

شما هم می توانید در درس ریاضی خود

موفق باشید (۶)

• پرویز شهریاری

در این جا و به مناسبت نامه‌ای که یک خواننده دانش آموز فرستاده است؛ ناچاریم درباره آنچه تا این جا گفته‌ایم، اندکی توضیح بدهیم. این دانش آموز، در نامه مفصل خود، از جمله می‌پرسد: «اگر قرار باشد، ضمن مطالعه درسهای ریاضی، یا ضمن گوش دادن درس معلم و یا بعد از آن که مسأله‌ای را حل یا قضیه‌ای را ثابت کردیم، همچنان در «شک» باقی بمانیم و فرض را بر این بگیریم که ممکن است همه اینها نادرست باشند، آیا اعتماد خود را نسبت به ریاضیات (و به طور کلی دانش) از دست نمی‌دهیم و دچار نوعی سرگردانی فکری نمی‌شویم؟» من، برای دوری از درازی مطلب و روشنتر شدن آن، پرسش این دوست دانش آموز را بازسازی کرده‌ام و، با نقل به معنی، در این جا آورده‌ام.

اول، جمله‌ای پرمضمون را، از عین القضات همدانی، به نقل از یکی از نامه‌های او، می‌آوریم:

«... چندین هزار جنازه که به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را درد طلب بگیرد و یکی به راه راست نیافتد...»

و این بویژه هشدار است برای همه آنها که می‌خواهند، در کار علمی خود «به راه راست بیفتند»، «شک» آغاز کار است، نه پایان آن. «شک» هدف نیست، بلکه وسیله‌ای است برای نزدیکتر شدن به «حقیقت» و اگر درست و بجا و اندیشیده نباشد، به قول دوست دانش آموز ما، موجب «بی‌اعتمادی» و در نتیجه «سرگردانی فکری» می‌شود.

معمولاً، وقتی کسی می‌خواهد، نظر خود را به طرف بقبولاند و استدلال و داوری خود را قاطع و بدون بحث نشان دهد، از ضرب المثل «مثل دو دوتا، چهار تاست» استفاده می‌کند. در این ضرب المثل، قضاوتی نهفته است که، بنابر آن، هر حکم ریاضی، ثابت، بی‌تغییر و غیر قابل اعتراض است. ولی باید بگوییم که این ضرب المثل، در ریاضیات، کمتر از هرجای دیگری صدق می‌کند. در این مورد، می‌توان مثالهای بسیار و ساده و عامیانه‌ای آورد. می‌گوییم $1 = \frac{1}{4} \times 2$. ولی اگر شما، یکی از کشفهای خود را از وسط و در جهت درازی آن بپريد و به دو نیمه برابر تقسیم کنید، این دو نیمه کفش، با یک کفش کامل، برابر نیست؛ یعنی نمی‌تواند کار یک کفش را انجام دهند. اگر قطعه‌الماسی را نصف کنید، ارزش این نیمه روی هم، برابر با ارزش قطعه اصلی نیست... می‌گوییم $20 = 10 + 10$ ، ولی اگر ۱۰ لیتر آب را با ۱۰ لیتر الکل، مخلوط کنیم، روی هم ۱۹ لیتر «آب و الکل» به دست می‌آید (تداخل مولکولهای آب و الکل، حجم مجموع را اندکی کاهش می‌دهد). همین مثالهای ساده به ما نشان می‌دهد: ریاضیات، ابزاری برای دفع دشواریهای زندگی (و از آن جمله صنعت و دانشهای دیگر) است، ریاضیات، چیزی مجرد و جدا از زندگی نیست که تنها زائیده ذهن آدمی باشد. بنابرین، در هر مورد خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید با تجربه و واقعیت تطبیق کند... و اگر درجایی، در ریاضیات به پاسخی نادرست رسیدیم، باید ریاضیات را عوض کرد نه زندگی را.

ریاضیات از مشاهده و تجربه (هم تجربه بیرونی و هم تجربه درونی و ذهنی) بیرون آمده است و، بتدریج، همچون درختی که

ثانیه) است... مفهوم ریاضی متغیر و تابع، چیزی جز تعمیم انتزاعی مقدارهای متغیر مشخص (مثل زمان، مسافت، سرعت، زاویه دوران و غیره) و رابطه‌های مشخص بین آنها (مثل رابطه‌ای که بین مسافت پیموده شده با زمان وجود دارد) نیست. همان‌طور که «عدد حقیقی» شکل انتزاعی اندازه کمیت است، همان‌طور هم، «متغیر» شکل انتزاعی کمیتی است که تغییر می‌کند. کمیتی که می‌تواند مقدارهای مختلفی را بپذیرد. کمیت متغیر ریاضی، عبارت است از «چیزی»، یا بهتر بگوییم «چیز دلخواهی»، که می‌تواند مقدارهای عددی مختلف را قبول کند. بنابراین، متغیر ریاضی، یک مفهوم عام است و زیر عنوان آن، می‌توان هم زمان، هم مسافت و هم هر کمیت دیگری را فهمید. به همین ترتیب، تابع، عبارت است از شکل انتزاعی بستگی یک کمیت با کمیت دیگر. وقتی می‌گوییم « y تابعی است از x »، در ریاضیات تنها به این معنی است که، برای هر مقدار x ، مقدار متناظر معینی برای y وجود دارد... مثلاً، بنابر قانون سقوط جسم، مسافتی که جسم در حال سقوط، در زمان معینی طی می‌کند، به کمک دستور (۱) به دست می‌آید: مسافت، تابعی از زمان. انرژی یک جسم متحرک، بر حسب جرم و سرعت آن، با دستور زیر بیان می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \quad (2)$$

برای یک جسم مفروض، انرژی آن (E)، تابعی است از سرعت آن (v)... مقدار حرارتی که، ضمن عبور جریان برق، در واحد زمان ایجاد می‌شود، با دستور

$$Q = \frac{1}{\rho} RI^2 \quad (3)$$

به دست می‌آید؛ که در آن، I نماینده شدت جریان و R نماینده مقاومت سیمی است که جریان برق از آن می‌گذرد. برای مقاومت مفروض، هر شدت جریان I ، متناظر است با

به طرف بالا و به دوروبر خود قد می‌کشد و می‌گسترده، با استفاده از قراردادها، قضیه‌ها و استنتاجها، رشد کرده و تکامل یافته است. ولی تکامل ریاضیات، در مقایسه با رشد درخت، دو خصلت اساسی دارد: اول این‌که، این تکامل، به پایان خود نرسیده و هرگز هم، به نقطه پایان خود نمی‌رسد. ریاضیات، زنده و پویاست و نمی‌تواند در «قالبی محدوده محبوس بماند». «نفی» گذشته ریاضیات، به معنای نفی بی‌دقیه‌ای آن است و نه نفی کامل گذشته. با تکامل ریاضیات و با دقیق‌تر شدن آن، به قانونها و «آلگوریتمهای» عامتری می‌رسیم که شمول بیشتری دارند و کارآمدتر از قانونها و آلگوریتمهای قبلی‌اند. برای این‌که به شمول دستورهای ریاضی پی‌بریم که چگونه، یک رابطه ریاضی یا یک بررسی خالص ریاضی، می‌تواند پدیده‌ها و روندهای مختلفی را شرح دهد و در زمینه‌های گوناگونی از دانشهای طبیعی کاربرد پیدا کند، مثال ساده‌ای را از کتاب «محتوی، روش و اهمیت ریاضیات» می‌آوریم که، گرچه به ریاضیات مقدماتی و دبیرستانی مربوط می‌شود، می‌تواند معرف تواناییهای ریاضیات در توضیح قانونهای موجود در طبیعت باشد:

«... در سده شانزدهم، بررسی حرکت، در مرکز توجه دانشهای طبیعی قرار داشت. نیازهای زندگی و پیشرفت دانشهای طبیعی، این دانشها را در آستانه بررسی گونه‌های مختلف تغییر، و بررسی بستگی بین کمیت‌های متغیر قرار داد. مفهومهای متغیر و تابع، به عنوان بازتابی از ویژگیهای عمومی کمیت‌های متغیر و رابطه بین آنها، در ریاضیات به وجود آمد. و این، به معنای پیشرفت ریاضیات و به معنای انتقال به دوره‌ای تازه، یعنی دوره کمیت‌های متغیر بود. قانون حرکت جسم، روی مسیر مفروض، و مثلاً روی خط راست، از روی مسافتی که در طول زمان می‌پیماید، معین می‌شود. مثلاً گالیله (۱۵۶۴ - ۱۶۴۲)، قانون سقوط جسم را کشف و ثابت کرد، مسافتی که جسم در حال سقوط می‌پیماید، با مجذور زمان متناسب است. این قانون، با دستور زیر نشان داده می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} gt^2 \quad (1)$$

که در آن، مقدار g به تقریب برابر $۹/۸۱$ (متر بر مجذور

پیشرفت صنعت و پیچیده تر شدن زندگی، موجب شده است تا این «نظریه فراموش شده» به میدان آید و کاربرد خود را پیدا کند. کوتاه شده‌ای از یک بخش کتاب «مهمترینها در ریاضیات» نوشته «فلدبلوم» را، که بسیار خواندنی است، در این جا می آوریم:

«... نزدیک به صد سال پیش از آپولونیوس و در سال ۳۵۰

پیش از میلاد، مقطعهای مخروطی به وسیله مناخوسموس کشف شد، ولی... به فراموشی سپرده شد. آپولونیوس این آثار را زنده کرد و کارهای مناخوسموس را ادامه داد، آثار آپولونیوس را کسی نمی خواند... و تنها عده کمی از دانشمندان از وجود این آثار آگاه بودند... در سده شانزدهم، با پیشرفت اخترشناسی و مکانیک، این نظریه فراموش شده دوباره زنده شد... به نحوی که بسیاری از دانشها بدون وجود این نظریه، نمی توانستند پیشرفت کنند... و یوهان کپلر و ایساکنیوتون، برای روشن کردن ویژگیهای مدارهای سیاره ها، به آموزش آپولونیوس درباره مقطعهای مخروطی رو آوردند... اندکی بعد، در سده هفدهم، پیرفرما و رنه دکارت، براساس مقطعهای مخروطی، نظریه قاره ای به نام «هندسه تحلیلی» را در ریاضیات به وجود آوردند... نظریه مقطعهای مخروطی قریب دوهزار سال در بوته فراموشی بود و... ناگهان، این دانش فراموش شده زنده شد و، به کمک آن، شاخه های تازه ای در دانش انسانی پدید آمد...

سیمون دنی پواسون، ریاضی دان فرانسوی، در سال ۱۸۲۴، در نظریه ریاضی مغناطیس، معادله های مربوط به وضع عقربه های قطب نما در کشتی را پیدا کرد. قبل از پواسون، کسی، تأثیر برهم زنده فلزی که در چوب بست کشتی و دیگر تجهیزات آن به کار رفته است، به حساب نمی آورد؛ ولی پواسون برای نخستین بار، این شرایط را هم، در معادله های خود، در نظر گرفت... این کار خالص نظری، در نظر کشتی سازان و دریانوردان به عنوان کاری غیر لازم ولی فایده جلوه کرد و... به این ترتیب، این کشف، به عنوان کاری ذهنی، که فایده عملی ندارد، کنار گذاشته شد. ولی دریانوردان، خیلی زود به دشواریهایی برخوردند که، برای

مقدار معینی از حرارت Q که در واحد زمان به دست می آید: Q تابعی است از I. مساحت S از مثلث قائم الزاویه ای که یکی از زاویه های حاده آن برابر α و ضلع مجاور به این زاویه و زاویه قائمه مثلث برابر x باشد، با دستور

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot x^2 \quad (۴)$$

بیان می شود. اگر زاویه α معلوم باشد، مساحت مثلث تابعی است از ضلع x آن. همه دستورهای از (۱) تا (۴) را می توان به صورت یک رابطه عام نوشت:

$$y = \frac{1}{2} a x^2 \quad (۵)$$

که به معنای انتقال از کمیت های متغیر مشخص v, s, t و E ، I و Q, X و S ، به متغیرهای کلی و عام x و y است: انتقال از رابطه های مشخص (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، به صورت کلی آنها، یعنی رابطه (۵). اگر مکانیک و الکتریسته، با دستورهای مشخص (۱)، (۲)، (۳) سروکار دارند (که به کمیت های مشخصی مربوط می شوند)، دانش ریاضی با دستور کلی و عام (۵) (که به هیچ کمیت مشخصی مربوط نیست) سروکار دارد...

دوم این که، نتیجه گیریهای ریاضی، ریشه در تجربه آدمی دارند و، سر آخر هم، باید با تجربه آدمی سازگار در آیند. به همین سبب است که انتزاعترین و مجردترین نظریه های ریاضی، سرانجام کاربرد عملی پیدا می کنند. شناسایی و رده بندی چندوجهیهای منتظم و نیمه منتظم، مقارن و نیمه مقارن، مورد استفاده دانش بلورشناسی قرار می گیرد و گونه های مختلف بلورها، به کمک نظریه ریاضی چندوجهیها شناخته می شود. هندسه نااقلیدسی راه محاسبه دقیقتر را، برای پرواز سفینه های فضایی باز می کند؛ فضای بی نهایت بعدی، کاربرد خود را در نظریه کوانتومها به دست می آورد؛ از عده های موهومی، برای مسأله های حقیقی استفاده می شود و غیره و غیره. پیش آمده است که یک نظریه ریاضی، سالها و حتی سده های متوالی، بی مصرف مانده است، ولی

بشر می‌تواند، به کمک ریاضیات، مسأله‌های بسیار پیچیده‌ای از صنعت را حل کند... در سال ۱۸۵۷، برای نخستین بار، بین اروپا و آمریکا، از زیر دریا سیم‌کشی کردند. وقتی کار به پایان خود نزدیک می‌شد، کابل در جایی در عمق دریا آسیب دید. همه تلاش‌ها برای ترمیم خرابی، با ناکامی روبه‌رو شد. کابل کار نمی‌کرد. نشانه‌های مؤرس را نمی‌پذیرفت... به نظر می‌رسید، زحمت فوق‌العاده مهندسان و متخصصان و کارگران، از بین رفته‌است... از همه امکانهایی که در آن زمان، یعنی نیمه سده نوزدهم، وجود داشت، استفاده کردند، ولی نتوانستند کابل را به کار ببندازند... برای حل مشکل، به ویلیام تومسون، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان انگلیسی مراجعه کردند. تومسون همه نظریه‌های ریاضی سودمند را به یاد آورد و روی یکی از نظریه‌ها، که به وسیله فوریه ریاضی‌دان فرانسوی، شصت سال قبل، درباره نظریه ریاضی هدایت گرما تنظیم شده بود، توقف کرد. تومسون، در ضمن، متوجه یکی از کارهای ژوگین، ریاضی‌دان انگلیسی شد که ۳۵ سال پیش از آن انجام داده بود و سرانجام، ویلیام تومسون در سال ۱۸۵۸ موفق شد، به کمک معادله‌های فوریه و گرین مسأله را حل کند... کابل به راه افتاد و نشانه‌های مؤرس، روشن و با صدای کافی، منتقل شد....

اگر «شک» نبود، ریاضیات، در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد. و البته، نه تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند. اگر به نظریه ارسطو، درباره سقوط آزاد جسم شک نمی‌کردند و کسانی پیدا نمی‌شدند که جرأت کنند و بگویند «ممکن است، معلم اول و استاد بزرگ، اشتباه کرده باشد»، قانونهای سقوط آزاد جسم کشف نمی‌شد. جریان این است که ارسطو، با تکیه بر «عقل سلیم» و «معرفت شهودی» می‌گفت، اگر دو جسم را از یک بلندی رها کنیم، آن که سنگینتر است، زودتر به زمین می‌رسد. آزمایش نشان می‌داد که گلوله فلزی و گلوله چوبی، ضمن سقوط آزاد، در یک زمان به زمین می‌رسند. ولی هواداران ارسطو، با مشاهده و تجربه اعتقاد نداشتند و حتی تا سده هفدهم و زمان گالیله حاضر نبودند تن به آزمایش بدهند

رفع آنها، ناچار شدند به معادله‌های پواسون رو آورند. در سال ۱۸۶۲، در طول یک ماه، تمام کشتیایی که از انگلیس حرکت کرده بودند، غرق شدند، در ساحل ایرلند، دو کشتی بزرگ مسافری، یکی پس از دیگری غرق شد. رهبری نیروی دریایی انگلیس دچار وحشت و پریشانی شد... گروه‌های صلاحیت‌دار، برای بررسی علت نابودی کشتیها تشکیل شد. معلوم شد، علت اصلی، مربوط به نارسایی و اشتباه قطب‌نماهاست... در آن زمان، کشتیها را از چوب می‌ساختند و فلز کمی در آنها به کار می‌رفت. اثر این مقدار فلز در قطب‌نما ناچیز بود و می‌شد از آن صرف‌نظر کرد. ولی بتدریج، فلز کشتیها را زیاد و زیادتر می‌کردند. در میانه‌های سالهای چهل سده نوزدهم، به‌طور گسترده‌ای، کشتی‌سازی فلزی پیشرفت کرد و دیگر، صرف‌نظر کردن از آنها در مورد قطب‌نماهای جهت‌یاب، درست نبود. ولی کشتیها هنوز با همان مدیریت کهنه اداره می‌شد... این جا بود که معادله‌های پواسون می‌توانست مورد استفاده قرارگیرد. این معادله‌ها به اندازه‌ای لازم بود که، بدون آنها، کشتی‌رانی جدید معنایی نداشت... ریاضی‌دانها، با تغییرهایی که در این معادله‌ها دادند، آنها را ساده‌تر کردند و، به کمک آنها، راه عملی را، برای مدیریت جدید کشتیها، در تعیین انحراف قطب‌نما پیدا کردند... مدیریتی که در زمان ما هم از آن استفاده می‌کنند... در میانه‌های سده نوزدهم، کتاب ژرژ بول ریاضی‌دان ایرلندی، درباره منطق ریاضی، منتشر شد. در آن زمان، درباره این اثر می‌گفتند: «این، نوعی بازی با علامتها و دشمن هرگونه تفکر است»، «این تألیف، هیچ‌گونه ارزش عملی ندارد». و، بنابراین، نوشته بول، در آن موقع، مورد تأیید کسی قرار نگرفت. ولی سالها بعد، این اثری که «دشمن هرگونه تفکر بود» و «هیچ‌گونه ارزش عملی نداشت»، در کار ساختمان ماشینهای محاسبه و کامپیوترها، کاربرد پیدا کرد...

در واقع، حتی یک نظریه ریاضی نمی‌توان پیدا کرد که، وقتی در مسیر طبیعی پیشرفت دانش قرار می‌گیرد، موضعی در مقابل واقعیتها داشته باشد... ریاضیات، سالها از صنعت جلوتر است و

اعتقاد داشت، چرا که به قول دکارت:

«... به نظر می‌رسد که می‌توانستم، در استدلال‌های کسانی که با عمل سروکار دارند، با حقیقت بیشتری روبه‌رو شوم، زیرا اگر اینها دچار اشتباه شوند، خیلی زودتر از دانشمندی که در اطاقهای درسته، به استدلال مشغول‌اند، کیفر اشتباه خود را می‌بینند...»

و گالیله، ضمن به‌سخره گرفتن مخالفان مشاهده و آزمایش می‌گوید:

«... بعضی از فیلسوفانی که مقدمات فیزیک را درس می‌دهند، مبنی کار خود را بر آنچه قبلاً گفته شده است... می‌گذارند و نظر خود را، نه از آنچه کاملاً شناخته شده است، بلکه خیلی ساده، از ناشناخته‌ها و ناشنیده‌ها نتیجه می‌گیرند... (به این ترتیب) ما از چنان روشی استفاده می‌کنیم که، هر اثبات لازم را، از چیزی که اثبات شده است، نتیجه بگیرد. ولی من، اگر ممکن باشد هرگز پایه استدلال خود را، بر چیزی که خود نیاز به اثبات دارد، نمی‌گذارم، اگرچه آن را حقیقت بپنداریم...»

حتی در تاریخ ریاضیات هم، می‌توان به نمونه‌های گمراه‌کننده‌ای از «استدلال» برخورد کرد که به‌خاطر طولانی نشدن مطلب، آن را به شماره بعدی برهان وامی‌گذاریم.

تا بعد

و همچنان بر نظریه ارسطو پای می‌فشرده‌اند. گالیله در نوشته خود به نام «گفت و شنود»، به کسی که هوادار نظریه ارسطو است، می‌گوید: «... اگر این باور شما درست باشد، باید بتوانید آن را آزمایش کنید، یعنی اگر دو وزنه هم‌جنس را، یکی به وزن صد پوند و دیگری به وزن یک پوند، در یک لحظه، از نقطه‌ای به ارتفاع ۱۰۰ آزش رها کنید، وقتی وزنه سنگین‌تر به زمین می‌رسد، باید وزنه یک پوندی، تنها یک آزش را پیموده باشد، زیرا بنا به نظریه ارسطو، سرعت سقوط آزاد جسم، باید به نسبت وزن آنها باشد. گالیله حتی بارها، آزمایش خود را در برابر دیگران انجام داد و برای این منظور از برج «پیزا» بالا رفت و وزنه‌هایی با وزنه‌های مختلف از بالای برج رها کرد، ولی جزم‌اندیشان هوادار ارسطو، با تکیه بر «استدلال عقلی» و نفی آزمایش، حقیقت را نمی‌پذیرفتند.

از زمانی که در سده‌های میانه، «علم ارسطویی» را به عنوان «کلام آخر» قبول کرده بودند، کسی حاضر نبود در مورد آموزشهای ارسطو، ولو این که نادرستی آنها روشن باشد، «شک» کند و به قول ابن خلدون، مورخ و منتقد بزرگ:

«... استباطی که بعضی عقاید انحرافی نسبت به علم داشتند، آن را از صفحه اذهان خارج ساخت و، به جای آن، اعتقاد به موهومات نشست...»

ولی گالیله، همچون دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، به مشاهده و تجربه

ادب ریاضی

را به عنوان موجودات فردی و متمایز مورد مطالعه قرار نمی‌دهند، بلکه آنها را همچون اعضای طبقات و مجموعه‌هایی در نظر می‌گیرند که شامل بی‌نهایت شیء از همین نوع می‌باشند، همچون مجموعه تمام اعداد صحیح یا مجموعه اعداد حقیقی، یا تمام مثلثهایی که در صفحه قرار دارند.

ریاضیات چیست؟
ترجمه: حسن صفاری

برای ما امکان ندارد که علامت ∞ را در دستگاه اعداد حقیقی جای دهیم و در عین حال قواعد اساسی حساب را نیز محفوظ بداریم. لیکن باید دانست که مفهوم بی‌نهایت تمام ریاضیات را احاطه کرده است، زیرا معمولاً موجودات ریاضی