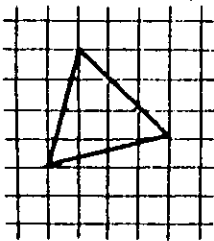


شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۸)

○ پرویز شهریاری

در اختیار داشتن پرگار یا گونیای با زاویه ۶۰ درجه، به دشواری برنمی‌خوریم. ولی آیا بدون این ابزارها می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم کرد که به‌طور مثال، رأسهای آن، در نقطه‌های گرهی یک صفحه کاغذ شطرنجی باشد؟ پاسخ این پرسش منفی است. مثلی که در شکل ۱ می‌بینید، به مثلث متساوی‌الاضلاع بسیار نزدیک است، ولی متساوی‌الاضلاع نیست (یعنی چشم نمی‌تواند بسادگی تشخیص دهد که، سه ضلع این مثلث، با هم برابر نیستند). در واقع، طول ضلعهای این مثلث، نسبت به هم، کمتر از ۳ درصد اختلاف دارند.



شکل (۱)

مثلث متساوی‌الاضلاع با همه سادگی خود، ویژگیهای جالب زیادی دارد که، اثبات برخی از آنها، چندان ساده نیست. برخی از این ویژگیها، در آغاز موجب شگفتی می‌شوند. سیاهه کوتاهی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع را در اینجا آورده‌ایم، ولی این سیاهه را می‌توان ادامه داده، اندیشه هندسی خود را درباره این ویژگیها بیازمایید و تلاش کنید، درستی آنها

با همه آن‌چه که درباره شکل و امکان فریب خوردن از آن گفتیم، شکل وسیله اصلی شناخت مسأله و پیدا کردن روش حل آن است. هیچ مسأله یا قانون ریاضی، هر قدر انتزاعی باشد، بدون نوعی تجسم عینی، قابل درک نیست؛ و شکل، یکی از امکانهایی است که می‌تواند به عینی‌تر شدن مفهوم یک مسأله یا یک قانون ریاضی کمک کند. همه دشواریها و گمراهیهایی که ممکن است ناشی از شکل باشد، در تجزیه و تحلیل نهایی منجر به این نکته می‌شود که شکل را درست رسم نکرده‌ایم و یا، به دلیل اشتباه چشم و اشتباه ناشی از ابزارهای رسم، نتوانسته‌ایم با دقت رسم کنیم. به همین مناسبت، وقتی از شکل برای حل مسأله‌ای باری می‌گیریم، باید همیشه خود را در برابر سه پرسش قرار دهیم:

(۱) آیا شکل را درست و، تا حد امکان، دقیق رسم

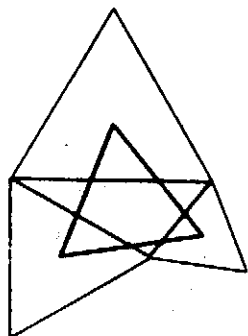
کرده‌ایم؟

(۲) آیا رابطه بین عناصرها در شکل و بستگی ظاهری بین این عناصرها (که در دید نخست به ما تلقین می‌شود) در واقع وجود دارند و آیا با استدلال منطقی و براساس آگاهیهایی که از ریاضیات داریم، قابل اثبات هستند؟

(۳) آیا نتیجه‌گیری ناشی از شکل، با تجربه و با عقل سلیم سازگار است؟

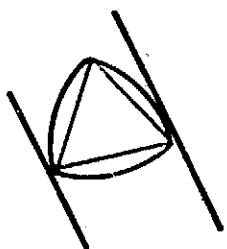
هیچ چیز بهتر از مثال، نمی‌تواند مطلب را روشن کند. ساده‌ترین نوع مثلث، مثلی است که سه ضلع برابر داشته باشد (مثلث متساوی‌الاضلاع). برای رسم چنین مثلی، به شرط

بساژیم، مثلثی هم که رأسهای در نقطه‌های برخورد این سه مثلث باشد، متساوی‌الاضلاع است (شکل ۴).



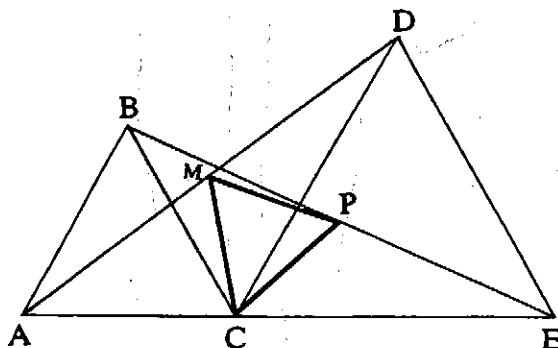
شکل (۴)

۷. فرانتس ره‌لو، آلمانی و متخصص مکانیک متوجه شد: اگر به مرکز هر رأس مثلث متساوی‌الاضلاع و با شعاع برابر طول ضلع مثلث، کمانی از دایره را رسم کنیم که دو رأس دیگر مثلث را به هم وصل کند، یک منحنی بسته به دست می‌آید (به نام مثلث ره‌لو) که پهنایی ثابت دارد، یعنی اگر دو خط راست موازی بر این منحنی رسم کنیم، فاصله بین آنها، همیشه برابر با طول ضلع مثلث می‌شود.



شکل (۵)

۸. در بین مثلثهای با محیط برابر، مجموع طولهای میانه‌ها، در مثلث متساوی‌الاضلاع، کمترین مقدار است.



شکل (۶)

را ثابت کنید:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع، تنها مثلثی است که سه محور تقارن دارد.

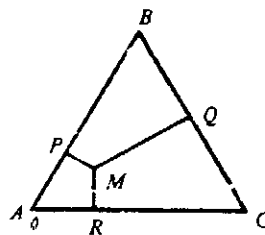
۲. در بین مثلثهای با محیط برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع، بیشترین مساحت را دارد.

۳. اگر طول شعاع دایره محاط در مثلث را r و طول شعاع دایره محیط بر مثلث را R بنامیم، بیشترین مقدار نسبت $\frac{r}{R}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید.

۴. اگر نقطه M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب و عمودهای MP ، MQ و MR را بر ضلعهای مثلث فرود آوریم (شکل ۲)، مجموع طولهای این سه عمود، به جای نقطه M بستگی ندارد و، در هر حال، برابر طول ارتفاع مثلث است. بجز این، همیشه داریم:

$$|AP| + |BQ| + |CR| = |BP| + |CQ| + |AR|,$$

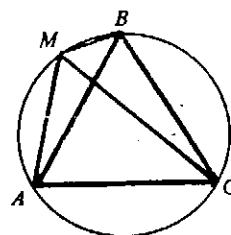
$$|AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2 = |BP|^2 + |CQ|^2 + |AR|^2$$



شکل (۲)

۵. اگر نقطه M را روی محیط دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کنیم، مجموع فاصله‌های این نقطه تا دو رأس نزدیکتر مثلث، برابر است با فاصله این نقطه تا رأس سوم (شکل ۳):

$$|MA| + |MB| = |MC|$$



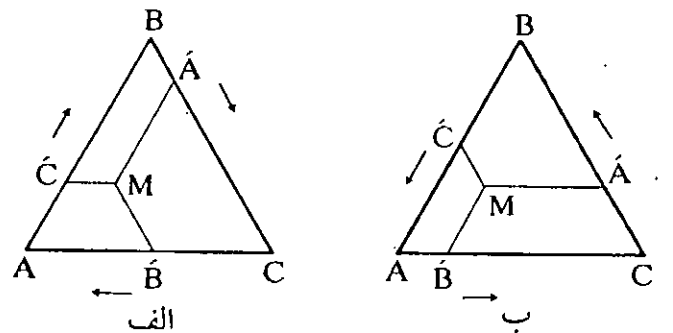
شکل (۳)

۶. و این قضیه که منتسب به ناپلئون است: اگر روی ضلعهای یک مثلث و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع

۹. روی پاره خط راست AE، نقطه دلخواه ۳ را انتخاب و مثلنهای متساوی الاضلاع ABC و CDE را در یک طرف پاره خط راست AE رسم کرده ایم (شکل ۶). وسط پاره خط راست AB را M و وسط پاره خط راست BE را P می نامیم. ثابت کنید، مثلث CMP متساوی الاضلاع است.

۱۰. نقطه M را در درون مثلث ABC انتخاب و از آنجا، خطهای راستی موازی ضلعهای مثلث رسم کرده ایم. اگر نقطه های برخورد این خطهای راست را با ضلعها با A' و B' و C' نشان دهیم، ثابت کنید، مجموع $|MA'| + |MB'| + |MC'|$ برابر است با طول ضلع مثلث اصلی.

درباره رسم شکل برای این مسأله، اندکی توضیح بدهیم. وقتی از نقطه M موازی ضلع BC رسم کنیم، دو ضلع AB و AC را قطع می کند، کدام نقطه برخورد را در نظر بگیریم و با چه نامی (A' یا B'، A' یا C')؟ همین دشواری، برای خطهای راست موازی AC و AB هم پیش می آید. معمول است که در صورت مسأله، با رسم شکل و یا با توضیح، وضع را روشن می کنند، ولی در اینجا نه شکلی داده اند و نه توضیحی.



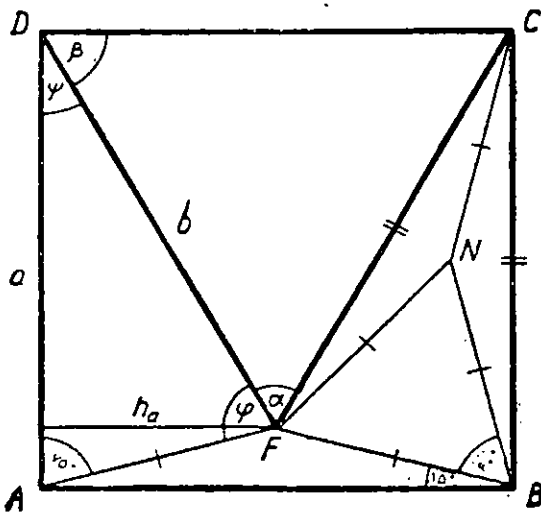
شکل (۷)

در این گونه موردها، باید روی محیط مثلث، جهتی را در نظر گرفت؛ در شکل ۷ - الف، جهت را از A به B، B به C و C به A (جهت حرکت عقربه های ساعت) و در شکل ۷ - ب، از A به C، C به B و B به A (عکس جهت حرکت عقربه های ساعت یا جهت مثلثانی) در نظر گرفته ایم. وقتی از M موازی یکی از ضلعها رسم می کنیم باید در جهت همان ضلع حرکت کنیم؛ فرض کنیم می خواهیم از نقطه M موازی با ضلع AB رسم کنیم؛ در این صورت در شکل الف، باید در جهت از A به B، یعنی به سمت برخورد با ضلع BC و در شکل ب، در جهت

از B به A و به سمت برخورد با AC حرکت کنیم؛ در حالت الف، نقطه برخورد را A' (هم نام با نقطه آغاز AB) و در حالت ب، نقطه برخورد را B' (هم نام با نقطه آغاز BA) می نامیم. به این ترتیب، در هر دو حالت، A' روی ضلع BC، B' روی ضلع AC و C' روی ضلع AB قرار می گیرد. اثبات حکم مسأله، برای هر یک از حالت های الف و ب دشوار نیست.

اکنون خودتان روشن کنید، در مسأله ۴ و برای برابری مورد نظر مسأله، پاره خطهای راست سمت چپ و سمت راست برابریها را چگونه انتخاب کرده ایم؟

۱۱. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث متساوی الساقین ABF را در درون مربع طوری رسم کرده ایم که، هر زاویه مجاور به قاعده AB در آن، برابر ۱۵ درجه باشد. ثابت کنید FCD، مثلثی متساوی الاضلاع است.

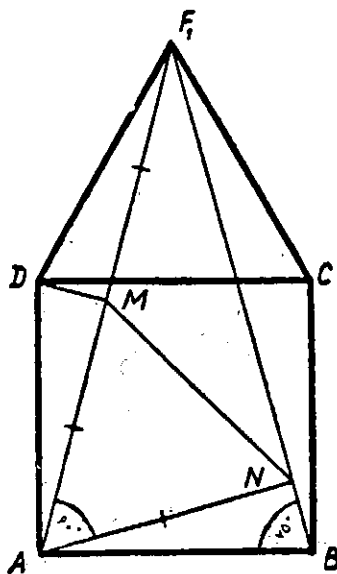


شکل (۸)

این، یکی از مسأله های مشهوری است که اغلب، و هر چند سال یکبار، در دست دانش آموزان دیده می شود و همه جا، به دنبال راه حل آن هستند؛ در حالی که با استفاده از برهان خلف، خیلی زود به نتیجه می رسد. درباره برهان خلف، اندکی بعد، صحبت خواهیم کرد و، در اینجا، راه حل مسأله را می آوریم.

تقارن شکل، روشن می کند که مثلث FCD متساوی الساقین است، یعنی $|FD| = |FC|$. بنابراین، برای متساوی الاضلاع بودن مثلث FCD، باید ثابت کنیم طول پاره خط راست FD با طول ضلع مربع برابر است.

این نام گذاریها را می پذیریم: $|AD| = a$ ، $|FD| = b$ ،



$$. \hat{AFD} = \varphi, \hat{CDF} = \beta, \hat{DFC} = \alpha$$

اگر مثلث FCD متساوی الاضلاع نباشد، یا $b > a$ و یا $b < a$. اگر $b > a$ ، آن وقت $\varphi < 75^\circ$ (در هر مثلث، ضلع کوچکتر، روبروی زاویه کوچکتر است) و در نتیجه $\alpha > 6^\circ$ (زاویه‌های به رأس نقطه F را بررسی کنید) و، بنابراین $\beta < 6^\circ$ ؛ از آنجا (با توجه به مثلث FCD) به دست می‌آید $b < a$. با فرض $b > a$ ، به نابرابری مخالف آن، یعنی $b < a$ رسیدیم که ممکن نیست؛ پس b نمی‌تواند از a بزرگتر باشد. به همین ترتیب، با فرض $b < a$ ، به نابرابری $b > a$ می‌رسیم؛ یعنی در حالت $b \neq a$ ، ضمن ارزیابی زوایه‌ها، فرض ما نقض می‌شود. تنها یک حالت باقی می‌ماند: $b = a$.

شکل (۹)

مسئله را می‌توان، بدون استفاده از روش برهان خلف و به‌طور مستقیم هم، حل کرد.

روی ضلع BC و در درون مربع ABCD، مثلث CNB را برابر مثلث BFA می‌سازیم (شکل ۸ را ببینید). در این صورت، برای مثلث BNF داریم: $|BN| = |BF|$ (به‌عنوان ضلعهای متناظر دو مثلث برابر) و $\hat{BNF} = 6^\circ$. بنابراین

مثلث BCF_1 را در نظر می‌گیریم. با توجه به شرط مسئله

داریم:

$$|BC| = |CF_1|, \hat{BCF_1} = 9^\circ + 6^\circ = 15^\circ$$

بنابراین

$$\hat{F_1BC} = 15^\circ, \hat{F_1BA} = 75^\circ$$

و چون نقطه F_1 ، روی محور تقارن مربع است، پس

$$\hat{F_1AB} = 75^\circ, \hat{AF_1B} = 3^\circ$$

عکس مسئله ۱۳، چنین است:

۱۴. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث

متساوی الساقین ABF_1 را با زاویه مجاور به قاعده برابر 75° درجه طوری ساخته‌ایم که نقطه F_1 و ضلع CD در یک سمت ضلع AB واقع باشند. ثابت کنید، مثلث DCF_1 متساوی الاضلاع است (شکل ۹).

اگر در مثلثهای AF_1D و ABF_1 ، ارتفاعهای DM و AN را رسم کنیم، با محاسبه مقدار زاویه MAN و توجه به برابری مثلثهای AMD و ABN، روشن می‌شود که مثلث MAN متساوی الاضلاع است. از مثلث ANF_1 به دست می‌آید:

$$|AN| = \frac{1}{\sqrt{3}} |AF_1| \text{ یا } |AM| = \frac{1}{\sqrt{3}} |AF_1|$$

بنابراین، DM، میانه و ارتفاع مثلث AF_1D است، یعنی

$$\hat{DAF_1} = \hat{DF_1A} = 15^\circ;$$

$$\hat{F_1DC} = \hat{ADF_1} - \hat{ADC} = 6^\circ$$

$$|NC| = |NB| = |NF|, \hat{CNB} = \hat{CNF} = 15^\circ$$

یعنی مثلثهای CNB و CNF برابرند، بنابراین $|CF| = a$ و مثلث FCD متساوی الاضلاع است. برای این که، استدلال ما، کمبودی نداشته باشد، می‌گوییم که، نقطه N، تنها می‌تواند در درون مثلث FBC قرار گیرد، زیرا در غیر این صورت، زاویه FNC برابر 21° درجه می‌شود که ممکن نیست.

درباره این مسئله، بیشتر می‌اندیشیم. آیا عکس این مسئله قابل حل است؟ عکس مسئله را در اینجا تنظیم کرده‌ایم، ولی حل آن را به عهده شما می‌گذاریم:

۱۲. روی ضلع CD و در درون مربع ABCD، مثلث متساوی الاضلاع FCD را ساخته‌ایم. مقدار زاویه‌های مثلث ABF را پیدا کنید (شکل ۸).

همچنین، می‌توان براساس اندیشه‌ای که در مسئله ۱۱

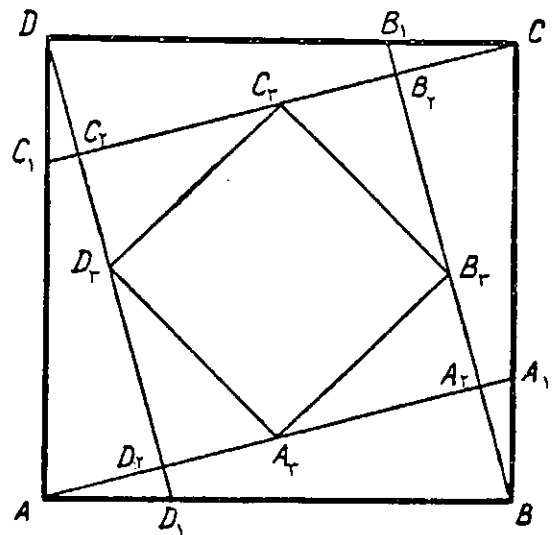
وجود دارد، مسئله دیگری طرح و حل کرد:

۱۳. روی ضلع CD از مربع ABCD و در بیرون مربع، مثلث متساوی الاضلاع DCF_1 را ساخته‌ایم (شکل ۹). مقدار زاویه‌های مثلث ABF_1 را پیدا کنید.

با توجه به مقدار زاویه F_1DC و با توجه به متقارن بودن شکل، قانع می‌شویم که، مثلث CF_1D ، متساوی‌الاضلاع است.

بر پایه اندیشه‌ای که در طرح مسأله ۱۱ به کار رفته است، با اندکی دقت و صرف وقت، می‌توان مسأله‌های بسیاری طرح کرد که، برخی از آنها، اندیشه‌های تازه‌ای را در برداشته باشند. برای نمونه، یکی از این گونه مسأله‌ها را می‌آوریم:

۱۵. مربع $ABCD$ را، به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم (واحد بودن طول ضلع مربع، تنها برای سادگی کار است و نقش اساسی در تنظیم مسأله ندارد). پاره‌خطهای راست AA_1 ، BB_1 ، CC_1 و DD_1 را در درون مربع طوری رسم می‌کنیم که، به ترتیب، با ضلعهای AB ، BC ، CD و DA ، زاویه‌ای برابر 15° درجه بسازند. ثابت کنید، از برخورد این پاره‌خطهای راست، مربع $A_1B_1C_1D_1$ به دست می‌آید که مساحتی برابر نصف مساحت مربع $ABCD$ دارد (شکل ۱۰).



شکل (۱۰)

می‌بینید، این مسأله، با مسأله ۱۱، بکلی فرق دارد؛ ولی در واقع، بر پایه همان اندیشه جدا کردن زاویه 15° درجه (یا 75° درجه) از زاویه‌های مربع پدید آمده است.

اگر به این نکته توجه کنیم که $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ، محاسبه مساحت مربع $A_1B_1C_1D_1$ به سادگی به دست می‌آید (اثبات مربع بودن $A_1B_1C_1D_1$ ، با محاسبه زاویه‌ها و طول ضلعها، دشوار نیست). در واقع

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} - 4S_{AA_1B}$$

در ضمن داریم:

$$|A_1B| = 2 - \sqrt{3}; |A_2B| = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2},$$

$$|AA_2| = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

و بنابراین

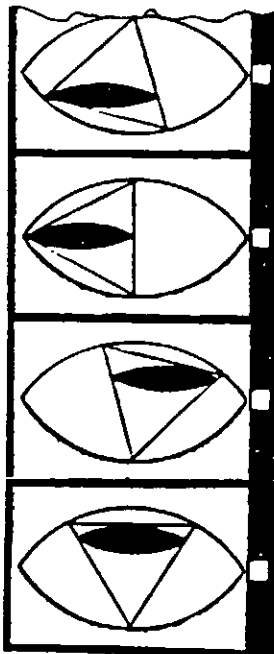
$$S_{AA_1B} = \frac{|AA_1| \cdot |A_1B|}{2} = \frac{1}{8};$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = 1 - 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

جالب است، اگر وسط پاره‌خطهای راست AA_1 ، BB_1 ، CC_1 و DD_1 را، به ترتیب A_2 ، B_2 ، C_2 و D_2 بنامیم، آن وقت $A_2B_2C_2D_2$ هم، یک مربع است که مساحتی برابر $2 - \sqrt{3}$ دارد (ثابت کنید!).

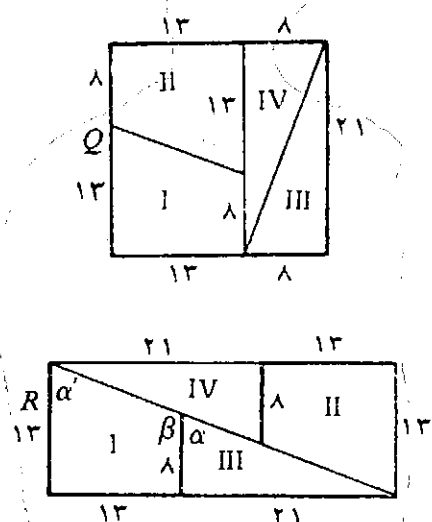
در پایان این بحث که به برخی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع اختصاص داشت، ویژگی دیگری را، که هم جالب و هم شگفتی‌آور است، می‌آوریم (آیا می‌توانید راهی برای اثبات این ویژگی پیدا کنید؟).

می‌دانیم، مثلث متساوی‌الاضلاع را، می‌توان در دایره‌ای که بر آن محیط شده است، چرخاند (شکل ۱۲ را، که در ضمن شکلی زیباست ببینید). ولی گمان می‌کنم، برای شما نامنتظر باشد که مطلع شوید:



برای این که ببینیم، عدم دقت در رسم شکل و یا عدم توانایی در رسم دقیق شکل، چه نتیجه‌های خنده‌داری ممکن است به بار آورد، یک مسأله ساده را، که به ساختمان یک شکل هندسی مربوط می‌شود، به صورتی کوتاه شده، از کتاب «اشتباه استدلالهای هندسی» می‌آوریم.

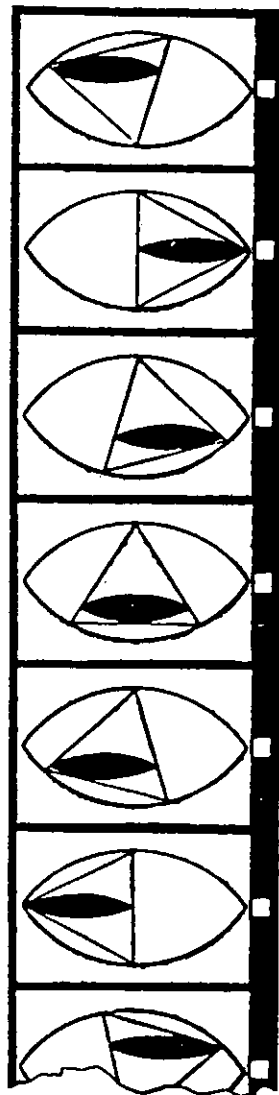
۱۷. آیا مساحت مربع با ضلع به طول ۲۱ سانتی متر، با مساحت مستطیل با ضلعهای ۳۴ و ۱۳ سانتی متر برابر است؟ به زبان دیگر، آیا $442 = 441$ ؟



شکل (۱۳)

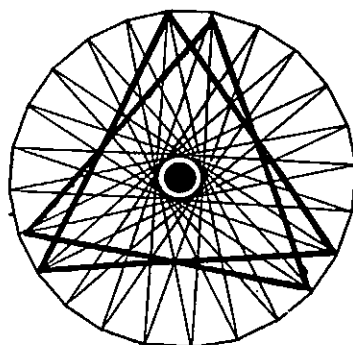
مربع Q را به دو مستطیل 13×21 و 8×21 بخش می‌کنیم (شکل ۱۳). مستطیل اول را به دو ذوزنقه قائم الزاویه برابر، با قاعده‌های ۱۳ و ۸ و مستطیل دوم را به دو مثلث قائم الزاویه برابر، با ضلعهای مجاور به زاویه قائمه ۸ و ۲۱ تقسیم می‌کنیم. با چهار بخشی که به دست می‌آید، مستطیل R را، آن گونه که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، می‌سازیم (بخشهای برابر را، در مربع Q و مستطیل R، با عددهای رومی مشخص کرده‌ایم). مساحت این مستطیل، برابر 13×34 ، یعنی ۴۴۲ سانتی متر مربع است، در حالی که مساحت مربع، که از همین بخشها درست شده است، برابر 21×21 ، یعنی ۴۴۱ سانتی متر مربع می‌شود. این یک سانتی متر مربع، کجا رفته است؟ خودتان آزمایش کنید. روی یک کاغذ شطرنجی، مربع Q را بپسند و آن را، با دقت، به چهار بخش مورد نظر تقسیم کنید؛ سپس، از بخشهایی که به دست آورده‌اید، مستطیل R را بسازید.

اکنون به جستجوی اشتباه خود می‌پردازیم. وقتی



شکل (۱۱)

۱۶. اگر دو انتهای دو کمان 120° درجه، از دو دایره‌ای که شعاعهای برابر دارند، طوری روی هم قرار دهیم که یک منحنی بسته به وجود آورند، مثلث متساوی الاضلاعی را که در آن محاط شده باشد، می‌تواند چرخاند (در شکل ۱۲، چند حالت از مثلث متساوی الاضلاع محاطی، نشان داده شده است).



شکل (۱۲)

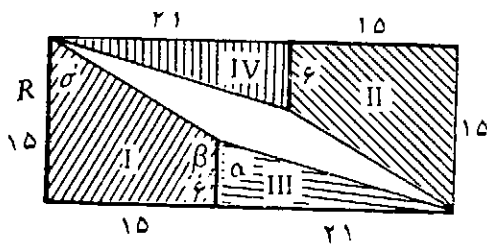
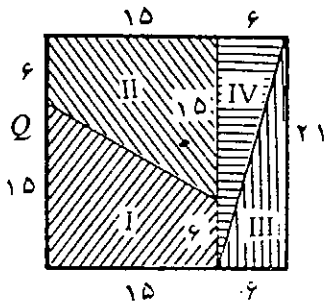
ضلعهای مجاور به زاویه قائمه در آن، برابر ۱۳ و ۵ سانتی متر است؛ در نتیجه

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{5}$$

و چون $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$ و یا $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$ ، پس $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha'$ و از آن جا

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha + \beta > 180^\circ$$

اکنون دیگر، وضع شکل ۱۳ روشن می شود: بخشهای I، II، III و IV را می توان در درون مستطیل جا داد، ولی آنها نمی توانند سطح مستطیل را، به طور کامل، بپوشانند و «شکافی» به شکل یک متوازی الاضلاع باریک، در طول قطر مستطیل به وجود می آورند. جای شگفتی نیست که متوجه این «شکاف» نمی شویم، زیرا در امتداد $36/4000$ سانتی متر (طول قطر مستطیل)، سطحی برابر یک سانتی متر مربع دارد و این کمتر از آن است که بتوان، ضمن تبدیل مربع Q به مستطیل R، متوجه آن شد.



شکل (۱۴)

اگر بخواهید شکلی داشته باشیم که این شکاف، در آن، بروشنی دیده شود، عددهای شکل ۱۳ را، شبیه شکل ۱۴، تغییر دهید، در این صورت، «شکاف» مساحتی برابر ۹۹ سانتی متر مربع پیدا می کند که در برابر 540° سانتی متر مربع (مساحت مستطیل)، می تواند عرض اندام کند و دیده شود.

تا بعد

می گویم از بخشهای I، II، III و IV (در مربع)، می توان مستطیلی درست کرد، به چشم خود و یا به آزمایشی که، با کاغذهای بریده، انجام دادیم، اعتماد کردیم. ضمن این که شکل های I و III (با II و IV) را پهلوی هم قرار دادیم، پذیرفتیم که مثلثی بدید می آید، یعنی پذیرفتیم که، ساق مایل دوزنقه I و وتر مثلث III، در یک راستا قرار می گیرند و در نقطه مشترک خود، دارای «شکستگی» نیستند. ولی روشن است، تکیه بر «بدن» و اعتماد به «چشم» (که در تجربه زندگی ما، در مورد های زیادی، دچار اشتباه شده است)، نمی تواند قانع کننده باشد و به جای استدلال هندسی به کار رود.

[باید گفت که این اشتباه، یعنی اعتماد به آن چه دیده می شود، ریشه تاریخی ژرفی دارد. خیلی طول کشید تا انسان هوشمند، با پیچیده تر شدن زندگی و ضمن نیازی که به محاسبه های دقیق تر پیدا کرد، متوجه شد که باید از خرد خود یاری بخواهد و استدلال منطقی را به جای «مشاهده» قرار دهد. در کاوشهایی که در معبدی از هند باستان انجام گرفته است، و به هزار سال پیش از میلاد مربوط می شود، برخی نوشته های ریاضی پیدا شده است که، در بین آنها، یک شکل هندسی هم دیده می شود که بر دیوار معبد نقش بسته است. شکل، درباره محاسبه مساحت دایره است؛ ولی به جای اثبات، در کنار شکل نوشته شده است: «دیده می شود».]

کشف همین کمبود، برای نارسایی اثبات کافی است و تا وقتی این کمبود برطرف نشود، هرگونه بحثی درباره آن بی معناست.

اگر بتوانیم ثابت کنیم، زاویه های α و β در شکل ۱۳، مجموعی برابر 180° درجه دارند، یا به جای آن ثابت کنیم، دو زاویه α و α' در همان شکل، با هم برابرند، آن وقت «نبودن شکستگی» را ثابت کرده ایم. آیا این اثبات ممکن است؟ روشن است که، باید به این پرسش، پاسخ منفی بدهیم، زیرا پاسخ مثبت به معنای برابری دو عدد ۴۴۱ و ۴۴۲ است.

ولی می توان ثابت کرد، دو زاویه α و α' با هم برابر نیستند و، در ضمن، روشن کرد، کدام بزرگتر است! در مثلث III شکل ۱۳، می توان تاثرات زاویه α را محاسبه کرد:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8}$$

اگر در دوزنقه I، از رأس زاویه β ، عمودی بر قاعده بزرگتر رسم کنیم، مثلث قائم الزاویه ای به دست می آید که،