

شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۰)

○ پرویز شهریاری

نقش شکل در مسأله های هندسه فضایی

اگر در هندسه روی صفحه، باید مراقبت کرد تا شکل درست و دقیق رسم شود و سپس با استدلال و با پیدا کردن رابطه های موجود بین عنصرهای شکل (زاویه ها و پاره خط های راست و غیره) درستی آن را تأیید کرد، در هندسه فضایی، اغلب خود رسم شکل، دشواری به وجود می آورد و پیدا کردن رابطه هایی که ممکن است بین عنصرهای شکل وجود داشته باشد، چندان ساده نیست. رسم برخی جسم های فضایی، مثل مکعب مستطیل، هرم یا منشور با قاعده سه ضلعی یا چهار ضلعی چندان دشوار نیست، ولی رسم جسم هایی مثل هرمی با قاعده هفت ضلعی، یا پیدا کردن شکلی که از برخورد یک صفحه با جسم فضایی یا دو جسم فضایی به دست می آید، یا تلاش برای یافتن «سایه» یک جسم (یعنی تصویر مرکزی آن)، گاهی بسیار دشوار می شود. گذشته از رسم شکل، جست و جوی رابطه های لازم بین عنصرهای جسم هم اغلب سردرگمی به وجود می آورد. در این جا با مثالهای مختلف، راهنمایی هایی برای رفع این دشواریها (تا آنجا که ممکن است) شده است، ولی تردیدی نیست، که ذهن خلاق جوانان، بهتر و بیشتر از این راهنماییها می تواند کارساز باشد. در آغاز برای نوع برخورد با مسأله های هندسه فضایی، سفری داریم و سپس به بحث درباره رفع

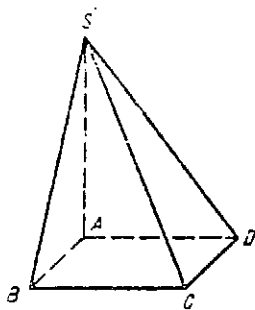
دشواریهای مختلف مربوط به رسم شکل می پردازیم.

۱. از شکلی که رسم کرده اید، چه نتیجه هایی می گیرید؟
به این مسأله توجه کنید :

مسأله ۱. در هرم $SABCD$ می دانیم :

(۱) قاعده $ABCD$ یک مربع است :

(۲) یال جانبی SA بر صفحه قاعده است.



شکل (۱)

اگر ضلع قاعده، طولی برابر a و یال SA طولی برابر b داشته باشد، مساحت سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

موقعیت خاصی از یک هرم در برابر شماست. پیش از هر چیز، و بدون توجه به آن چه مسأله خواسته است، تلاش کنید، هر نتیجه ای را که می توان از موقعیت این مسأله گرفت، فهرست کنید و، سپس، به اثبات درستی آنها پردازید. با هر مسأله ای،

مسئله‌های ۱ و ۲)، دو مسئله مختلف نیستند و می‌توان آنها را مسئله‌های هم‌ارز نامید.

مسئله را به صورت دیگری هم می‌توان مطرح کرد، که باز هم با مسئله‌های ۱ و ۲ هم‌ارز است.

مسئله ۳. مطلوب است محاسبه سطح جانبی هرم $SABCD$ ، به شرطی که $ABCD$ ، مربعی با ضلع به طول a باشد، همه وجه‌های جانبی هرم، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند و ارتفاع هرم، طولی برابر b داشته باشد.

در این‌جا نتیجه گرفتن گزاره ۲ از گزاره ۹ اندکی دشوارتر است. برای برطرف کردن این دشواری، ابتدا این پرسش ساده را در برابر خود قرار می‌دهیم: آیا ممکن است دو یال جانبی هرم، بر قاعده عمود باشند؟ روشن است که، پاسخ این پرسش، منفی است: اگر دو یال جانبی هرم بر قاعده عمود باشند، آن وقت با هم موازی‌اند، در حالی که، همه یال‌های جانبی، در رأس S به هم رسیده‌اند.

سپس، فرض می‌کنیم SBC ، زاویه‌ای قائمه، یعنی خط راست SB بر خط راست BC عمود باشد. به این ترتیب، (BC) بر (SB) و بر (AB) عمود است، یعنی (BC) بر صفحه SAB عمود می‌شود؛ ولی (BC) بر صفحه ABC واقع است، پس دو صفحه SAB و ABC برهم عمودند. چون بنا بر فرض، مثلث SAB قائم‌الزاویه است، دو حالت ممکن وجود دارد:

اول $\hat{SBA} = 90^\circ$ به جز این (SB) هم بر (BC) عمود است، پس (SB) بر صفحه ABC عمود است و، به این ترتیب ثابت می‌شود، یکی از یال‌های جانبی بر صفحه قاعده عمود است.

دوم $\hat{SBA} \neq 90^\circ$ و، در این صورت $\hat{SAB} = 90^\circ$ ، یعنی $(AB) \perp (SA)$ و چون دو صفحه SAB و ABC برهم عمودند، بنابراین (SA) بر صفحه ABC عمود می‌شود.

ممکن است پرسشی پیش آید: آیا حالت سوم وجود ندارد؟ آیا ممکن نیست زاویه ASB قائمه باشد؟ ولی اگر در یک وجه جانبی، زاویه رأس S قائمه، و بقیه راس‌ها هم، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند، آن وقت باید همه وجه‌های جانبی در رأس S قائم باشند، زیرا اگر تنها یکی از یال‌های جانبی بر ضلعی از قاعده عمود باشد، آن وقت، با توجه به تجزیه و تحلیلی که از

چه در هندسه روی صفحه و چه در هندسه فضایی می‌توان به این گونه عمل کرد، ولی به ویژه در هندسه فضایی اهمیت بیشتری دارد. درباره مسئله ۱، می‌توان این ویژگی‌ها یا رابطه‌ها را نتیجه گرفت (با فرض وجود ویژگی‌های ۱ و ۲):

(۳) یال SD بر ضلع CD از مربع قاعده عمود است:

(۴) یال جانبی SB بر ضلع BC از قاعده عمود است:

(۵) صفحه SAD بر صفحه SAB عمود است:

(۶) دو صفحه SAB و ABC برهم عمودند:

(۷) مثلث‌های SAD و SAB با هم برابرند:

(۸) مثلث‌های SBC و SDC با هم برابرند:

(۹) همه وجه‌های جانبی هرم، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌اند.

پیدا کردن این نتیجه‌ها، اهمیت بیشتری دارد تا اثبات آنها، زیرا اثبات آنها چندان دشوار نیست (نتیجه‌های ۳ و ۴ به یاری قضیه سه عمود: ۵ و ۶ با توجه به معیار عمود بودن دو صفحه بر هم).

این بررسی به شما کمک می‌کند که، اگر مثلاً بخواهیم از رأس S ، عمودهایی بر خط‌های راست DC و BC رسم کنیم، آنها را به اشتباه، غیر از SD و SB در نظر نگیریم. بدون این بررسی قبلی، ممکن است از این‌گونه اشتباه‌ها پیش آید. درضمن، این بررسی‌ها، حل مسئله ۱ را کم و بیش حاضر و آماده در برابر ما قرار می‌دهد.

با تجزیه و تحلیل منطقی موقعیت شکل می‌توان به نتیجه‌های دیگری هم رسید. مثلاً، می‌توانیم در این‌باره بیندیشیم: آیا می‌توان جای گزاره‌های فرض را با گزاره‌های حکم عوض کرد؟ اندکی دقت نشان می‌دهد که می‌توان گزاره ۲ را از گزاره‌های (۱ و ۵) و (۶) نتیجه گرفت، یعنی فرض ۲، با دو فرض (۵ و ۶) هم‌ارز است. در این صورت مسئله ۱ را می‌توان به این صورت تغییر داد:

مسئله ۲. سطح جانبی هرم $SABCD$ را پیدا کنید، به شرطی که قاعده $ABCD$ مربع به ضلع برابر a باشد و وجه‌های SAB و SAD بر صفحه قاعده عمود با ارتفاعی به طول برابر b باشند.

اگر شکل را بررسی کرده باشیم، متوجه می‌شویم که

(۸) مثلث‌های SAO , SBO و SCO برابرند؛
(۹) همه یال‌های جانبی، نسبت به صفحه قاعده، شیبی برابر دارند؛

$$\hat{SAO} = \hat{SBO} = \hat{SCO}$$

اثبات گزاره‌های (۳) تا (۹) دشوار نیست و، با توجه به آنها،
مسئله ۴، به سادگی حل می‌شود. در ضمن، ساختن مسأله‌هایی
هم‌ارز با مسئله ۴، چندان دشوار نیست. به عنوان نمونه:

مسئله ۵. در هرم $SABC$ ، قاعده ABC ، مثلثی است
قائم الزاویه با وتر $|AB| = C$ و زاویه حاده $\hat{A} = \alpha$. در
ضمن، وجه جانبی SAB بر صفحه قاعده عمود است (یا
ارتفاع هرم در صفحه SAB قرار دارد، یا ارتفاع از وسط
پاره خط راست AB ، یا از مرکز دایره محیطی مثلث قاعده
بگذرد و غیره) و طول یال جانبی SA برابر است با b . حجم
هرم را محاسبه کنید.

می‌توان مسأله‌های هم‌ارز را با پیش‌فرض‌های (۱) و (۳) یا (۱)
و (۴) یا (۱) و (۵) یا (۱) و (۶) یا (۱) و (۹) در نظر گرفت. حالت
انتخاب (۴) و (۶) می‌تواند مسأله‌ای جالب باشد.

II. چگونه از یک شکل فضایی پیچیده، به شکل
ساده‌تر و عملی‌تری برسیم؟ به این مسأله توجه کنید:
هرمی منتظم با قاعده شش ضلعی، که زاویه مسطحه
رأس آن برابر α است، داده شده است. مقدار زاویه دو
وجهی بین دو وجه مجاور آن را پیدا کنید.

در این جا، رسم تمامی هرم، چندان ساده نیست. به جز آن،
تعداد پاره خط‌های راست، صفحه‌ها، زاویه‌ها و زاویه‌های دو
وجهی، چنان زیادند که انتخاب عنصرهای لازم را بر حل مسأله
دشوار می‌کند. ولی حقیقت این است که ما، به تمامی شکل
نیازی نداریم و کافی است، بخش ساده‌ای از آن را انتخاب کنیم
که هم رسم آن ساده باشد و هم شامل همه عنصرهای لازم (برای
حل) باشد.

هرمی با قاعده مثلثی شکل را در نظر می‌گیریم که $\frac{1}{6}$ هرم
اصلی باشد: دو رأس آن، دو انتهای ارتفاع هرم اصلی و یک

شکل کرده‌ایم، آن وقت هیچ یک از زاویه‌های قائمه مثلث‌های
جانبی، در رأس هرم قرار نمی‌گیرد. از طرف دیگر، هر چهار
زاویه رأس هرم، نمی‌توانند قائمه باشند، زیرا در این صورت،
مجموع آنها برابر 360° درجه می‌شود، که ممکن نیست.

به این ترتیب، ثابت می‌شود که از گزاره‌های (۱) و (۹) می‌توان
گزاره (۲) را نتیجه گرفت؛ یعنی مسئله ۳ با مسأله‌های ۱ و ۲
هم‌ارز است.

مثال دیگری از این گونه می‌آوریم.

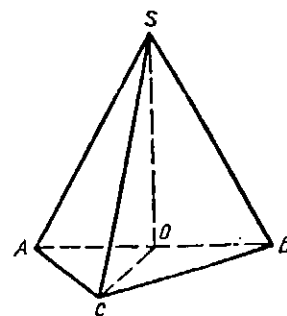
مسئله ۴. مطلوب است حجم هرم $SABC$ ، به شرطی که،
در آن قاعده ABC مثلثی قائم الزاویه با وتر به طول c و
زاویه حاده برابر α باشد و در ضمن هر یال جانبی طولی
برابر b داشته باشد.

بنابر فرض، در هرم $SABC$ می‌دانیم:

(۱) ABC مثلثی قائم الزاویه است ($\hat{C} = 90^\circ$):

(۲) یال‌های جانبی، طولی برابر دارند: $|SA| = |SB| = |SC|$

(شکل ۲).



شکل (۲)

اکنون باید به جست‌وجوی نتیجه‌های ناشی از دو فرض
برویم، سیاهه این نتیجه‌ها را در این جا داده‌ایم:
(۳) تصویر یال‌های جانبی بر صفحه قاعده، طولی برابر
دارند؛

$$|AO| = |BO| = |CO|$$

(۴) SO ، یعنی ارتفاع هرم، از نقطه O ، مرکز دایره محیطی
قاعده می‌گذرد؛

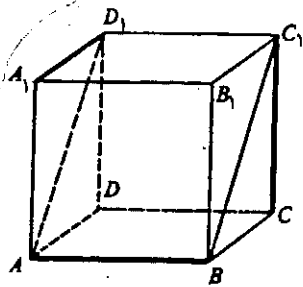
(۵) ارتفاع هرم، از وسط ضلع AB می‌گذرد؛

(۶) صفحه ASB بر صفحه ABC عمود است؛

(۷) مثلث‌های SAO ، SBO و SCO قائم الزاویه‌اند؛

دو رأس آن، روی یکی از این خط‌های راست و، دو رأس دیگر آن، روی دو خط راست دیگر باشد.

مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ به ضلع واحد را به عنوان چند وجهی تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم (شکل ۴). خط‌های راست AB ، CC_1 و $D_1 A_1$ دو به دو برهم عمودند و فاصله‌ای برابر ۱ دارند. متوازی‌الاضلاع $ABC_1 D_1$ (که در عین حال، مستطیل است) با شرط‌های مسأله می‌سازد و مساحتی برابر $\sqrt{2}$ دارد. هر متوازی‌الاضلاع دیگری هم که با شرط‌های مسأله در نظر بگیریم، همین مساحت را دارد (خودتان این حکم را ثابت کنید).

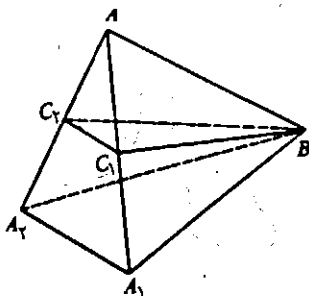


شکل (۴)

البته، همه مسأله‌ها به همین سادگی قابل تفسیر نیستند. به این مسأله توجه کنید:

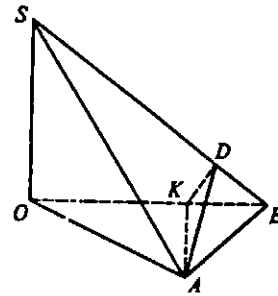
مسأله ۷. پرتو نور با زاویه α بر یک آئینه مسطح تابیده است. صفحه آئینه به اندازه زاویه β دور تصویر پرتو بر آئینه دوران می‌کند. پرتو باز تابیده به اندازه چه زاویه‌ای منحرف می‌شود؟

اندیشه حل مسأله در این جاست، که به جای بازتاب پرتو از آئینه (یعنی به جای درک فیزیکی مسأله) به قرینه نقطه نورانی نسبت به صفحه آئینه (یعنی درک ریاضی آن) توجه کنیم. A را نقطه سرچشمه نور فرض کنید (شکل ۵). B را نقطه‌ای، که در



شکل (۵)

ضلع قاعده آن، ضلعی از قاعده هرم اصلی باشد (شکل ۳).



شکل (۳)

در این هرم (با توجه به نام‌گذاری‌های شکل ۳)

$$|OB| = |OA|, \quad \hat{BOA} = 60^\circ, \quad \hat{ASB} = \alpha$$

در ضمن، پاره خط راست SO بر صفحه ABC عمود است. زاویه دو وجهی بین صفحه‌های ASB و OBS (یا OAS) برابر است با نصف زاویه دو وجهی مجهول (زاویه دو وجهی مجهول را φ می‌نامیم).

از نقطه A، عمودهای AD و AK را به ترتیب بر BS و OB فرود می‌آوریم؛ در این صورت $\hat{KDA} = \frac{\varphi}{2}$. اگر $|OA| = |OB| = R$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$|AK| = \frac{\sqrt{3}}{2} R, \quad |AB| = R, \quad |AD| = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|AK|}{|AD|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

در برخی موردها باید برعکس با اضافه کردن عنصرهایی شکل فضایی را ملموس‌تر کرده بویژه وقتی که در مسأله، تنها از خط‌ها و صفحه‌ها صحبت شده است، آنها را «بی‌پناه و سرگردان» در فضا رها نکنید و تلاش کنید یک جسم فضایی (که رسم آن ساده باشد) پیدا کنید که، این خط‌ها و صفحه‌ها وابسته به آن باشند. دو نمونه از این گونه می‌آوریم:

مسأله ۶. سه خط راست در فضا داده شده است که دوه‌دو بر هم عمودند و فاصله بین هر دو تا از آنها برابر واحد است. مساحت متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که،

شکل ۶ موقعیت مسأله و بستگی بین عنصرهای آن را روشن می‌کند. از خط راست AB صفحه‌ای عمود بر خط راست CK می‌گذرانیم و سپس هرم را بر این صفحه تصویر می‌کنیم (شکل ۷). در این عمل، خط راست CK بر نقطه K' تصویر می‌شود، که وسط پاره خط راست $A'B'$ است $|A'B'| = |AB| = 1$. ارتفاع $D'K'$ از مثلث $A'B'D'$ طولی برابر طول ارتفاع هرم دارد، یعنی $|D'K'| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. وسط پاره خط راست $D'K'$ تصویر نقطه M است. فاصله بین خط‌های راست CK و BM برابر است با فاصله از نقطه K' تا خط راست $B'M'$ (چرا؟). با یک مسأله ساده روی صفحه سر و کار پیدا می‌کنیم. مطلوب است طول ارتفاع وارد بر وتر، در مثلث قائم الزاویه‌ای که، طول ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه آن برابر $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ و $\frac{1}{4}$ است. و این طول (یعنی فاصله مورد نظر مسأله) برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ است.

شکل‌های فضایی، که همراه با خط‌ها و سطح‌های منحنی هستند، جای ویژه‌ای دارند. در این حالتها اغلب می‌توان (و باید) از تلاش برای رسم تمامی شکل فضایی صرف‌نظر کرد و به شکلی (که ممکن است مسطحه یا فضایی باشد) متوسل شد که شامل مرکزها، محورها، نقطه‌های اصلی، مماس‌ها و سایر عنصرهای اصلی مسأله باشد. مثلاً، اگر با چهار کره دو به دو مماس بر هم، سر و کار داشته باشیم، می‌توان یک چهار وجهی در نظر گرفت که یال‌های آن، طولی برابر قطرهای این کره‌ها داشته باشد و راس‌های آن، معرف مرکزهای این کره‌ها باشند. گاهی بهتر است شکل فضایی را در ذهن خود نگه داریم و تنها روی یک شکل ساده مسطحه (و یا حتی بدون آن) استدلال خود را ادامه دهیم، زیرا علاوه بر آن که رسم شکل اصلی دشواریهای ایجاد می‌کند، ممکن است از چارچوب صفحه کاغذ ما هم تجاوز کند و یا آن قدر شلوغ شود، که نتوان عنصرهای لازم آن را دید. به یک مسأله توجه کنیم:

مسأله ۹. چهار کره با شعاع‌های برابر بر صفحه‌ای مماس‌اند؛ در ضمن، هر کره بر دو کره مجاور خود مماس است. مخروطی را در نظر می‌گیریم که قاعده آن روی صفحه مماس بر کره‌ها باشد و ارتفاعی برابر قطر این کره‌ها

آن‌جا پرتو نوری به آینه تابیده است، A_1 و A_2 را قرینه‌های A به ترتیب نسبت به حالت نخستین و حالت دوران یافته آینه، C_1 را وسط پاره خط راست AA_1 ، C_2 تصویر A بر آینه در حالت نخستین است) و C_2 را وسط AA_2 می‌گیریم. چون بازتاب پرتو در امتداد پاره خط‌های راست A_1B و A_2B است، بنابراین زاویه مجهول برابر است با زاویه A_1BA_2 . خط‌های راست AC_1 و AC_2 ، به ترتیب بر حالت نخستین آینه و بر حالت دوران یافته آن عمودند، یعنی $C_1\hat{A}C_2 = A_1\hat{A}A_2 = \beta$. بنا به فرض $\hat{A}BC_1 = \alpha$. اگر $|AB| = |A_1B| = |A_2B| = a$ فرض کنیم، آن وقت

$$|AC_1| = a \sin \alpha \quad |C_1C_2| = |AC_1| \sin \beta = a \sin \alpha \sin \beta$$

($\hat{A}C_2C_1 = 90^\circ$)، زیرا C_1C_2 متعلق به آینه دوران یافته، و

C_2 تصویر A بر آن است). به این ترتیب

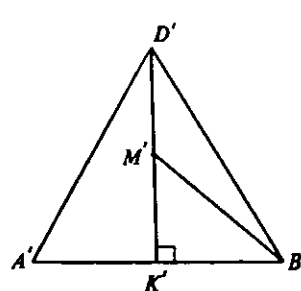
$$|A_1A_2| = 2|C_1C_2| = 2a \sin \alpha \sin \beta$$

اکنون با توجه به معلوم بودن طول ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین A_1BA_2 می‌توان مقدار زاویه A_1BA_2 را به دست آورد. این زاویه برابر است با:

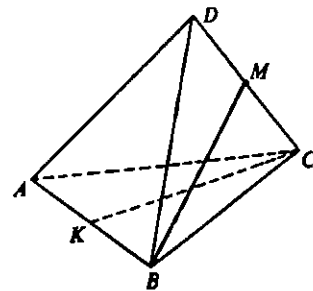
$$2 \arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$$

گاهی شکل فضایی تنها برای روشن کردن موقعیت لازم است (و گاهی برای این منظور هم لازم نیست) و می‌توان تمامی استدلال و محاسبه را روی یک شکل واقع بر صفحه انجام داد. به این مسأله توجه کنید:

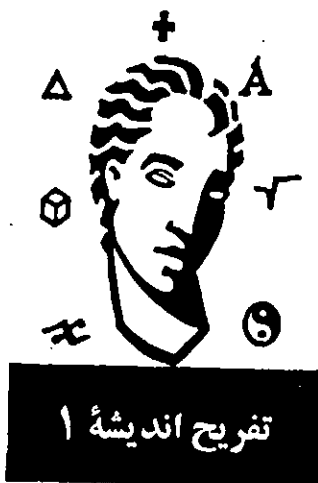
مسأله ۸. در چهار وجهی $ABCD$ ، همه یال‌ها طولی برابر واحد دارند. نقطه‌های K و M را به ترتیب وسط پاره خط‌های راست AB و CD انتخاب کرده‌ایم. فاصله بین دو خط راست CK و BM را پیدا کنید.



شکل (۷)



شکل (۶)



مربع و فقی

مربع و فقی زیر ظاهر ساده، اما در واقع بسیار غیر متعارف است. چون اعداد آن را به طور قائم، افقی، یا سطری جمع کنیم حاصل ۲۶۴ است.

در مربع و فقی چهار در چهاری چون این مربع می توان انتظار داشت که چهار مربع گوشه ای، چهار مربع میانی، و هریک از چهار مربع موجود به مجموع و فقی یکسانی برسند. تا اینجا مطلب شگفت انگیزی موجود نیست.

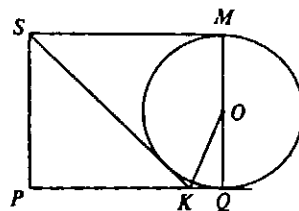
در این صورت ویژگی جالب این مربع و فقی چیست؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید بیابید.

۱۸	۹۹	۸۶	۶۱
۶۶	۸۱	۹۸	۱۹
۹۱	۱۶	۶۹	۸۸
۸۹	۶۸	۱۱	۹۶

جواب در صفحه ۸۷

داشته باشد؛ در ضمن سطح جانبی مخروط بر هر یک از این کره ها مماس است. نسبت حجم های مخروط و کره ها را پیدا کنید.

اگر شعاع هر کره را برابر R بگیریم، آن وقت مرکزهای آنها، مربعی با ضلع به طول $2R$ تشکیل می دهند. شکل ۸ برای حل



شکل (۸)

مساله کفایت می کند. در این شکل SP محور مخروط، MQ قطر یکی از کره ها (Q نقطه تماس کره با صفحه است) و SK مولد مخروط مماس بر کره است. روشن است که $|SM| = R\sqrt{2}$ (نصف قطر مربع با ضلع به طول $2R$). اگر $\hat{MSO} = \varphi$ ، آن وقت $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ یعنی

$$\hat{PSK} = 90^\circ - 2\varphi$$

$$|PK| = 2R \operatorname{tg}(90^\circ - 2\varphi) = R \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

اکنون دیگر به سادگی نسبت مورد نظر به دست می آید که برابر است با $\frac{1}{4}$.

تا بعد

