

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۸)

پرویز شهریاری

روش یادگیری در کلاس درس

راست بایستید و سعی کنید هر دو دست خود را چندبار و با هم، حرکت دهید، ولی یکی از دستها را بالا و پایین و دیگری را به زاست و چپ ببرید ... حق با شماست. کار دشواری است. دستها تسلیم اراده شما نمی‌شوند؛ حرکتها مخلوط می‌شوند: یا هر دو دست بالا و پایین می‌روند و یا هر دو به راست و چپ حرکت می‌کنند... اگر کسی بخواهد؛ مثلاً "بیست بار پشت سرهم، این حرکت دستها را، درست و بدون اشتباه، انجام دهد، باید ساعتها و روزها تمرین کند و تازه من تردید دارم به نتیجه مطلوب برسد. چرا؟ به ظاهر دشواری از این جا ناشی می‌شود که مغز آدمی نمی‌تواند یا عادت نکرده است، به طور هم زمان، به دو موضوع متفاوت بیندیشد: وقتی به نوع حرکت دست راست می‌اندیشید؛ دست چپ هم از همان اندیشه یا اراده پیروی می‌کند و برعکس.

وقتی در کلاس، جذب سخنان دبیر خود شده‌اید و همه هوش و حواس شما متوجه حرفهای اوست، تقریباً هیچ صدای دیگری را نمی‌شنوید، در حالی که سر و صدای کم و بیش یکنواخت بازی بچه‌ها در حیاط مدرسه و یا عبور اتومبیلها در خیابان، به طور دائم وجود دارد. ولی اگر به سخنان دبیر خود بی‌علاقه باشید، با آن که موجهای حاصل از صدای او به گوش شما می‌رسد، آنها را نمی‌شنوید...

فیلم مورد علاقه خود را تماشا می‌کنید. تلفن زنگ می‌زند و ناچار می‌شوید؛ گوشی را بردارید و با دوست خود صحبت کنید. ضمن مکالمه تلفنی به تلویزیون نگاه می‌کنید. ولی شما که حواستان متوجه سخنان آن طرف سیم تلفن می‌باشد؛ دیگر گفت و شنودهای فیلم

تلویزیونی را نمی‌شنوید؛ و اگر، ضمن تلفن، به فیلم توجه کنید، آن وقت جمله‌هایی از حرفهای دوستان را از دست می‌دهید...

در زبان فارسی ضرب‌المثل جالبی وجود دارد که «بایک دست نمی‌توان دو هندوانه برداشت»

به گمان من، این ضرب‌المثل، اشاره‌ای به همین حقیقت دارد که: «به طور همزمان و با هم، نمی‌توان دو کار را انجام داده. ذهن آدمی، در یک لحظه تنها به یک چیز و یک نقطه توجه دارد و- جز در مورد برخی آدمهای استثنایی (که بسیار نادرند)- نمی‌تواند در عین حال به دو کار متفاوت بپردازد. مغز ما نمی‌تواند دو فرمان مختلف را، همزمان صادر کند که مثلاً، هم درست بنویسیم و هم درست بشنویم. البته، این موضوع، شامل کارهایی نمی‌شود که غریزی‌اند و یا به صورت عادت درآمده‌اند، مثل نفس کشیدن و یا راه رفتن. شما می‌توانید، ضمن راه رفتن صحبت بکنید، ولی اگر بخواهید از عرض یک خیابان شلوغ بگذرید، اغلب ناچار می‌شوید حرف خود را قطع کنید، چرا که، ضمن عبور از عرض خیابان، دیگر از عادت خود پیروی نمی‌کنید و باید حواستان جمع باشد تا با اتومبیلی برخورد نکنید. توصیه می‌کنند، اگر فکر ناراحت کننده‌ای شما را آزار می‌دهد و مانع خواب شما می‌شود، به طور مثال، از ده هزار آغاز کنید و عددها را از بالا به پایین، شمرده و روشن نام ببرید: ده هزار، نه هزار و نه صد و نود و نه، نه هزار و نه صد و نود و هشت... و به شما اطمینان می‌دهند که، در میانه‌های شمارش، خواب به سراغ شما می‌آید. می‌دانید چرا؟ شما در نام بردن عددها، از پایین به بالا، عادت کرده‌اید و اغلب نیازی به تمرکز اندیشه خود ندارید، ولی وقتی از بالا به پایین می‌شمارید، باید حواس و فکر خود را

کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

تازه این خاطره نویسی هم، تمامی مشکل را حل نمی‌کند. هر معلم آزموده، سر کلاس درس، به مناسبت بحثی که پیش می‌آید یا به مناسبت اشتباهی که یک دانش آموز در حل مسئله‌ای مرتکب می‌شود، می‌تواند با یک جمله یا یک اشاره و یا یک خاطره کوتاه، دشواریهای زیادی را از ذهن شما دور کند و مسیر روشنی را در برابر شما بگذارد که با خواندن چند کتاب، به آن نرسید.

همین اشاره‌ها و نکته‌های کوتاه معلم است که وجود مدرسه و کلاس را مفید و لازم می‌سازد. وگرنه، برای حل یک مسئله، یا درک مضمون یک درس، یا به دست آوردن مجموعه‌ای از پرسشها و مسئله‌ها، می‌توانید به کتاب و جزوه‌ها مراجعه کنید و، در واقع، نیازی به معلم و کلاس نداشته باشید.

اگر چنین است، باید تمام توجه شما در کلاس درس، متوجه شکار همین نکته‌ها و اشاره‌ها باشد و این، البته، با یادداشت کردن آنچه معلم روی تخته می‌نویسد، منافات دارد. و باید گفت که رونویسی از نوشته‌های روی تخته، به صورت عاداتی برای بیشتر دانش آموزان درآمده است.

وقتی شما به تخته نگاه می‌کنید و آنچه را که بر آن نقش بسته است، در دفتر خود وارد می‌کنید، به خصوص که همیشه در نگرانی پاک شدن نوشته‌های تخته سیاه به سر می‌برید، نمی‌توانید درباره آنچه می‌نویسید بیندیشید و، بدتر از آن، نمی‌توانید سخنان معلم را بشنوید و درک کنید.

اگر به نوشته یا خط معلم علاقه دارید، می‌توانید دوربینی با خود داشته باشید و هر بار که تخته پراز نوشته شد، عکسی از آن بگیرید! ولی در واقع، این نوشته‌ها یا عکسها، تنها می‌توانند جنبه یادگاری داشته باشند، ولی به یادگیری ریاضیات هیچ ربطی ندارند.

۳- اگر عادت کرده‌اید: وقتی معلم درس می‌دهد، با عجله (و به طور طبیعی، بدون فکر)، همه گفته‌ها و نوشته‌های او را در دفتر خود وارد کنید، باید مطمئن باشید که از درس معلم، اگر نگوییم هیچ بهره‌ای نبرده‌اید، بهره بسیار کمی برده‌اید.

ذهن و اندیشه شما نمی‌تواند، در عین حال، هم متوجه تخته سیاه و نوشتن سریع نقش و نگارهای روی آن، در دفترچه باشد و هم

متمرکز کنید تا دچار اشتباه نشوید: این جا عادت کمک زیادی به شما نمی‌کند. چون فکر نمی‌تواند در دو جای مختلف متمرکز شود، به ناچار از فکر آزار دهنده‌ای که موجب بی‌خوابی شما شده بود، دور می‌شوید و آرام آرام، خواب به سراغ شما می‌آید.

کسانی که به اندازه کافی کار می‌کنند، دائم در اندیشه کار خود هستند و وقتی را به بطالت نمی‌گذرانند، خیلی کمتر از آدمهای بی‌کار، به پزشک مراجعه می‌کنند. بدن آدمی زنده است و هر جزء و هر اندام بدن - هر چند کوچک باشد - باز هم مجموعه‌ای از سلولهای زنده را تشکیل می‌دهد. هر مجموعه زنده، ضمن تلاش و تکاپو، منجر به برخوردهایی در عنصرهای خود می‌شود و آثار ناشی از این تماسها و برخوردها، به نحوی خود را نشان می‌دهند. یکی از آثار تماس سلولهای بدن آدمی با یکدیگر و با دنیای خارج، احساس درد یا احساس سوزش و خارش است. شما هم اکنون که این مقاله را می‌خوانید، نوشته را کنار بگذارید و تمام حواس خود را به این نکته متوجه کنید که، مثلاً "نوک دماغ شما می‌خارده. اگر اندک زمانی، با تمام حواس خود، به آن بیندیشید، متوجه می‌شوید که، در واقع هم، نوک دماغ شما می‌خارد. «بیماران خیالی» بسیارند و گونه‌های متفاوت دارند، ولی یکی از این گونه‌ها بی‌کارانی هستند که به طور دائم، به سلاستی خود می‌اندیشند و «درد» ها و «سوزش» های مختلفی را در اندامهای بدن خود «کشف» می‌کنند.

همین اصل روان شناسی است که باید، ضمن یادگیری، مورد توجه قرار گیرد. به چه منظور به مدرسه می‌روید؟ چرا در کلاس درس حاضر می‌شوید؟ مگر نمی‌شود، آنچه را که می‌خواهید و علاقه‌مندید، ضمن مطالعه و پیش خود به دست آورید؟ کتابها، جزوه‌ها و رساله‌های راهنما در اختیار شماست... پس مدرسه و کلاس چه نقشی دارد؟

۱ - حقیقت این است که همه چیز را نمی‌توان در کتاب درسی و یا کتابهای دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسشهای دانش آموزان و یا بیانهای درست و نادرستی که از زبان دانش آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲ - هنوز عادت نشده‌است که معلمان و نویسندگان کتابهای درسی یا کمک درسی، سعی کنند همه تجربه‌های دوران طولانی کار خود را به روی

لگاریتم حاصل ضرب؛ ... تمرین در صفحه ... از شماره ...
و یا وقتی سر کلاس مثلثات نشسته‌اید:
سینوس و تانژانت مجموع سه کمان، $\frac{\pi}{4}$ (یا π)،
 3α و 5α و 7α ...
تمرین در صفحه ... از شماره ...

شاید کسی، جز خود شما، از این اشاره‌ها چیزی سر در نیاورد، ولی این مهم نیست، مهم این است که با این اشاره‌های کوتاه بتوانید تمامی درسی را که معلم داده است، به یاد آورید. این که با این اشاره‌ها چه کنید، می‌ماند برای کار در منزل که درباره آن صحبت خواهیم کرد.

در کلاس درس ریاضی (و البته، نه تنها ریاضی)، سراپا گوش باشید. سعی کنید حتی یک جمله یا یک واژه درس را از دست ندهید. به موقع بپرسید. تنها برخی اشاره‌ها را یادداشت کنید (و صورت مسأله‌های نمونه را). ترتیبی بدهید وقتی از کلاس بیرون می‌آید، درس تازه را به طور کامل فهمیده باشید.

سر کلاس و موقع درس معلم، خود را به صورت منشی و تندنویس در یک مجلس سخنرانی، در نیاورید. با دقت گوش کنید تا با ظرایف کار و نکته‌های گرهی و آموزنده آشنا شوید. انتقال نوشته‌های روی تخته سیاه به دفترچه شما، هیچ سودی ندارد، حتی به بهتر شدن خط شما هم کمک نمی‌کند، چرا که همه چیز را با عجله و همراه با دل واپسی می‌نویسید.

تا بعد

اشاره‌های پر ارزش معلم را بشنود و درک کند. و چنین است که با ارزشترین چیز را، چیزی را که فلسفه وجودی مدرسه و کلاس بر اساس آن نهاده شده است، از دست می‌دهد.

سر کلاس فقط گوش کنید. با تمام وجود خود گوش کنید. سعی کنید هر واژه‌ای را که از زبان معلم بیرون می‌آید، درک و هضم کنید. تنها در این صورت است که می‌توانید درس را یاد بگیرید، با دشواریهای ذهنی و استدلالی خود آشنا شوید، نقص روشهای کار خود را پیدا کنید... و، در ضمن، به موقع بپرسید، به موقع اعتراض کنید و، در نتیجه، به اشاره‌ها و نکته‌های گرانمای معلم دست یابید.

البته می‌توانید (حتی باید) دفترچه‌ای جلوی روی خود داشته باشید، ولی در آن تنها برخی واژه‌ها را بنویسید همین قدر که به کمک آنها بتوانید، در منزل، سخنان معلم را به یاد آورید. تنها صورت مسأله‌هایی را که معلم، به عنوان نمونه، در کلاس حل می‌کند، در دفتر خود بنویسید و بعد، با تمام وجود خود، به راه حلی که معلم ارائه می‌دهد توجه کنید و حل دوباره این مسأله‌ها را به زمانی واگذارید که به منزل رسیده‌اید.

به عنوان نمونه بحث کلاس مربوط به لگاریتم است. مطلب برای شما تازگی دارد. شما، بدون این که چشم از دیر خود بردارید، با دقت به سخنان او گوش می‌دهید. در پایان درس، این چند واژه یا رابطه پراکنده را بر دفتر خود نوشته‌اید:

لگاریتم = عکس عمل توان؛ مبنای مختلف؛ عدد غیر مثبت و لگاریتم

مبنای بین صفر و یک، مبنای بزرگتر از واحد

$$a^{\log_a x} = x, (a \text{ و } x > 0)$$

ادب و ریاضی

بیضوی است، کاملاً سازگار است. تأسیس ما دایر بر آن که عالم متاهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ.

اما احتمالاً هنوز مسأله عمده این است که نامتناهی جای برحق را در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش یک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفه ریاضی. حسین ضیائی و دیگران

اینشتاین نشان داده است که هندسه اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او بر اساس نظریه جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان‌شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متاهی ممکن است. به علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم

مشتق پذیری

● احمد قندهاری

و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به شرطی که موجود باشد را مشتق چپ

تابع به معادله $y = f(x)$ در نقطه x_0 گویند و آن را به صورت $f'_-(x_0)$ نشان می دهند.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_-(x_0)$ را ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ در طرف چپ نقطه x_0 گویند.

تعریف: اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد و مشتق راست در این نقطه با مشتق چپ در این نقطه برابر و متاهی باشد، آنگاه می گویند، تابع به معادله $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق پذیر است.

مسئله ۱: مشتق تابع به معادله $f(x) = x^2 - x$ را در نقطه $x_0 = 1$ به کمک تعریف بیابید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1}$$

اگر تابع به معادله $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و متاهی باشد، این حد را مشتق تابع

به معادله $y = f(x)$ در x_0 گویند و آن را با نماد $f'(x_0)$ نشان می دهند. در این صورت می گویند این تابع در $x = x_0$ مشتق پذیر است. می دانیم: $f'(x_0)$ برابر ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ است. (۱)

اگر $x - x_0$ را h فرض کنیم و تابع f در x_0 مشتق پذیر باشد می توان نوشت:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مشتق چپ و مشتق راست

به شرطی که موجود باشد را مشتق راست تابع $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

به معادله $y = f(x)$ در نقطه x_0 گویند و آن را به صورت $f'_+(x_0)$ نشان می دهند:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_+(x_0)$ را ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ در طرف راست نقطه x_0 گویند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2}$$

مشتق راست:

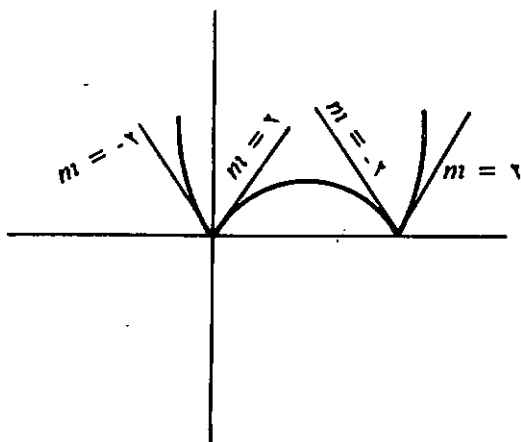
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x| = 2 = f'_+(2) \quad \text{الف}$$

مشتق چپ:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -|x| = -2 = f'_-(2) \quad \text{ب}$$

پس این تابع در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

نمودار تابع به معادله: $y = |x^2 - 2x|$ چنین است.



$$y = f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \text{ یا } x < 0 \\ -2x + 2 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 = f'(1)$$

پس این تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است.

مسئله ۲: مشتق پذیری تابع به معادله $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ بررسی کنید و نمودار تابع و خطوط مماس در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ را رسم کنید همچنین نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: مشتق پذیری تابع فوق را در نقطه $x = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \times |x - 2|}{x}$$

مشتق راست:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \times |x - 2|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x - 2| = 2 = f'_+(0) \quad \text{الف}$$

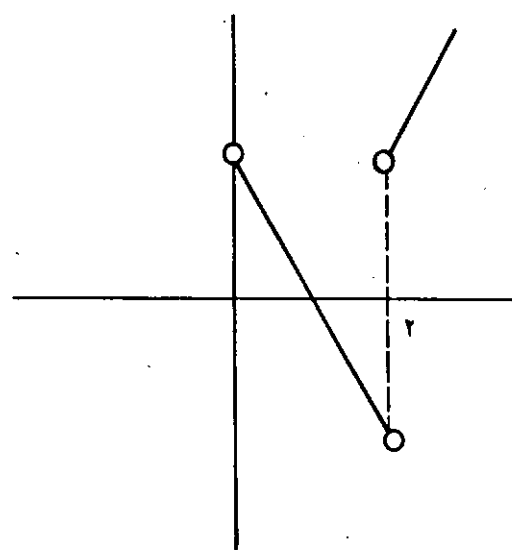
مشتق چپ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \times |x - 2|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -|x - 2| = -2 = f'_-(0) \quad \text{ب}$$

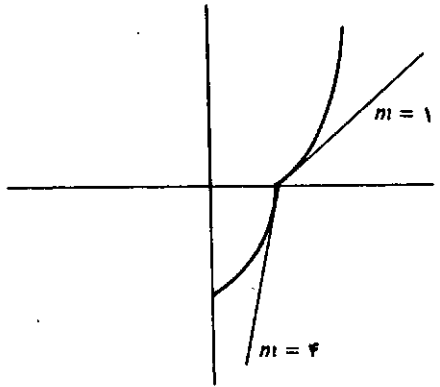
پس این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

حال مشتق پذیری تابع فوق را در نقطه $x = 2$ بررسی می‌کنیم.

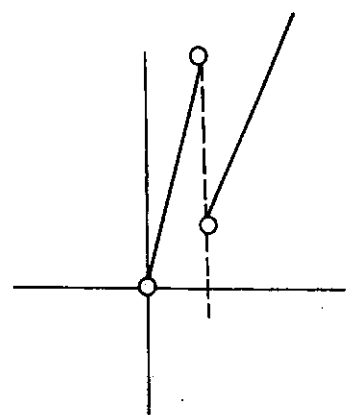
نمودار تابع مشتق چنین است:



نمودار تابع فوق چنین است:



نمودار تابع مشتق: $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 4x & 0 < x < 1 \end{cases}$ چنین است:



مسئله ۳: مشتق پذیری تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ 2x^2 - 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

رادر $x_0 = 1$ بررسی کنید. و نمودار تابع و نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: مشتق پذیری این تابع رادر $x_0 = 1$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = f'_+(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4 = f'_-(-1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق پذیر نیست.

مسئله ۴: مشتق پذیری تابع به معادله: $f(x) = x^2 + x$ رادر نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$$

مماس در A : $f'(1) = 3$

مسأله ۶: مشتق پذیری تابع به معادله $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x + 2}$ را

در نقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 2$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1$$

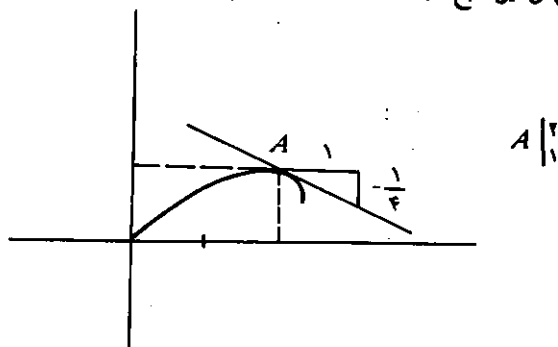
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2 - x + 2} - 1}{x - 2} = \text{ثانیاً:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x - 2}{(x - 2)(x^2 - x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 1)}{x^2 - x + 2} = -\frac{1}{4}$$

مماس در $A: f'(2) = m$

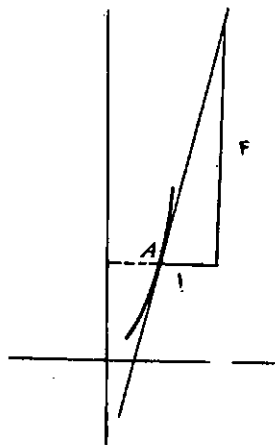
پس این تابع در نقطه $x_0 = 2$ مشتق پذیر است.



مسأله ۷: مشتق پذیری تابع به معادله $f(x) = \cos \sqrt{x}$ را در

نقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 2$ پیوسته است، زیرا:



مسأله ۵: مشتق پذیری تابع به معادله $f(x) = \sqrt{x} + 2x$ را در

نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \sqrt{3}$$

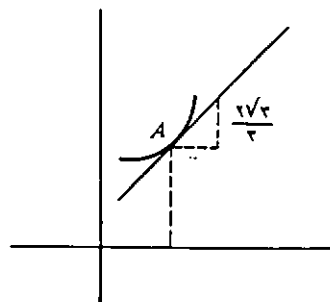
ثانیاً:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 2x - \sqrt{3}}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 2x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + 2x + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)(\sqrt{x} + 2x + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 2x + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{\sqrt{x} + 2x + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = f'(1) = m$$

مماس در A :

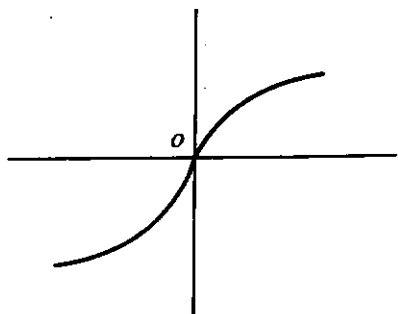


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} \quad \text{ثانیاً:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(0 \pm)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'(0)$$

چون $f'(0) = +\infty$ ، می‌گوییم این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

شکل منحنی و خط مماس در $x_0 = 0$ چنین است:



تعریف: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در نقطه x_0 نامتناهی و هم‌علامت باشند، نقطه x_0 را نقطه عطف منحنی می‌گوییم.

مسئله ۹: مشتق‌پذیری تابع به معادله $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در نقطه $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2} = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\text{ثانیاً:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

مشتق راست:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'_+(0)$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \cos \sqrt[3]{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \sqrt[3]{x^3} - \cos \sqrt[3]{2}}{x - 2} \quad \text{ثانیاً:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sqrt[3]{2} \sin \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2}}{2} \sin \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2}}{2}}{x - 2}$$

توجه:

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow \sin \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2}}{2} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2}}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sin \sqrt[3]{2}) \times \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sin \sqrt[3]{2}) \times \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sin \sqrt[3]{2}) \times \frac{x^3 - 2}{(x - 2)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sin \sqrt[3]{2}) \times \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4x^2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sin \sqrt[3]{2}) \times \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2 \sin \sqrt[3]{2}}{2 \sqrt[3]{2}} = f'(2)$$

پس این تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است.

مسئله ۸: مشتق‌پذیری تابع به معادله $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

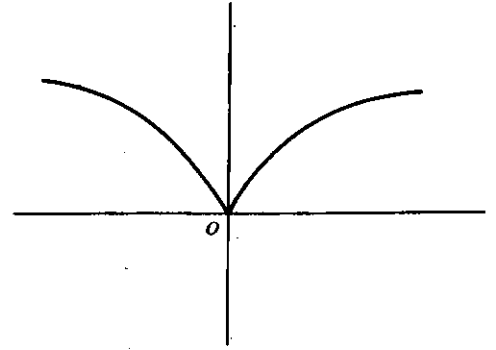
$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

مشتق چپ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{0^-}} = \sqrt{-\infty} = -\infty = f'(0^-)$$

بنابراین، این تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

نمودار تابع و خطوط مماس چنین است:



توجه: دو نیم مماس چپ و راست در نقطه $x=0$ برهم منطبقند.

تعریف: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد و مشتقهای راست و چپ در نقطه x_0 نامتناهی و مختلف علامه باشند، نقطه x_0 را نقطه بازگشت منحنی تابع گوئیم. البته نقطه بازگشت نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی منحنی است (ثابت می شود).

مسئله ۱۰: مشتق پذیری تابع

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را در $x=0$ بررسی کنید.حل: اولاً این تابع در $x=0$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

⇒ عددهای نامشخص در فاصله $[-1, 1]$ =

پس $f'(0)$ در این تابع برابر عددی نامشخص در فاصله $[-1, 1]$ است بنابراین تابع فوق در $x=0$ مشتق پذیر نمی باشد.

مسئله ۱۱: در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 & x \geq 2 \\ bx^2 + 2 & x \leq 2 \end{cases}$ را چنان بیابید تا تابع در $x=2$ مشتق پذیر باشد.

حل: اولاً تابع فوق باید در $x=2$ پیوسته باشد پس باید در $x=2$ حد داشته باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4b + 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{4a = 4b + 2} \quad (1)$$

ثانیاً: تابع فوق در $x=2$ مشتق پذیر است پس مشتقات راست و چپ باید مساوی باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax^2 - 4a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x^2 - 4)}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx^2 + 2 - 4b - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b(x^2 - 4)}{x - 2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} a(x+2) = 6a$$

$$\boxed{6a = f'(2^+)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx^2 + 2 - 4b - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} b(x+2) = 4b = f'(2^-)$$

$$-4 = f''_-(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2bx + c - c}{x} = 2b = f''_-(0)$$

$$\Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\Rightarrow \boxed{12a = 4b}$$

(۲)

$$\begin{cases} 8a = 4b + 2 \\ 12a = 4b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = -\frac{2}{2}}$$

نقطه زاویه دار

تعریف: اگر تابع f در فاصله (a, b) پیوسته باشد و $a < x_0 < b$ اگر مشتقات راست و چپ در نقطه x_0 موجود، غیر مساوی و متناهی باشد یا حداکثر یکی از مشتقات راست یا چپ نامتناهی باشد، در این صورت نقطه به طول x_0 را نقطه زاویه دار منحنی گوئیم.

مساله ۱۳: مشتق پذیری تابع به معادله

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x < 0 \end{cases} \quad \text{را در } x_0 = 0 \text{ بررسی کنید.}$$

آیا در این تابع نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه زاویه دار است؟

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{+\infty} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x - 1) = -1 = f'_-(0)$$

نتیجه: این تابع در $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست و بنا به تعریف فوق

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & x \geq 2 \\ -\frac{2}{3}x^3 + 2 & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{پس تابع کبه صورت: می باشد.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + a & x \geq 0 \\ bx^2 + cx - 1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{مساله ۱۲: تابع به معادله}$$

مفروض است. اگر $f''(0)$ وجود داشته باشد (یعنی تابع $f'(x)$ در $x_0 = 0$ مشتق پذیر باشد) a و b و c را بیابید.

حل: اولاً تابع f و تابع f' باید در $x_0 = 0$ پیوسته باشند، پس باید در $x_0 = 0$ حد داشته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 4x & x \geq 0 \\ 2bx + c & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

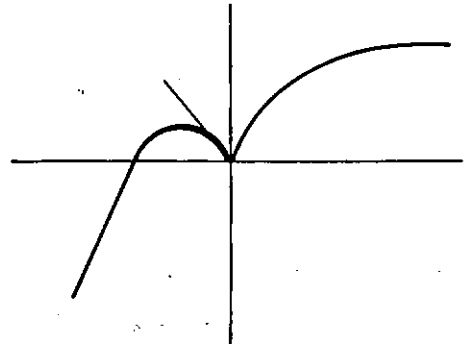
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = c$$

ثانیاً: تابع $f'(x)$ باید در $x_0 = 0$ مشتق پذیر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3 - 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4x^2 - 4) =$$

نقطه $x_0 = 0$ نقطه زاویه دار است.

نمودار تابع و نیم خطهای مماس چنین است:



چند نکته

۱- تابع به معادله $f(x) = |x|$ در نقاط $x_0 \in Z$ حد ندارد، پیوسته

نیست و مشتق پذیر هم نمی باشد.

۲- تابع به معادله $f(x) = |x|$ در نقاط $x_0 \in (R - Z)$ حد دارد،

پیوسته است و مشتق پذیر هم می باشد ولی مشتق آن صفر است.

۳- تابع $f(x) = |x - a|$ در $x = a$ مشتق پذیر نیست.

۴- تابع به معادله $f(x) = |(x - a)^{n+1} (x - b)^{2n}|$ در $n \in N$ ،
در $x = a$ و در $x = b$ مشتق پذیر است.

۵- تابع به معادله $f(x) = \sqrt[n+1]{(x - a)^{2n+1}}$ در $n \in N$ ،
مشتق پذیر نیست.

۶- تابع به معادله $f(x) = (x - a)^{n+1} \sqrt[n+1]{x - a}$ در $n \in N$ ،
در $x = a$ مشتق پذیر است.

۷- تابع به معادله $f(x) = \sqrt[n]{x - a}$ در $n \in N$ ،
در $x = a$ مشتق پذیر نیست.

۸- تابع به معادله $f(x) = (x - a)^{n+1} \sqrt[n]{x - a}$ در $n \in N$ ،
در $x = a$ مشتق پذیر نیست.

۹- در نمودارها در هر نقطه که خط مماس بر منحنی موازی محور y ها
باشد، تابع آن نمودار در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

۱۰- در نمودارهایی که زاویه دار باشد، تابع آن نمودار در نقطه
زاویه دار مشتق پذیر نیست.

۱- در فصل (۶) کتاب جبر سال سوم ریاضی (تحت عنوان تعبیر هندسی مشتق)
اثبات شده است.



فقر بچ افند میشه!

با در دست داشتن چهار گزاره زیر، نتیجه ای چنان بگیرد که اولاً:
استدلالتان درست باشد، ثانیاً: هر چهار گزاره برای آن نتیجه لازم
باشند.

تمام وکلای دادگستری ثروتمندند.

شعرا حساس اند.

جواب در صفحه ۹۶