

# شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۷)

○ پرویز شهریاری

هیچ اشکالی در استدلال نیست. ولی بیشتر دقت کنیم. اگر حاصل ضرب  $ab$  بر عدد اول  $p$  بخش پذیر باشد، از آنجا که  $a$  و  $b$  نسبت به هم اولند، یا  $a$  بر  $p$  بخش پذیر است و یا  $b$ . فرض کنیم  $a$  مضربی از  $p$  باشد، چون مجموع  $a+b$  هم مضربی از  $p$  است، بنابراین، به ناچار،  $b$  هم باید مضربی از  $p$  باشد. وقتی هر دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $p \neq 1$  بخش پذیر باشند، نمی توانند نسبت به هم اول باشند. در واقع، فرض مسأله، با خودش تناقض دارد. نمی توان دو عدد  $a$  و  $b$  را طوری پیدا کرد که، نسبت به هم اول باشند و، در ضمن، دو عدد  $ab$  و  $a+b$  بر عدد اولی مانند  $p$  بخش پذیر باشند.

یادداشت: در منطق ریاضی گفته می شود: از یک گزاره نادرست، می توان هر گزاره ای را نتیجه گرفت. به طور مثال می توان گفت: «اگر  $2$  با  $5$  برابر باشد، آن هنگام، هر معادله ای ریشه حقیقی دارد... ولی، این بحث مربوط به منطق ریاضی (که از دیدگاه منطقی درست است)، در آزمایش و عمل، کاربرد کمتری دارد و ضمن حل مسئله های محاسبه ای یا استدلالی، به جز در مورد های نادر، باید از آن صرف نظر کرد.

مثال ۱۶ - معادله  $x^x = x$  را حل کنید.

راه حل مسأله دشوار نیست، در این جا تنها در این باره صحبت می کنیم که: آیا  $x = -1$  جوابی از معادله است؟ در واقع به ازای  $x = -1$  داریم:

$$x^x = (-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = -1 = x$$

از این گونه نمونه ها، به فراوانی و در تمامی شاخه های ریاضیات وجود دارد. ریاضیات راهنمای عمل است. بنابراین، باید با عمل سازگار باشد. معادله، فرمول، شکل و حتی استدلال، به شرطی سودمند است که معرف یک واقعیت باشد و بتواند دشواری هایی را که در برابر زندگی انسان وجود دارد، حل کند. در غیر این صورت، به نوعی بازی ذهنی تبدیل می شود و نمی تواند سودی عملی داشته باشد. در این جا، مثال های دیگری می آوریم که، به جز مثال آخر، بسیار ساده اند، ولی بی توجهی ما به واقعیت ها می تواند در مورد آنها نیز، ما را گمراه کند. برخی از این مثالها به درک درست تعریفها مربوط می شود. گمان من بر این است که شما دانش آموز عزیز، به این مثالهای ساده نیاز ندارید، ولی ذکر آنها را بی فایده نمی دانم، چرا که تکرار، یکی از شرطهای یادگیری است.

مثال ۱۵ -  $p$  عددی اول و دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول اند.

ثابت کنید، اگر  $ab$  و  $a+b$  بر  $p$  بخش پذیر باشند، آن هنگام  $a^2 - b^2$  هم بر  $p$  بخش پذیر است.

مسأله، با استدلال ساده ای حل، و درستی حکم آن ثابت می شود. این برابری روشن است:

$$a^2 - b^2 = (a-b)[(a+b)^2 - ab]$$

مقدار داخل کروشه، بر  $p$  بخش پذیر است، زیرا هم  $(a+b)^2$  و هم  $ab$ ، بنا به فرض، مضربی از  $p$  هستند. در نتیجه، سمت راست برابری مضربی از  $p$  می شود، یعنی  $a^2 - b^2$  بر  $p$  بخش پذیر است.

و اگر  $k = 2n + 1$ ، آن هنگام،

$$\cos x = \cos\left(2n\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

بنابراین، برای جوابهای معادله، باید نوشت:

$$x_1 = 2k\pi, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال ۱۸ - این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{4x-y^2} - \sqrt{y+2} = \sqrt{4x^2+y}$$

معادله‌ای است گنگ. ولی چرا تنها یک معادله؟ برای دو مجهول، معادله لازم است و، در اینجا، تنها یک معادله به ما داده‌اند. به هر حال، باید معادله را گویا کنیم. جمله دوم را از سمت چپ برابری، به سمت راست می‌بریم و، دو طرف برابری را، مجذور می‌کنیم، به ترتیب به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4x-y^2})^2 &= (\sqrt{y+2} + \sqrt{4x^2+y})^2 \\ 4x-y^2 &= 2y+2+4x^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)} \\ (y+1)^2 + (2x-1)^2 + 2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)} &= 0. \end{aligned}$$

هیچ یک از جمله‌های سمت چپ برابری اخیر، نمی‌تواند منفی باشد و، بنابراین، برای این که مجموع آنها برابر صفر شود، باید هر سه جمله برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ 2x-1=0 \\ (y+2)(4x^2+y)=0 \end{cases}$$

از تعداد کم معادله‌ها نگران بودیم، اکنون باید از تعداد زیاد آنها گله داشته باشیم: سه معادله برای دو مجهول دستگاه تنها وقتی جواب دارد که، جواب حاصل از دو معادله اول، به خودی خود، در معادله سوم هم صدق کند. از دو معادله اول دستگاه، به سادگی، به دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -1$$

که در معادله سوم دستگاه هم صدق می‌کند. روشن است که این عددها را باید در معادله اصلی هم امتحان کرد، زیرا ضمن حل، با مجذور کردن دو طرف برابری، ممکن است جوابهای دیگری وارد آن شده باشند. ولی آزمایش نشان می‌دهد که، این مقدارهای  $x$  و  $y$ ، در معادله اصلی صدق می‌کنند.

اکنون به مثالی می‌پردازیم که منتسب به ارسطو<sup>۱</sup> است. این مثال، نمونه جالبی از استدلال نادرست است و با آن که نادرستی نتیجه گیری از همان آغاز روشن است رد کردن آن چندان ساده نیست و نیازمند منطقی ظریف و هوشمندانه است. پاسخ این «سفسطه» را از کتاب

$x = -1$  در معادله صدق می‌کند، با وجود این نباید آن را جوابی از معادله دانست. این معادله تنها یک جواب دارد:  $x = 1$ . چرا؟ دلیل این مطلب به تعریف تابع با ضابطه:

$$y = |f(x)|^{\varphi(x)} \quad (1)$$

مربوط می‌شود. دامنه این تابع، یعنی مقدارهای قابل قبول برای متغیر  $x$  - بنا به تعریف - با این شرطها تعیین می‌شود:  $f(x)$  مقداری مثبت باشد و در ضمن،  $f(x)$  و  $\varphi(x)$  دارای مقداری عددی باشند. چرا در تعریف این تابع،  $f(x)$  را مثبت می‌گیرند؟ برای این که، در حالت منفی بودن  $f(x)$ ، اغلب برای  $y$  نمی‌توان مقدار معینی پیدا کرد. فرض کنید بخواهیم مقداری برای عدد  $a = (-1)^{\sqrt{2}}$  پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$1/4 < \sqrt{2} < 1/5$$

به این امید، مقدارهای تقریبی  $\sqrt{2}$  را در نظر گرفتیم که شاید بتوانیم راهی برای محاسبه  $a$  پیدا کنیم. اگر  $\sqrt{2}$  را برابر  $1/4$  بگیریم:

$$a = (-1)^{1/4} = (-1)^{5/5} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$$

و اگر  $\sqrt{2}$  را برابر  $1/5$  فرض کنیم:

$$a = (-1)^{1/5} = (-1)^{3/3} = \sqrt[3]{(-1)^3} = \sqrt{-1}$$

که عددی موهومی است.

در بحثی دقیقتر، وقتی در (۱) داشته باشیم  $f(x) < 0$ ، برای پیوستگی یا ناپیوستگی تابع و در نتیجه، برای مشتق پذیر بودن یا مشتق پذیر نبودن تابع نمی‌توانیم حرفی بزنیم. در مثال بعدی، احتمال اشتباه بیشتر است.

مثال ۱۷ - این معادله را حل کنید:

$$\sin^2 x - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} = 1 \quad (\cos x)$$

خیلی زود و به سادگی، این دو جواب به دست می‌آید:

$$x_1 = 2k\pi \quad x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

برای  $x_1 = 2k\pi$  نمی‌توان ایرادی گرفت، زیرا به ازای آن داریم:

$$\cos x = \cos(2k\pi) = 1$$

که مقداری مثبت است. ولی کسینوس  $x$ ، به ازای همه مقدارهای  $x_2$ ، مثبت نمی‌شود، اگر  $k = 2n$ ، آن هنگام

$$\cos x = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$



که ممکن نیست). به جز این، می توان گفت که، دایره کوچکتر، با لغزش مثبت می غلتد، زیرا در هر حال، باید داشته باشیم:

$$|M_1P_1| = |MP| = \widehat{PM'}$$

و بنابراین:

$$|M_1P_1| > P_1M'_1$$

برعکس، اگر دایره کوچکتر را، بدون لغزش، روی خط راست  $M_1N_1$  بغلتانیم، ثابت می شود که دایره بزرگتر، با لغزش منفی خواهد غلتید.

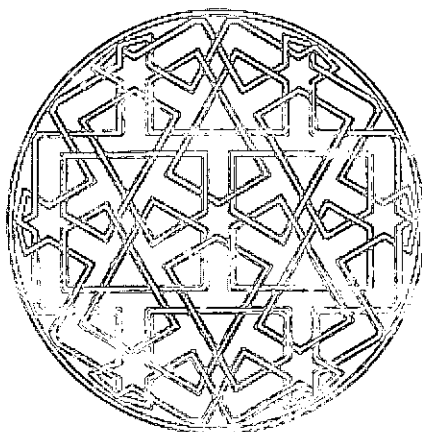
با تعریفهای هندسی هم، می توان به همین نتیجه ها رسید: وقتی دایره بزرگتر شکل (۱)، طوری بغلتد که در هر وضع داشته باشیم،  $|MP| = \widehat{PM'}$ ، آن وقت برای دایره کوچکتر، باید نابرابری  $|M_1P_1| > P_1M'_1$  برقرار باشد و داشته باشیم:

$$|M_1P_1| = \frac{R}{r} P_1M'_1$$

که در آن،  $R$  و  $r$ ، شعاعهای دو دایره بزرگتر و کوچکتر هستند. بنابراین، دایره کوچکتر، با لغزش مثبت به ضریب  $\frac{R}{r} > 1$  می غلتد. برعکس، اگر دایره کوچکتر، بدون لغزش بغلتد، دایره بزرگتر، با لغزش منفی به ضریب  $\frac{r}{R} < 1$  خواهد غلتید.

#### ◆ یادداشتها

1- Aristotélés (فیلسوف یونانی سده چهارم پیش از میلاد)



لغزش منفی» دارد. تنها در حالتی که لغزش وجود نداشته باشد، می توان نتیجه گرفت: شعاع دایره های که روی خط راست می غلتد، به اندازه زاویه ای دوران می کند و راهی که می پیماید، برابر است با طول کمان روبه رو به این زاویه، به طور مثال در شکل (۱) داریم:  $|MP| = \widehat{PM'}$  و به ویژه،  $MM^*$  برابر است با طول محیط دایره ای که می غلتد. در حالتی که لغزش مثبت باشد  $|MP| > \widehat{PM'}$  و در حالتی که با لغزش منفی سروکار داشته باشیم  $|MP| < \widehat{PM'}$ .

اکنون با بیان هندسی، تفاوت گونه های مختلف غلتیدن را شرح می دهیم، اگرچه به خاطر روشتر بودن مطلب، گاهی از زبان جنبش شناسی (سینماتیک) هم استفاده می کنیم. پاره خط راست  $MM^* = 2\pi R$  را در نظر می گیریم (شکل ۱) و برای هر نقطه آن مثل  $P$ ، در یک طرف خط راست  $MM^*$ ، دایره ای به مرکز  $O'$  و شعاع برابر  $R$  رسم می کنیم، روی محیط این دایره، کمان  $PM'$  را برابر طول پاره خط راست  $PM$ ، طوری جدا می کنیم که  $PM'$  و  $PM$  نسبت به نقطه  $P$ ، در یک جهت باشند [یعنی کمان  $PM'$  (و اگر کمان بزرگتر از نیم دایره باشد بخشی از آن که به  $P$  چسبیده است) و پاره خط راست  $PM$ ، در یک سمت قطر  $PO'$  واقع باشند]. اگر این ساختمان را، برای همه حالت های ممکن نقطه  $P$  روی پاره خط راست  $MM^*$ ، انجام دهیم، گوئیم (گرچه با زبان «جنبش شناسی» صحبت می کنیم، ولی در واقع، از حوزه هندسه خارج نمی شویم)، مجموعه همه دایره های مماس، از یک دوران دایره به شعاع  $R$  روی خط راست  $MN$  - که بدون لغزش روی خط راست  $MN$  می غلتد - به دست می آید و مکان هندسی نقطه  $M$  متناظر با وضعهای مختلف نقطه  $P$ ، عبارت است از مسیر نقطه  $M$ .

اگر در این ساختمان، برابری  $|MP| = \widehat{PM'}$  را به  $|MP| = k\widehat{PM'}$  تغییر دهیم ( $k$  ضریب ثابتی مخالف واحد است)، می گوئیم: «دایره با لغزش ثابت به ضریب  $k$  می غلتد، در ضمن، لغزش را مثبت یا منفی می گوئیم، وقتی که  $k=1$  مثبت یا منفی باشد».

باتوجه به این تعریف، به مسأله مربوط به چرخ برمی گردیم. از دیدگاه جنبش شناسی، وقتی از دو دایره هم مرکز، دایره بزرگتر روی خط راست  $MN$ ، بدون لغزش، می غلتد (شکل ۱)، دایره کوچکتر، روی خط راست  $M_1N_1$ ، نمی تواند بدون لغزش بغلتد. در واقع، اگر دایره کوچکتر هم، بدون لغزش بغلتد، در لحظه ای که مرکز مشترک دو دایره، روی  $O'$  قرار گیرد، شکل متحرک دارای دو مرکز دوران لحظه ای  $P$  و  $P_1$  خواهد بود (و در این صورت، سرعت نقطه  $M'$ ، باید هم در جهت عمود بر  $PM'$  و هم در جهت عمود بر  $P_1M'$  باشد