a$ ، ضریبها در سمت راست برابری، قرینه یکدیگرند و دو دستور مربوط به $\sin 3a$ و $\cos 3a$ خیلی به هم شباهت دارند. درحالی که در مورد $\sin 2a$ و $\cos 2a$ چنین نیست ...

کار را ادامه دهیم، بینیم برای کمانهای $4a$ و $5a$ چه پیش می‌آید. نتیجه‌ها چنین است:

$$\sin 4a = 4 \sin a \cos^3 a - 4 \sin^3 a \cos a ;$$

$$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1 ;$$

این جا هم نتیجه‌های بسط $\sin 4a$ و $\cos 4a$ شباهتی ندارند، ولی برای کمان $5a$ به دست می‌آید:

$$\sin 5a = 16 \sin^5 a - 20 \sin^3 a + 5 \sin a ;$$

$$\cos 5a = 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a$$

شباهت بیشتر شد. ضریبها نه تنها از لحاظ قدر مطلق، که از لحاظ علامت هم، یکی هستند... دستورهای مربوط به کمانهای $3a$ و $5a$ ، این «قانونها» را به ما تلقین می‌کنند. اینها به صورت استقرایی به دست می‌آیند که البته نیاز به اثبات دارند.

برای $\sin n a$ و $\cos n a$ ، وقتی n عددی فرد باشد

$$:(k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1)$$

(۱) می‌توان $\sin n a$ را بر حسب توانهای $\sin a$ و $\cos a$ را

$$= \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + \sqrt{5}-1}{8} \quad (2)$$

بقیه ریشه‌ها را هم می‌توان، با همین روش، به صورت جبری درآورد:

$$\sin^2 6^\circ = \frac{1 - \cos 12^\circ}{2}, \quad 48^\circ = 30^\circ + 18^\circ, \quad 24^\circ = 30^\circ - 6^\circ$$

ولی حقیقت این است که ریشه‌های معادله (۱)، به صورت مثلثاتی خود بسیار ساده‌تر و ملموس‌تر از بیان آنها به صورت جبری هستند: برای مقدار تقریبی $\cos 12^\circ$ می‌توان بلافاصله به جدول مراجعه کرد، درحالی که برای به دست آوردن مقدار تقریبی x ، وقتی به صورت جبری (۲) باشد، باید عملیاتی طولانی را تحمل کرد.

و اما نکته دوم: می‌دانیم هر معادله جبری، به شرطی که جمله بزرگترین درجه آن، با توان فرد باشد:

$$ax^{2n+1} + bx^{2n} + \dots + l = 0$$

دست کم یک ریشه حقیقی دارد. به این معادله درجه سوم توجه کنید:

$$4x^3 - 3x - 5\sqrt{2} = 0 \quad (2)$$

معادله (۲)، بسادگی به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x - \sqrt{2})(4x^2 + 4\sqrt{2}x + 5) = 0$$

معادله (۲)، یک ریشه حقیقی $(x = \sqrt{2})$ و دو ریشه موهومی دارد. اکنون اگر فرض کنیم $x = \cos t$ ، به معادله

$$\cos 3t = 5\sqrt{2} \quad (3)$$

می‌رسیم. $5\sqrt{2}$ از واحد بزرگتر است و، بنابراین، برای t جوابی حقیقی به دست نمی‌آید. این تناقض را چگونه باید حل کرد؟ و آیا، به واقع، به یک تناقض برخوردیم؟

حقیقت این است که تابعهای مثلثاتی را می‌توان به صورت تحلیلی تعریف کرد. اولاً ثابت کرد:

در ضمن، با بسط مستقیم $\sin va$ و $\cos va$ آزمایش شد؛ نتیجه‌ها درست است (این آزمایش را انجام دهید).

جالبتر از همه این است که، به کمک این بسطها، می‌توان برخی معادله‌های جبری بالاتر از درجه دوم را حل کرد. به این معادله توجه کنیم:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \quad (1)$$

که اگر فرض کنیم $x = \cos t$ ، به این معادله می‌رسیم:

$$\cos 5t = \frac{1}{4} = \cos 6^\circ$$

حلی این معادله مثلثاتی ساده است و به دست می‌آید:

$$t = 72k^\circ \pm 12^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در نتیجه، برای ریشه‌های معادله جبری (۱)، به این جوابها می‌رسیم:

$$x_1 = \cos 12^\circ, \quad x_2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \cos 84^\circ = \sin 6^\circ,$$

$$x_4 = \cos 132^\circ = -\cos 48^\circ, \quad x_5 = \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ$$

در این جا توجه دانش‌آموزان را به دو نکته جلب می‌کنیم:

نکته اول: معادله (۱) یک معادله جبری است و ما عادت

کرده‌ایم ریشه‌های یک معادله جبری را به صورت عددهای جبری در اختیار داشته باشیم. ولی اگر مایل باشیم می‌توانیم این ریشه‌ها را به صورت جبری هم بنویسیم. اگر به یاد بیاوریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

آن وقت، برای محاسبه x_1 ، به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos 12^\circ = \cos (30^\circ - 18^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی که در کاشان و سپس در سمرقند در دربار الخ بیگ کار می‌کرد، با استفاده از برابری

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (۴)$$

که در آنها، e عبارت است از عدد نپئر (مبنای لگاریتم طبیعی و به تقریب برابر $۲/۷۳$)، e عددی گنگ و غیر جبری است) و $i = \sqrt{-1}$. اگر از این رابطه‌ها اطلاع داشته باشیم و اگر با عددهای مختلط و عمل با آنها آشنا شویم، آن وقت می‌توانیم ریشه حقیقی معادله (۲) را، به کمک معادله (۳) پیدا کنیم. با توجه به رابطه‌های (۴)، مفهوم تابع مثلثاتی از محدوده تنگ خود آزاد می‌شود و مثلاً تابعهای مثلثاتی عددهای موهومی معنا پیدا می‌کند. در ضمن تابع مثلثاتی یک عدد موهومی، الزاماً مقداری موهومی نیست، به عنوان نمونه:

$$\cos \sqrt{-1} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

و از این شگفت‌تر، رابطه‌ای است که بین عددهای گنگ و غیر جبری π و e و عدد موهومی $\sqrt{-1}$ وجود دارد:

$$e^{2k\pi i} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1})$$

$$\sin 3^\circ = -4 \sin^3 1^\circ + 3 \sin 1^\circ$$

و با در دست داشتن مقدار $\sin 3^\circ$ ، توانست مقدار $\sin 1^\circ$ را با تقریب خوبی به دست آورد.

□

دامنه بحث درباره این درس مثلثات، چنان گسترده است که، با اندکی صرف وقت، می‌توانید نتیجه‌های بسیاری به دست آورید (به یاد داشته باشید که ما در این جا درباره $\lg 3a$ صحبتی نکردیم؛ همچنین با توجه به بسط $\lg(a+b+c)$ می‌توان به نتیجه‌های بسیار جالبی رسید که باز هم به آنها نپرداختیم)، که البته، برای دراز نشدن مطلب از آنها می‌گذریم، ولی از دانش‌آموزان می‌خواهیم تا آن جا که می‌توانند، دامنه بحث را گسترش دهند و خود به نتیجه‌های لازم برسند.

تا بعد

تفویج افندیشه ۱

۱		۳		
				۲
۵				
			۴	

جواب در صفحه ۹۶

مربع مقابل را با عددهای ۶ تا ۲۵ طوری تکمیل کنید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و دو قطر آن برابر ۶۵ شود (مربع وقتی یا مربع جادویی).

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی