

شما هم می توانید در

درس ریاضی خود موفق باشید (۳)

پرویز شهریاری

کرده و خطاهایی را که زیباییهای اندیشه‌های کهنه را می‌پوشاند، پاک کرده‌اند. اینان سزاوار تحسین‌اند...

اول، به این دلیل که قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه، چنان بفرنج‌اند که هرگز، یک یا چند بررسی، یک یا چند دیدگاه و یک یا چند سند، نمی‌تواند ماهیت و حقیقت یک قانون را روشن کند. با آن که دانش، بسیار پیش‌رفته و بسیاری از رازها را گشوده است، انسان هنوز در آغاز راه است و تارسیدن به حقیقت واقع، راه درازی در پیش دارد. با دانشی که امروز داریم و با آگاهی‌هایی که در اختیار ماست، می‌توان به نتیجه‌هایی رسید که گاه با هم متضادند و انسان پژوهشگر و اندیشمند، تنها باید با آنها آشنا شود، درباره آنها بیندیشد و مسیرهای تازه‌ای برای بررسی آنها پیدا کند. به این دو اظهار نظر توجه کنید. آیا در برخورد اول، هر دوی آنها را درست نمی‌پندارید؟

کارل چاپک، نویسنده نکتہ سنج «چک»، نزدیک به هفتاد سال پیش نوشت:

«انسان وقتی می‌تواند به طبیعت دست یابد که به کاری غیر از آن چه در طبیعت وجود دارد، بپردازد. تا زمانی که انسان تلاش می‌کرد، همچون پرنده یا پروانه، بال بزند، تمام کوششهای او در زمینه پرواز، با ناکامی مواجه شد. وقتی می‌خواست با سرعت بیشتری روی زمین بدود، به جای این که مثل گوزن یا اسب، چهار دست و پا راه برود، یا دو پای اضافی برای خود درست کند، چرخ را ساخت. وقتی از دندانهای طبیعی و ثابت خود

سخنان بودا و دکارت را خواندید. چقدر به هم نزدیک‌اند! بودا، روحانی و حکیمی از شرق، و دکارت، فیلسوف و ریاضیدانی از غرب است. فاصله زمانی بین زندگی آنها هم کوتاه نیست. بودا در سده ششم پیش از میلاد می‌زیسته و دکارت در سده هفدهم بعد از میلاد، یعنی نزدیک به ۲۳۰۰ سال، آنها را از هم جدا می‌کند. با وجود این، توصیه‌های آنها، چنان به هم شباهت دارد که به نظر می‌رسد، دو مترجم مختلف، متن واحدی را ترجمه کرده‌اند. چرا به قول دکارت «نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند» و چرا به قول بودا «نباید گفته‌ای را، به صرف این که دیگران گفته‌اند، باور کنیم»؟

ابتدا، این سخن ابن سینا را، در مقدمه «شفاه بشنوم و، سپس، دلیلهای خود را بیاوریم:

«... همچنین، از جست‌وجوی رابطه‌ای بین اوضاع و احوال آسمان خواص روح و بعدهای موسیقی خودداری می‌کنیم و گرنه روش کسانی را که از حقیقت علم آگاهی ندارند (منظور ابن سینا، برخی دانشمندان یونانی، مثل فیثاغورث و افلاطون و پیروان آنهاست) پیروی کرده باشیم. اینان وارث فلسفه‌ای کهنه و سست می‌باشند و ویژگیهای اصلی چیزها را با کیفیتهای اتفاقی آنها، به جای هم گرفته‌اند؛ خلاصه کنندگان نیز از آنها تقلید کرده‌اند. ولی کسانی که فلسفه حقیقی را فهمیده و ویژگیهای درست چیزها را درک کرده‌اند (منظور ابن سینا، فارابی و پیروان اوست)، اشتباههایی را که در اثر تقلید رخ می‌دهد، تصحیح

دارد:

«جهان کتابی است پر از فلسفه. این جهان در برابر چشمان ما گشوده است. ولی تنها وقتی می‌توان از آن سردرآورد که با نشانه‌ها، نمادها و زبان این کتاب آشنا باشیم. این زبان، ریاضیات و این نشانه‌ها، مثلثها و دایره‌ها و دیگر شکلهای هستند.»

و گنگه دنکو، ریاضیدان و فیلسوف معاصر و عضو آکادمی علوم اوکراین، ریاضیات را عنصری لازم برای زندگی امروزی می‌داند و در مقاله «ریاضیات کاربردی و چشم انداز آینده» می‌نویسد:

«روشهای ریاضی در تمامی زندگی ما نفوذ کرده است. ریاضیات امروزی، تنها زمینه‌ای برای محاسبه نیست، بلکه به صورت سلاحی نیرومند برای تحقیق درآمده و بارها و بارها بر تجربه پشی گرفته است. با وجود این، جوانان جست و جوگر امروزی، حداکثر با چنان سطحی از پیشرفت ریاضیات سروکار دارند که، در بهترین شرایط، مربوط به صد سال پیش است و همین جوانان، فردا باید بتوانند دانشهای طبیعی، صنعت و اقتصاد را تکامل دهند. همین جوانان امروزی‌اند که باید رازهای اندیشه را بگشایند، به فضای دوردست کیهانی راه یابند، روندهای صنعتی را ادامه دهند و روشهای مؤثری برای تشخیص بیماریها و درمان آنها پیدا کنند.»

درباره دورانهای تکامل ریاضیات صحبت می‌کردیم و گفتیم، گروهی تنها به ریاضیات نظری توجه دارند. بنابراین دیدگاه، تاریخ ریاضیات، تاکنون از سه مرحله گذشته است: ریاضیات مقدماتی (یا ریاضیات کمیتهای ثابت)، ریاضیات کمیتهای متغیر و، سرانجام، ریاضیات امروزی. ولی گروهی دیگر، ایرادهایی جدی به این تقسیم‌بندی دارند. آنها می‌گویند، در این تقسیم‌بندی، یکپارچگی و وحدت ریاضیات را، که هم شامل ریاضیات نظری و هم شامل ریاضیات کاربردی باشد، به هم می‌زنند. از این گذشته، با این تقسیم‌بندی، دوره‌های کاملی از تکامل بشر، کنار گذاشته می‌شود. در

راضی نبود، دندانهای مصنوعی قابل جابه‌جا شدن را برای خود ساخت که می‌توانست آنها را در «تیردان» خود جای دهد. ریسمان باف، ضمن بافتن ریسمان، عقب عقب می‌رود یعنی به طریقی عمل می‌کند که درست عکس حرکت عنکبوت، هنگام بافتن تار است. اگر آدمی می‌خواست از عنکبوت تقلید کند، هرگز نمی‌توانست دستگاه بافندگی را اختراع کند. تمام هنر صنعتی بشر در این است که، برای انجام هرکاری، نه در جهتی که در طبیعت وجود دارد، بلکه درست در جهت متضاد با آن حرکت می‌کند.»

اکنون نظر یک دانشمند، ای. ب. تی بی نئسکی را در کتاب «بیونیک» (۱۹۷۶) بشنوید:

«همه نمونه‌ها، به طور قانع کننده‌ای ثابت می‌کنند که، از دورترین دورانهای پیش از تاریخ، طبیعت زنده، الهام بخش آدمی در کشش او به سمت پیشرفت علمی و صنعتی بوده است. در جریان هزاران سال، انسان از طبیعت آموخته است و کشفها و اختراعاتی خود را، از روی آن برداشته است. صنعت، که در واقع ابزار مصنوعی کار به شمار می‌رود، چیزی نیست جز تقلیدی از اندامهایی از دستگاههای زنده.»

وقتی که شما می‌خواهید با دورانهای تکامل ریاضیات آشنایی پیدا کنید، با دو دیدگاه متفاوت روبه رو می‌شوید. گروهی، ریاضیات را تنها «ریاضیات نظری» و مفهومیها و رابطه‌های انتزاعی آن می‌دانند و «ریاضیات کاربردی» را، به عنوان بخشی از ریاضیات به حساب نمی‌آورند. به همین جهت، دورانی از تاریخ بشر را، که بیشتر در جهت ریاضیات کاربردی تلاش شده است، دوران رکود دانش ریاضی می‌دانند. برخی از دانشمندان، پا را از این هم فراتر گذاشته‌اند و ریاضیات را، تنها محصول ذهن بشر می‌دانند که، کاربرد برخی از قانونهای آن در عمل، تنها امری تصادفی است. گروه «نیکلای بورباکی» که عده‌ای از بهترین ریاضیدانان معاصر فرانسوی را شامل می‌شود و کتابهای خود را، که بسیار هم با ارزش‌اند، زیر همین نام مستعار «بورباکی» منتشر می‌کنند، از این دسته‌اند و «ریاضیات کاربردی» را، اصلاً «ریاضیات» نمی‌دانند. اما گالیله عقیده دیگری

ریاضیات.

دوم، به این دلیل که اغلب، و به ویژه در دوران ما، که نظام سودجوی سرمایه‌داری حاکم بر جهان است، به نام دانش، خبرها و «داستان»های هیجان‌آوری منتشر می‌شود که با دانش، فاصله بسیار دارند و، در برخی موردها، به صورت نوعی شیادی در می‌آید. دستگیره این کارهای «شبه علمی» و یا بهتر بگوییم «ضد علمی»، عنوانهای پر هیاهویی از قبیل «مثلت برمودا»، «بیگانه‌های غیر زمینی»، «نخستین انسانی که از میمون زاده شد»، «بشقاب‌های پرنده»، «عمل جراحی با دستهای برهنه»،... است. روی جلد و تیرهای درشت برخی مجله‌ها و روزنامه‌ها و حتی گاهی، به اصطلاح «مجله‌های علمی» جهان، با این عنوانها و عنوانهای مشابه آنها پر می‌شود و دریغ که گاهی، به نشریه‌ها و رسانه‌های درونی هم نفوذ می‌کنند. تنها به یکی از این نمونه‌ها اشاره می‌کنیم.

در ژانویه سال ۱۹۸۲، تلویزیون فرانسه، برنامه هیجان‌انگیزی در باره «روان‌شناسی تجربی» پخش کرد. این برنامه، با این هدف تنظیم شده بود تا بیننده تلویزیون را قانع کند که، گویا مسأله‌هایی از نوع «روشن بینی»، «دور آگاهی (تله پاتی)» و «انتقال فکر» (بدون هیچ حامل شناخته شده‌ای)، در حوزه دانش قرار دارد و امروز، در مورد این پدیده‌ها، هیچ تردیدی وجود ندارد.

میشل روزه، گزارشگر مجله علمی «علم و زندگی» چاپ پاریس درباره این گفتار تلویزیونی مقاله‌ای نوشت که برخی از جنبه‌های نادرست این برنامه را فاش می‌کند. بخش بسیار کوتاهی از نوشته میشل روزه را می‌آوریم.

در برنامه تلویزیونی تأکید شد که «روانشناسی تجربی»، به عنوان یک دانش رسمی پذیرفته شده است و، در زمان ما، در بیشتر دانشگاهها جزو برنامه‌های درسی قرار دارد. گرداننده برنامه گفت: «امروزه شخصیت‌های بسیار جدی، روانشناسی تجربی را در محدوده بررسیهای خود قرار داده‌اند و از آن به عنوان یکی از رشته‌های دانش نام می‌برند.» و گوینده، از دانشمندی، به عنوان این گونه شخصیت‌ها نام برد. ابتدا نام پروفیسور واسیلی یف از فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد را آورد. ولی باید گفت که اولاً جایی به نام «فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد» وجود ندارد. اگر منظور «فرهنگستان علوم

واقع، در تاریخ بشر، دو دوره کم و بیش طولانی وجود دارد که، در آنها، توجه اصلی دانشمندان، به ریاضیات کاربردی بوده است: (۱) دوران پیش از ریاضیات یونانی و (۲) دوران سده‌های میانه، که مرکز ثقل همه دانشها (و از آن جمله ریاضیات)، در شرق و به ویژه در ایران بوده است. البته، خود این دو دوره با هم فرق دارند. در دوران پیش از ریاضیات یونانی، در مصر، بابل، سرزمین عیلام، چین و سایر جاها، تلاش عمده در حل مسأله‌های به طور نسبی ساده‌ای از ریاضیات کاربردی، مثل تقسیم زمین برای کشت، ساختن انبارها، راهها و قلعه‌ها، توسعه بازرگانی، فراهم کردن توشه سربازانی که در جنگ به سر می‌برند،... بوده است؛ حل این گونه مسأله‌ها، نیاز به محاسبه، شناخت ویژگیهای بعضی شکلها و غیر آن داشته است. و همین‌ها، زمینه را برای به وجود آمدن «ریاضیات نظری» فراهم کرد. در دوره دوم برتری «ریاضیات کاربردی»، مسأله‌های بغرنج‌تری در برابر ریاضیدانان قرار داشت و آنها ناچار بودند، ابتدا قانون مندیهای کلی را پیدا کنند و سپس، به کمک آنها مسأله‌های کاربردی را حل کنند. مثلاً خوارزمی، ریاضیدان ایرانی، کتاب «جبر» خود را، که نخستین کتاب جبر در تاریخ ریاضی است، به خاطر حل مسأله‌هایی نوشته است که، در زمان او، دشواریهایی به وجود آورده بودند، مثل مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث و عمل کردن به وصیتها. اغلب این مسأله‌ها، منجر به حل معادله درجه دوم می‌شدند، به همین مناسبت، خوارزمی ابتدا انواع معادله‌های درجه دوم را می‌آورد، برای هریک از آنها راه حل کلی (آلگوریتم) پیدا می‌کند، سپس، کاربرد آنها را، در مسأله‌های عملی، با ذکر مثالهای فراوان، توضیح می‌دهد.

به این علت‌هاست که گروه دیگری از دانشمندان، دورانهای تکامل ریاضیات را به این نحو در نظر گرفته‌اند که، همیشه، به دنبال دورانی که «ریاضیات کاربردی» تسلط داشته است، دورانی فرا می‌رسد که، در آن «ریاضیات نظری» تسلط می‌شود. بعد از دوران «ریاضیات کاربردی» ملتهای باستانی، ریاضیات نظری یونانیها، سپس دوباره ریاضیات کاربردی ملتهای مشرق زمین و دوباره، بعد از رنسانس، ریاضیات نظری، حالتی تسلط پیدا می‌کند و امروز، این طور به نظر می‌رسد که داریم به دوران تازه‌ای از ریاضیات کاربردی وارد می‌شویم. چنین است، دو دیدگاه متفاوت درباره تنظیم تاریخ

«من خیلی خودم را آماده نکرده‌ام تا روی موضوع بشقابهای پرنده، بحثی مفصل داشته باشم و تنها درباره یک جنبه آن صحبت می‌کنم؛ بشقابهای پرنده، در واقع، یک موضوع علمی نیست، گرچه بعضی از دانشمندان هم، چیزهایی درباره آن نوشته‌اند. بعد از جنگ، من عضو یک شورای مشورتی بودم. در یکی از نشستهای کاملاً محرمانه آن، طرح مورد بحث قرار می‌گرفت. همه چیز اسرار آمیز بود. صحبت کردن درباره آن دشوار است. گفت و گو از همین بشقابهای پرنده بود، از جمع آوری اظهارات گواهان و از برآورد و ارزیابی همه آگاهی‌هایی که درباره بشقابهای پرنده وجود دارد. به ما گفتند: «می‌دانید! وضع خیلی جدی است. مثل این که واقعاً چیزی وجود دارد.» آن وقت، من درباره نمونه‌هایی از «کشف»هایی که می‌شناسیم، برای آنها صحبت کردم. گفتم که بشقابهای پرنده هم پدیده‌ای است که مرا به یاد همان به اصطلاح کشفها می‌اندازد. خواهش کردم تنها سی یا چهل نفر از بهترین گواهان را انتخاب کنند و پیش من بیاورند؛ من نیازی به صدها گواهی که در اختیار شماست، ندارم. بیشتر موردها، مربوط به مشاهده زهره در هوای تیره و گرفته بود. اگر فقط بدانیم به کجا باید نگاه کنیم، زهره را حتی در وسط روز هم می‌توان دید. این وضع، بارها موجب هراس و ولوله شده است. مثلاً در نیویورک، به خاطر دیدن زهره در نزدیکی یک ساختمان، راه بندان واقعی به وجود آمد. مردم گمان می‌کردند که این، یک ستاره دنباله‌دار است که همین الان با زمین برخورد می‌کند؛ یا این که کسی از مریخ آمده است و یا چیزهای دیگری از این قبیل. این حادثه مربوط به سالهای قبل است، سی یا چهل سال پیش. ولی همین زهره، تا امروز، داستانهای زیادی درباره بشقابهای پرنده به وجود آورده است. بین مدرک‌هایی که ارائه شد، تنها دو عکس وجود داشت که به وسیله یک نفر گرفته شده بود. در برخورد اول، به نظر رسید که در عکسها، تکه‌ای از یک کارتن قیر آلود دیده می‌شود؛ در ضمن، چیزی که در دو عکس دیده می‌شد، به کلی با هم متفاوت بود. من به جمع آوری جزئیات اضافی پرداختم: وضع هوا در آن موقع چگونه بود؟

اتحاد شوروی است، در مسکو واقع است نه در لنینگراد؛ ثانیاً مرحوم ل.ل. واسیلی یف، عضو فرهنگستان نبود و تنها کرسی فیزیولوژی انسان را در دانشگاه لنینگراد اداره می‌کرد. او البته، از هواداران «دور آگاهی» بود و کتابی هم به نام «تسلط بر فاصله‌ها» در این باره نوشت. ولی این نظریه‌های او را، نباید خیلی جدی گرفت؛ از این گذشته، نظریه‌های شخصی واسیلی یف، به هیچ وجه نظر رسمی دانش شوروی نیست.

گوینده، به عنوان شخصیت دوم، از «ای یولی نیون» نام برد که گویا کرسی روانشناسی تجربی را در دانشگاه تولوز اداره می‌کند. بنابه اظهار گوینده، او بنیانگذار آزمایشگاه روانشناسی تجربی در این دانشگاه است. ولی در دانشگاه تولوز، نه کرسی روانشناسی تجربی وجود دارد و نه، در این زمینه، آزمایشگاهی در آن پیدا می‌شود. آقای «لی نیون» هم اصلاً استاد نیست. او تنها آبیستان است و کار او، تدریس کاربرد ریاضیات در آمار است.

شخصیت سوم، پروفیسور «رمی شوون»، متخصص مشهور رفتار زنبورهای عمل و مورچگان بود. ولی او هرگز به طور رسمی، روی روانشناسی تجربی کار نکرده است و همچون «واسیلی یف» و «لی نیون» او را هم نمی‌توان نماینده دانش رسمی دانست که بر روانشناسی تجربی مهر تأیید گذاشته باشد...

گمان می‌کنم، همین چند سطر، برای روشن کردن ماهیت «بحث علمی تلویزیونی» کافی باشد.

در سال ۱۹۵۳، در آزمایشگاه علمی - پژوهشی «نول سو» (کمپانی «جنرال الکتریک») مجلسی تشکیل شد که «ایروینگ لنگ‌موره» (۱۹۸۷ - ۱۸۵۱)، دانشمند سرشناس آمریکایی و برنده جایزه نوبل، زیر عنوان «دانش پدیده‌هایی که در واقع وجود ندارند» سخنرانی کرد و پرده از روی بسیاری ادعاهای به اصطلاح علمی برداشت. «لنگ‌موره» این گونه نظریه‌ها را «دانش بیمار» می‌نامد. متن این سخنرانی بسیار جالب و آموزنده است، ولی به دلیل تخصصی بودن آن، و هم به دلیل این که کم و بیش طولانی است، در این جا تنها بخش پایانی این سخنرانی را که به «بشقابهای پرنده» مربوط می‌شود، می‌آوریم.

عضو سابق آکادمی علوم مجارستان، در پایان کتاب زیبای خود «بازی با بی‌نهایت» می‌گوید:

«بدون تردید، پیشرفت آینده ریاضیات، دامنه آن را وسعت خواهد داد. گرچه دورنمای این پیشرفت، از دید امروز ما پنهان است. یک چیز را باید، یکبار برای همیشه، بفهمیم: ریاضیات پدیده‌ای ساکن و بسته نیست، ریاضیات دانشی زنده و پر تحرک است که پیوسته راه خود را به طرف جلو می‌گشاید. هر وقت خواسته‌اند ریاضیات را در درون محدوده بسته‌ای زندانی کنند، دیر یا زود توانسته است راهی به سوی آزادی بجوید و قابلیت زنده بودن خود را نشان دهد.»

به همین دلیل، نباید تصور کنیم، آن چه از ریاضیات می‌دانیم و یا به‌طور کلی، آن چه در ریاضیات وجود دارد، دقتی مطلق دارد و بی‌تغییر و جاویدان است. تعریفها، مفهوما و نظریه‌های ریاضی، ضمن پیشرفت ریاضیات، دقیق‌تر و کاراتر می‌شوند. اگر یک قانون ریاضی، در گذشته، در محدوده‌ای تنگ کاربرد داشته است، با پیشرفت ریاضیات و دقیق‌تر شدن مفهوما و نظریه‌ها، این محدوده تنگ شکافته می‌شود و به میدانی گسترده‌تر تبدیل می‌شود. بنابراین، نمی‌توان و نباید کار قانونها و مفهوماهای ریاضی را، پایان یافته دانست. شك، موجب پیشرفت دانش و موجب نزدیک‌تر شدن به حقیقت واقع است. هیچ چیز را نباید به‌صورت قطعی پذیرفت. طرز تفکری که دانش موجود را کمال مطلوب می‌داند، مانعی برای پیشرفت است. نظریه نسبیت، چیزی از ارج و ارزش نیوتون نمی‌کاهد، ولی اگر همه دانشمندان، به نیوتون، به عنوان دانشمندی که حرف آخر را زده است، می‌نگریستند، نه ریاضیات تکامل می‌یافت و نه قانون‌مندیهای فضای کیهانی کشف می‌شد. دو مثال از ریاضیات بیاوریم.

مثال اول. در سرزمین عیلام (جنوب و جنوب غربی ایران)، در بابل و در مصر، در هزاره‌های پیش از میلاد، برای محاسبه ساخت یک چهار ضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند، قاعده‌ای که تنها برای

روزنامه‌های کهنه را در آوردم، معلوم شد عکسها موقعی برداشته شده است که پانزده یا بیست دقیقه از توفان قوی پررعد و برقی گذشته بوده است. خوب، در چنین وضعی، چه چیزی طبیعی‌تر از وجود یک قطعه کارتن قیرآلود است که، در اثر گردباد، بلند می‌شود و به طرف ابرها می‌رود و حالا، خیلی ساده دارد، پایین می‌افتد. چه رازی در این مسأله وجود دارد؟ به من می‌گفتند: «این شیء با سرعتی حیرت‌انگیز حرکت می‌کرد.» ولی شخصی که همه اینها را دیده بود، کمترین تصویری در این باره نداشت که، این شیء، در چه فاصله‌ای از او بوده است و روشن است که، در چنین وضعی، همه چیز دشوار می‌شود. وقتی شما چیزی در آسمان می‌بینید، هیچ‌گونه تصویری درباره اندازه‌های آن در شما پدید نمی‌آید و، به همین مناسبت، ممکن است هر گونه حدسی درباره سرعت آن بزنید. سعی کنید اندازه‌های واقعی ماه را، با توجه به صورت ظاهری آن، حدس بزنید. آیا حجمی به اندازه مشت دارد یا توپ یا خانه؟ وقتی به‌طور ساده به ماه نگاه می‌کنید، هیچ چیز درباره این مطالب نمی‌توانید بگویید. پس چگونه می‌شود اندازه‌های یک بشقاب پرند را فهمید؟ به هر حال، با وجودی که همه سندها را بررسی کردم حتی یک نمونه پیدا نکردم که دست کم ذره‌ای معنا داشته باشد. بین آنها، هیچ‌گونه هماهنگی وجود نداشت. همه آنها از همان نوعی بودند که شرح دادم و البته، همراه با تلقیهایی ذهنی و خیال بافانه. در واقع هیچ کس با دقت نمی‌داند که با چه معیاری باید سرعت شیء را در آسمان پیدا کرد و، اگر چیزی ناشناخته است، در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟ ولی همه این گواهیها، یک وجه مشترک داشتند: فقدان استدلال قانع کننده در آنها... بعدها داستان این شورای محرمانه، فاش و در روزنامه‌ها چاپ شد. به نظر می‌رسد، این مسأله خاتمه یافته است. ولی البته روزنامه‌ها، به هیچ وجه اجازه نمی‌دهند، هیجان مردم در این باره، فروکش کند.»

سوم، به این دلیل که دانش رو به تکامل است و ما هم باید در این تکامل سهمی داشته باشیم. روزاپتر (۱۹۰۵ - ۱۹۷۷)، ریاضیدان و

ولی می‌دانیم، این دستور، برای محاسبه مساحت یک چهار ضلعی قابل محاط در دایره درست است، نه هر چهار ضلعی غیر مشخص. محاسبه دقیقتر شده، ولی هنوز به دقت کامل نرسیده.

جالب این است که هنوز هم، دهقانان ایرانی، در بیشتر جاها، مساحت قطعه‌های زمین را با همان روشی انجام می‌دهند که عیلامی‌ها در چهار هزار سال پیش انجام می‌دادند.

مثال دوم. در ریاضیات، برای هر مفهومی و هر شکلی، باید تعریفی داشته باشیم. ولی «تعریف» مجموعه‌ای از واژه‌هاست: «مجموعه نقطه‌هایی از صفحه، که از نقطه ثابتی به یک فاصله باشند، دایره نامیده می‌شود». این، یک تعریف است، تعریف دایره، ولی، در این تعریف واژه‌هایی وجود دارد که اگر معنای آنها را ندانیم، از خود «تعریف» سردر نمی‌آوریم: «مجموعه»، «نقطه»، «صفحه»، «نقطه ثابت»، «فاصله». ولی همان دو واژه اول را نمی‌توانیم تعریف کنیم: برای «مجموعه» و «نقطه» تعریفی وجود ندارد. البته، اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود، نقطه را تعریف کرده است: «نقطه چیزی است که بدون بُعد باشد». در این «تعریف» دو مشکل وجود دارد: اول واژه «چیز»، «چیزی است» یعنی چه؟ در این جا، «چیز» چه معنایی دارد؟ دوم «بُعد» یعنی چه؟ لازم است گفته شود که مفهوم و تعریف «بُعد» تنها در دهه‌های اخیر روشن شده است، آن هم به شرطی که خیلی از مفهومی‌های هندسی، و از آن جمله مفهوم «نقطه» را بشناسیم. عجب! نقطه را به کمک مفهوم بُعد و بُعد را به کمک مفهوم نقطه تعریف کنیم؟ مثل این است که بگوییم «پرستو نوعی پرنده است» و بعد، وقتی از ما پرسند پرنده یعنی چه؟ در پاسخ بگوییم «پرنده چیزی مثل پرستو است». این نوع داوری یا تعریف را، در منطق قدیم، «دور باطل» می‌گفتند. «دور باطل»، یعنی تعریف یک موضوع، سرانجام به خود آن موضوع برگردد. و تعریف اقلیدس از نقطه، منجر به دور باطل می‌شود.

در مورد عملهای ریاضی هم، وضع به همین گونه است. مثلاً عمل جمع را نمی‌توان تعریف کرد. جمع یعنی چه؟ تعریف عمل جمع چیست؟ در کتابها، گاه به چنین جمله‌هایی برمی‌خوریم: «عمل جمع، یعنی افزودن دو یا چند عدد به یکدیگر» یا «عمل جمع، یعنی

مستطیل درست است. در آن زمانها، بیشتر به کاربرد عملی ریاضیات توجه داشتند و محاسبه مساحت، بیشتر برای تقسیم زمینهای کشاورزی به کار می‌رفت. چون در عمل، زمین را به صورتی تقسیم می‌کردند که، کم و بیش، مستطیل شکل بودند، این نوع محاسبه، تفاوت چندانی با واقعیت پیدا نمی‌کرد. بعدها، در دوره تکامل ریاضیات کاربردی، ریاضیدانان ایرانی با شکلهای گوناگونتری سروکار پیدا کردند و به ناچار، محاسبه مساحت را، بر مبنای دقیقتری گذاشتند. مثلاً در کتاب «الایضاح عن اصول صناعة المساح» تألیف ابومنصور تیمی که در اواخر سده چهارم و اوایل سده پنجم هجری قمری در نیشابور و به عربی نوشته شده و ابوالفتح اصفهانی آن را به فارسی برگردانده است، انواع چهار ضلعی را ۹ قسم دانسته: مربع، مستطیل، دوزنقه قائم الزوایه، لوزی، شبه لوزی (چهار ضلعی که دو قطر آن بر هم عمود باشند و یکی از قطرهای به وسیله دیگری نصف شود)، متوازی الاضلاع، دوزنقه متساوی الساقین، دوزنقه غیر مشخص و سرانجام، چهار ضلعی غیر مشخص، در کتاب تقریباً در همه حالتها، محاسبه مساحت با دقت انجام گرفته، تنها در حالت چهار ضلعی غیر مشخص (یعنی چهار ضلعی که یکی از هشت حالت دیگر نباشد) دو راه برای محاسبه مساحت آورده است. در یکی از روشها، چهار ضلعی را با رسم قطر به دو مثلث تقسیم می‌کند و توصیه می‌کند، مساحت هر مثلث را به طور جداگانه محاسبه، سپس، با هم جمع کنید. ولی در روش دوم نوعی عدم دقت به چشم می‌خورد. او می‌گوید: برای «مربعی مختلف الاضلاع و القطرین و الزوایا... طریق مساحتش آن بود که نیمه جوانب، جمله بگیرند و فضل آن بر هر ضلعی بندانند و فضل‌ها، بعضی در بعضی زنند. جذر آنچ برسد، مساحتش بود». [توجه کنیم، در این جا، منظور از «مربع» چهار ضلعی و منظور از «جوانب» محیط است.] به زبان امروزی، یعنی «هر ضلع را از نصف محیط کم کنیم و جذر حاصل ضرب چهار عدد حاصل را به دست آوریم». اگر طول ضلعهای چهار ضلعی را a ، b ، c و d و اندازه نصف محیط را p بناسیم، به این دستور می‌رسیم:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

روی هم ریختن واحدهای دو یا چند عدد. خوب دقت کنید. در این تعریفها، تنها کاری که کرده‌اند، به جای واژه «جمع» از واژه «افزودن» یا واژه «روی هم ریختن» استفاده کرده‌اند. اگر بخواهیم هر کدام از این تعریفها را، با زبانی ساده بیان کنیم، باید بگوییم «جمع یعنی جمع!»

ریشه دشواری در کجاست؟ ذهن آدمی، برای این که چیزی را بشناسد یا درباره آن داوری کند، به تکیه گاهی نیاز دارد. شما اول از دوستان می‌پرسید: «آیا قبول داری که ...» و اگر او قبول کرد آن وقت با تکیه بر آن و براساس آن، سعی می‌کنید نظر خود را توضیح دهید. ولی اگر به هر موضوع روشنی اشاره کنید، دوستان از قبول آن سرباز زند و هیچ چیز را قبول نکنند، در بیان نظر خود و در استدلال خود در می‌مانید. گفت وگو و بحث بین دو نفر، وقتی به جایی می‌رسد که آگاهیهای مشترکی داشته باشند. همین آگاهیهای مشترک (که هر دو طرف درباره آنها توافق دارند)، مبنای تکیه گاه گفت و گوی آنهاست.

در ریاضیات، برای تعریف «نقطه» یا «عدد» یا «عمل جمع»، تکیه گاهی نداریم و تعریف را از «هیچ» نمی‌توان آغاز کرد. ولی اگر معنای «جمع» را بدون تعریف بپذیریم و مثلاً بگوییم «معنای آن روشن است» یا «معنای آن در خودش پنهان است»، آن وقت می‌توانیم، «عمل تفریق» و «عمل ضرب» را با تکیه بر آن تعریف کنیم.

به همین ترتیب در مورد داوری و استدلال هم، به تکیه گاههایی نیاز داریم که قابل اثبات نیستند. می‌گوییم «نقطه C را روی پاره خط راست AB و بین دو نقطه A و B انتخاب می‌کنیم». اگر کسی از شما بپرسد: «مگر بین دو نقطه A و B، همیشه می‌توان نقطه دیگری پیدا کرد؟» و شما بخواهید وجود این نقطه سوم را برای او ثابت کنید، در استدلال خود درخواهید ماند. می‌گویید «اگر خط راستی دو ضلع مثلث را قطع کند، یا با ضلع سوم موازی است و یا استدلال ضلع سوم را در نقطه‌ای قطع می‌کند». و کسی از شما می‌پرسد: «مگر نمی‌شود یک خط راست هر سه ضلع مثلث را قطع کند؟» و شما بخواهید ثابت کنید، اگر خط راستی از یک رأس مثلث عبور نکند، نمی‌تواند هر سه ضلع آن را قطع کند، درمانده می‌شوید.

در ریاضیات، مفهومی داریم که قابل تعریف نیستند و گزاره‌هایی داریم که باید، درستی یا نادرستی آنها را، براساس تجربه زندگی و بدون استدلال بپذیریم. ولی آیا آنچه را امروز می‌پذیریم، ثابت و جاوانی است؟ اقلیدس در «مقدمات» خود می‌گفت: «هر کُل از جزء خود بزرگتر است» و این، اصلی درست و بی‌عیب، در طول بیش از دو هزار سال به حساب می‌آمد. ولی وقتی ژرژ کانتور (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸)، ریاضی‌دان آلمانی، نظریه مجموعه‌ها را ساخت و تعریف دقیقتری، برای برابری تعداد عضوهای دو مجموعه (به ویژه، دو مجموعه نامتناهی) آورد، معلوم شد، این اصل بدیهی و روشن (که هر عقل سلیمی آن را قبول داشت) در مورد مجموعه‌های نامتناهی درست نیست و مثلاً، تعداد عضوهای مجموعه عددهای طبیعی، با تعداد عضوهای مجموعه عددهای فرد، برابر است، در حالی که مجموعه عددهای فرد، زیر مجموعه‌ای یا جزئی از کُل مجموعه عددهای طبیعی است. امروز باید اصل اقلیدس را تغییر داد و به این صورت، تصحیح کرد: «هر کُل از جزء خود بزرگتر است، به شرطی که نامتناهی نباشد».

انسان، هر روز به تجربه خود و در نتیجه به آگاهیهای خود می‌افزاید و در زندگی پیشرفته تر خود، نیازهایی پیدا می‌کند که برای پدران او مطرح نبوده‌اند و، به همین مناسبت به ابزارهای تازه، مفهومیهای تازه، تعریفها و داوریهای تازه، نیاز دارد و این یعنی تکامل علم و تکامل انسان.

اگر گمان کنیم، آنچه از گذشته به ما رسیده، کامل و بی‌نقص است و اگر با دید شک و انتقادی به آنچه می‌خوانیم و می‌شنویم، نگاه نکنیم، به معنای این است که نخواسته‌ایم در این راه پرتکاپوی پیشرفت، گامی برداریم و خود را محکوم به توقف و، در نتیجه نیستی کرده‌ایم.

اگر دگرگونیهایی را که در طول تاریخ بشر، در مورد یکی از ساده‌ترین مفهومیهای ریاضی، یعنی مفهوم عدد، به وجود آمده است، مطالعه کنیم (و امیدواریم در یکی از بحثهای خود، به آن بپردازیم)، متوجه می‌شویم که با همه ارزش و نبوغی که مثلاً ارشمیدس داشته است، ما خیلی بیشتر، بهتر و دقیقتر از او، عدد را می‌شناسیم و، به همین ترتیب است، دگرگونیهایی که در مفهوم حد یا مفهوم تابع پدید

آمده است.

چهارم، به این دلیل که حتی ریاضیدانان بزرگ هم دچار اشتباه می‌شوند. پیرفرما (۱۶۰۱ - ۱۶۶۱)، ریاضیدان فرانسوی، گمان می‌کرد عدد $1 + 2^n$ ، به ازای هر مقدار درست و غیر منفی n ، عددی اول است. او استدلال خود را شرح نداده است، ولی گمان می‌رود، به شیوه استقرایی، برای چند عدد نخستین آزمایش کرده باشد:

$$n = 0 \Rightarrow 2^0 + 1 = 2^0 + 1 = 2^1 + 1 = 3;$$

$$n = 1 \Rightarrow 2^1 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

به همین ترتیب، به ازای $n = 2$ به عدد ۱۷، به ازای $n = 3$ به عدد ۲۵۷، به ازای $n = 4$ به عدد ۶۵۵۳۷ می‌رسیم که همه آنها عددهایی اول‌اند. ولی به ازای $n = 5$ چطور؟ می‌توان حدس زد که فرما، آزمایش خود را ادامه نداده است و یا در مورد عدد بزرگ $1 + 2^{32}$ دچار اشتباه شده و گمان کرده است که باید عددی اول باشد. ولی این عدد، بر ۶۴۱ بخش پذیر است. لازم نیست عدد ۲ را به توان ۳۲ برسانیم و با عمل تقسیم قانع شویم که عدد $1 + 2^{32}$ بر ۶۴۱ بخش پذیر است. 2^{32} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2^{32} = 2^{13} \times 2^{13} \times 2^6 = 8192 \times 8192 \times 64$$

باقی مانده تقسیم ۸۱۹۲ بر ۶۴۱، برابر ۵۰۰ است، بنابراین باید باقی مانده تقسیم عدد

$$500 \times 500 \times 64 = 25000 \times 640$$

را بر ۶۴۱ پیدا کنیم. باقی مانده تقسیم ۲۵۰۰۰ بر ۶۴۱ برابر ۱ و بنابراین باقی مانده تقسیم عدد 2^{32} بر ۶۴۱ برابر ۶۴۰ می‌شود و این، به معنای آن است که $1 + 2^{32}$ بر ۶۴۱ بخش پذیر است. فرما اشتباه کرده بود.

برنارد اولر (۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)، ریاضیدان نامدار سوییسی هم، درباره یکی از کشفهای خود می‌نویسد:

«من هیچ استدلال دیگری جز استقرای طولانی ندارم. آزمایشهای طولانی، برای من شکی در مورد درستی قانون باقی نگذاشته ... و به نظر می‌رسد که وقتی قانونی، مثلاً برای ۲۰ مورد سوالی آن درست باشد، ممکن نیست برای موردهای بعدی نادرست از آب در آید».

ولی در واقع این طور نیست. به ویژه در نظریه عددها، می‌توان به نمونه مسأله‌هایی برخورد که نه تنها برای ۲۰ مورد متوالی، بلکه برای صدها مورد متوالی نتیجه‌ای را تأیید می‌کنند، در حالی که، این نتیجه، در حالت کلی درست نیست. مثلاً تا مدت‌ها گمان می‌کردند عدد $1 + 991n^2$ ، به ازای عددهای طبیعی n ، هرگز برابر با مجذور کامل یک عدد درست نمی‌شود. حتی اگر این مسأله را به کامپیوتر بدهید و با طرح برنامه مناسب، از آن بخواهید، با آزمایش عددهای طبیعی متوالی، نخستین عددی را پیدا کند که، به ازای آن، $1 + 991n^2$ مجذور کامل باشد، به زودی به جواب نمی‌رسد. می‌دانید چرا؟ برای این که، کوچکترین عدد n ، در این مورد، یک عدد ۲۹ رقمی است. این عدد n ، چنین است:

$$n = 1205557357903213259447442528767$$

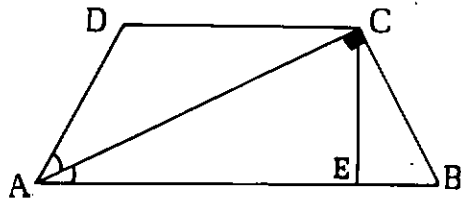
هر عدد طبیعی دیگری که کوچکتر از این عدد n باشد، عبارت $1 + 991n^2$ را مجذور کامل نمی‌کند.

آزمایش و روش استقرایی در دانشهای تجربی، نقش بزرگی به عهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس و گمان باشد. برای این که به درستی حکمی قانع شویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اولر و دیگران نشان داد که، در ریاضیات، نمی‌توان روش استقرایی را به همان صورت عادی خود، مورد استفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشته باشد. ما امروز، این روش را می‌شناسیم: روش استقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تلاش کردند، بلز پاسکال (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲)، رنه دکارت (۱۵۹۶

که اگر آنها را بپذیریم، باید به ناچار پذیرفت: $\frac{1}{4} = 1 = 0$

پنجم، به این دلیل که گاهی شکل ما را فریب می‌دهد. دیدید که چگونه «استدلال» فوریه را فریب داد؛ اکنون به این مسأله و حل آن توجه کنید (در «آشنایی با ریاضیات» شماره ۳۲، نمونه‌های دیگری از این نوع مسأله‌ها را می‌توانید پیدا کنید):

مسأله. مساحت دوزنقه‌ای را پیدا کنید که بر دایره‌ای به شعاع برابر R محیط شده است، به شرطی که بدانیم، یکی از زاویه‌های مجار به قاعده آن برابر 60° درجه است؛ در ضمن، قطری از دوزنقه که از رأس این زاویه می‌گذرد، زاویه را نصف می‌کند و بر یکی از ساقهای دوزنقه عمود است.



حل. با توجه به صورت مسأله و با توجه به شکل داریم:

$$\angle BAC = \angle CAD = 30^\circ \text{ و } \angle ACB = 90^\circ$$

در ضمن $|CE| = 2R$ ، زیرا در هر دوزنقه‌ای که بر دایره‌ای محیط باشد، طول ارتفاع برابر با قطر دایره است.

در مثلث قائم الزاویه ABC ضلع BC روبه‌رو به زاویه 30° درجه و برابر نصف طول وتر AB است، یعنی

$$|AB|^2 = \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + |AC|^2 \quad (1)$$

ولی $|AC| = 4R$ ، زیرا در مثلث قائم الزاویه AEC، ضلع CE روبه‌رو زاویه 30° درجه و بنابراین، برابر نصف وتر، یعنی AC است. در نتیجه از (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{2|AB|^2}{4} = 16R^2 \Rightarrow |AB| = \frac{8R\sqrt{2}}{2}$$

(۱۶۵۰) و ژاکوب برنولی (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵) بودند.

به اشتباه دیگری از یک ریاضیدان بزرگ اشاره می‌کنیم. فوریه (ژان باتیست ژوزف؛ ۱۷۶۸ - ۱۸۳۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، در کتاب «نظریه تحلیلی گرما» (۱۸۲۹) مقدار

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

را برابر $\frac{1}{4}$ دانسته است. دو استدلال برای اثبات «درستی» این حکم می‌توان آورد. می‌دانیم، برای $|x| < 1$ داریم:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

(سمت چپ برابری، مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی ناستاهی با قدر نسبت $-1 < x < 1$ و سمت راست برابری، حد مجموع آن است؛ در ضمن، با تقسیم ۱ بر $1-x$ هم می‌توان، به‌طور مستقیم، به عبارت سمت راست رسید). اگر در این برابری $x = -1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{4}$$

در استدلال دوم، می‌توان S را این‌طور نوشت:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

ولی، این نتیجه‌گیری نادرست است، زیرا S ، رشته‌ای متناهد است و حدی ندارد. برنارد بولسانو (۱۷۸۱ - ۱۸۴۸)، فیلسوف و ریاضیدان چک، برای رد نظر فوریه، مقدار S را به دو گونه دیگر به دست آورد:

$$1) S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$2) S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

اندیشه و خرد و دانش خود بسنجید، خودتان آزمایش کنید، خودتان استدلال کنید، دربارهٔ واژه‌ها، تعریفها، مفهومها، استدلالها و شکلها بیندیشید. از خودتان پرسید: «آیا شکل را درست رسم کرده‌ام؟»، «آیا در این تعریف یا این استدلال نقصی وجود ندارد؟»، «آیا راهی برای آزمایش درستی جواب وجود دارد؟»، «آیا ممکن است مثالی پیدا کرد که حکم و استدلال ما را نقض کند؟»، «آیا...».

مقاله را با سخن ابونصر فارابی، ریاضیدان، فیلسوف، منجم و روش‌شناس بزرگ ایرانی که در سده‌های سوم و چهارم هجری قمری می‌زیسته، از مقدمهٔ «کتاب بزرگ موسیقی» او پایان می‌دهیم:

«برای این که اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون این که ارتباطی به دانش ویژه‌ای داشته باشد، باید سه شرط را داشته باشیم: (۱) همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛ (۲) توانایی نتیجه‌گیریهای ضروری را، از این قاعده‌ها و از داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ (۳) توانایی پاسخگویی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم اندیشه‌ها و دیدگاههای دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا و اشتباهها را اصلاح کنیم.»

تا بعد

ادب ریاضی

زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتوانند لطایف نهفته در دیالوگهای افلاطون یا طنزهای آریستو فانس را بدان تمامی و کمال که یک ریاضیدان هر معنی و مقصودی را در کارهای ارشمیدس می‌فهمد درک کند.

م.ا.ه. نیومن

دکتر غلامحسین مصاحب

تنوری مقدماتی اعداد

مثلث ACD متساوی الساقین است، زیرا زاویهٔ DCA با زاویهٔ CAB (که برابر ۳۰ درجه است) برابر است. به این ترتیب $|AD| = |DC|$. اگر از رأس D، ارتفاع دوزنقه را (که برابر ۲R است) رسم کنیم و آن را DF بنامیم، از مثلث قائم الزاویهٔ ADF به سادگی به دست می‌آید: $|AD| = |CD| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. با در دست داشتن طولهای دو قاعده و طول ارتفاع دوزنقه، مساحت آن به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{8R\sqrt{3}}{3} + \frac{4R\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 2R = 4R^2\sqrt{3}$$

مسأله حل شد؛ مساحت دوزنقه به دست آمد؛ مسألهٔ ساده‌ای بود. در ضمن، وقتی مسأله را حل می‌کردیم، همهٔ داده‌های مسأله مورد استفادهٔ ما قرار گرفت: محیطی بودن دوزنقه (آن جا که ارتفاع دوزنقه را برابر ۲R گرفتیم)، $\hat{A} = 60^\circ$ ، $[AC] \perp [BC]$ ؛ همچنین قطر AC را نیمساز زاویهٔ به حساب آوریم. مشکل خاصی وجود ندارد. مسأله به سادگی حل شد.

ولی اگر اندکی دقت کنیم، معلوم می‌شود، مساحت شکلی را به دست آورده‌ایم که در واقع، وجود ندارد. از آن جا که چهار ضلعی محیطی است، باید داشته باشیم:

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$$

و چون $|AD| = |CD|$ ، پس $|BC| = |AB|$ ، یعنی باید در مثلث قائم الزاویه ABC، طول وتر با طول یکی از دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه برابر باشد و این، ممکن نیست. شکل ما را فریب داده بود.



گمان می‌کنم همین نمونه‌های کوتاه ولی آموزنده، کافی باشد تا به درستی سخنان بودا و دکارت پی ببریم. بیش از هر چیز به اندیشه و خرد خود اعتماد کنید و آن چه را می‌بینید و می‌شنوید، با محک