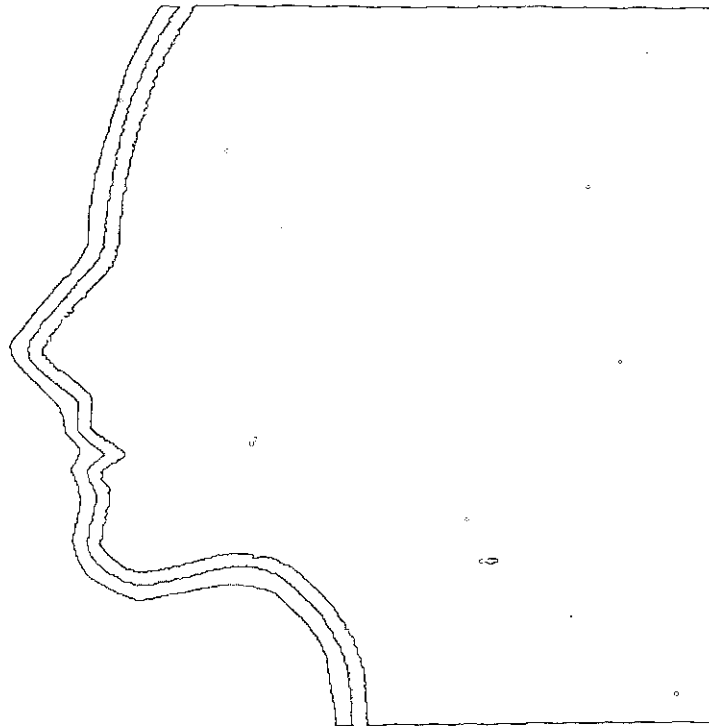


شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۶)

○ پرویز شهریاری



درواقع، اگر ثابت کنیم، قطره‌های مستطیل محاطی (که در نقطه P به هم رسیده‌اند) برهم عمودند، آن وقت مربع بودن این مستطیل روشن می‌شود.

عمودهای A'M و D'N را، به ترتیب، بر ضلعهای CD و BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم الزاویه A'C'M و D'B'N با هم برابرند، زیرا وترهای این دو مثلث، قطره‌های مستطیل محاطی‌اند و در مستطیل، دو قطر طولهایی برابر دارند؛ ضلعهای مجاور به زاویه قائمه A'M و D'N نیز با هم برابرند (هرکدام برابر ضلع مربع ABCD هستند). از برابری این دو مثلث، نتیجه می‌شود:

$$\widehat{A'C'M} = \widehat{D'B'N}$$

از اینجا، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\widehat{A'C'C} + \widehat{D'B'N} = 180^\circ$$

یعنی B'CC'P، یک چهار ضلعی محاطی است و باید داشته باشیم:

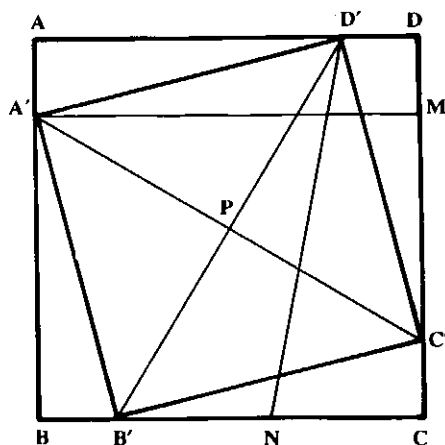
$$\widehat{C'PB} + \widehat{B'CC'} = 180^\circ$$

ولی B'CC' زاویه‌ای قائمه است، پس زاویه C'PB هم قائمه می‌شود؛ یعنی قطره‌های مستطیل A'B'C'D' در نقطه P برهم عمودند. قضیه ثابت و مسأله حل شد.

دوباره در استدلال دقت کنید. هیچ اشتباهی در استدلالها نیست؛ اشتباه در اینجا است که شکل را در یکی از حالت‌های ممکن رسم کرده‌ایم. به شکل ۲ توجه کنید: مستطیل

در شماره سوم سال اول برهان (تابستان ۱۳۷۱)، در صفحه ۱۰، ضمن آوردن مسأله‌ای از هندسه، دیدیم که چگونه ممکن است، شکل ما را فریب دهد. درواقع، شکل هندسی، می‌تواند از دو طریق در برابر ما دام بگسترده: (۱) در موردی که شکل را اشتباه و بی‌دقت رسم کنیم، و (۲) وقتی که شکل را تنها در حالتی خاص در نظر بگیریم و یا حالت خاصی از آن را از یاد ببریم. در اینجا دو نمونه جالب دیگر می‌آوریم.

مثال ۱۲. مستطیل A'B'C'D' را در مربع ABCD محاط کرده‌ایم، به نحوی که هر رأس آن روی یکی از ضلعهای مربع ABCD باشد. ثابت کنید، A'B'C'D' هم، یک مربع است.



* شکل ۱

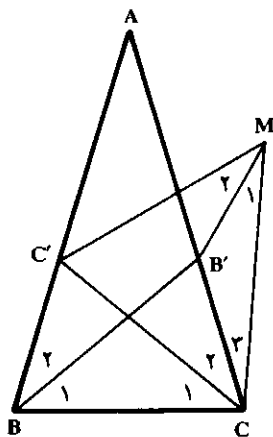
با هم برابر باشند، آیا مثلث متساوی الساقین است؟ به زبان دیگر، آیا می‌توان گفت: شرط لازم و کافی، برای متساوی الساقین بودن مثلث، این است که دو نیمساز داخلی آن برابر باشند؟

این مسأله، از همان دوران شکوفایی ریاضیات در یونان باستان مطرح شده بود، ولی روش هندسی حل آن به دست نمی‌آمد. بظاهر، نخستین کسی که این مسأله را حل کرد، ژاکوب شتینر (Shtainer) ریاضیدان سوئیسی (۱۷۹۶ - ۱۸۶۳ میلادی) بود که بیشتر در زمینه هندسه کار می‌کرد و در سال ۱۸۴۰ میلادی توانست راه حلی کم و بیش پیچیده و طولانی برای این مسأله پیدا کند. چهل سال بعد، در سال ۱۸۸۰ میلادی، یک مهندس فرانسوی به نام دسکوب، روش دیگری که خیلی ساده‌تر و براساس برهان خلف بود، برای حل مسأله پیدا کرد. این روش را، که بسیار جالب است، در اینجا می‌آوریم.

بر اساس BB' و CC' نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC هستند و می‌دانیم:

$$|BB'| = |CC'|$$

باید ثابت کنیم، مثلث ABC متساوی الساقین است.



شکل ۲ *

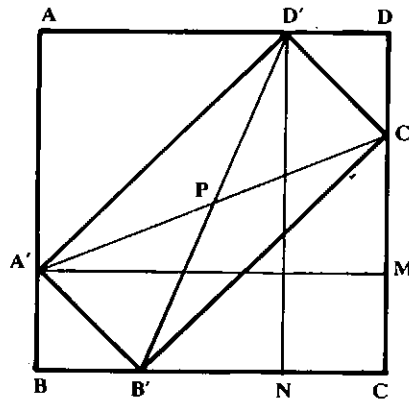
از C' و B' ، خطهای راستی، به ترتیب، موازی با (BB') و (CC') رسم می‌کنیم تا در نقطه M به هم برسند.

چهار ضلعی $BB'MC'$ متوازی الاضلاع است و، بنابراین

$$\hat{M}_P = \hat{B}_P = \frac{1}{2} \hat{B}$$

اکنون فرض می‌کنیم، مثلث ABC ، متساوی الساقین نباشد و داشته باشیم $\hat{B} > \hat{C}$.

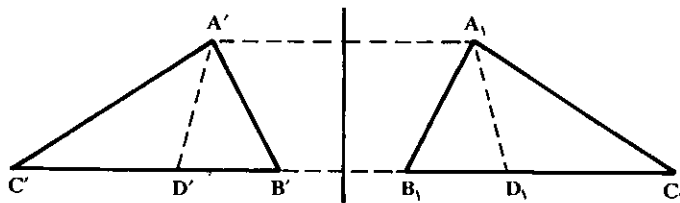
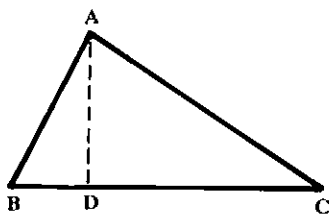
محاطی را طوری رسم کرده‌ایم که ضلعهای آن موازی با قطرهای مربع $ABCD$ باشد. چه تفاوتی با شکل ۱ دارد؟ در اینجا هم، مثلثهای قائم الزاویه $A'MC'$ و $D'B'M$ با هم برابرند و در نتیجه، دو زاویه $D'B'C$ و $A'C'C$ با هم برابرند؛ ولی اینها دو زاویه روبه‌رو در چهارضلعی $PB'CC'$ هستند و از برابری آنها، نمی‌توان محاطی بودن چهارضلعی $PB'CC'$ را نتیجه گرفت. مطلب روشن است: اگر مستطیل محاط در مربع، ضلعهای موازی با قطرهای مربع نداشته باشد، خود یک مربع است، ولی اگر ضلعهای مستطیل محاطی موازی قطرهای مربع باشند (به شرطی که رأسهای مستطیل در وسط ضلعهای مربع قرار نگیرند)، مستطیلی با طول و عرض نابرابر است.



شکل ۳ *

اکنون به یک مسأله کم و بیش تاریخی می‌پردازیم. نیمسازها، در ردیف ارتفاعها و میانه‌ها، از عناصر اصلی یک مثلث اند. با وجود این، مسأله‌هایی که در رابطه با نیمسازها طرح می‌شوند، دشوارتر از مسأله‌های مربوط به عناصرهای دیگر، از آب درمی‌آیند. به طور مثال با در دست داشتن سه ارتفاع یا سه میانه یک مثلث، می‌توان بسادگی مثلث را رسم کرد، در حالی که رسم مثلث، با معلوم بودن طول سه نیمساز آن، با دشواری مواجه می‌شود. اگر فرصتی دست داد، درباره این دشواری و علت آن، صحبت خواهیم کرد. در اینجا، به مسأله مشهور دیگری از نیمسازها می‌پردازیم. می‌دانیم، در مثلث متساوی الساقین، نیمسازهای وارد به دو ساق، با هم برابرند، ولی آیا عکس این قضیه هم درست است؟ یعنی، اگر در مثلثی، دو نیمساز داخلی

بنامیم، روشن است که AP نیمساز زاویه A می شود (سه نیمساز داخلی هر مثلث، از یک نقطه می گذرند): اگر بتوانیم برابری دو مثلث ABB' و ACC' را ثابت کنیم، متساوی الساقین بودن مثلث ABC ثابت می شود. این دو مثلث، در زاویه A و نیمساز همین زاویه مشترک اند و، درضمن، قاعده هایی برابر دارند. بنابراین، برای حل مسأله، باید این قضیه را ثابت کنیم: اگر در دو مثلث، یک ضلع، زاویه روبه روی آن ضلع و نیمساز داخلی همین زاویه، برابر باشند، آن وقت، این دو مثلث برابرند.



* شکل ۵

دو مثلث را هم جهت در نظر می گیریم. این فرض، لطمه ای به کلی بودن قضیه نمی زند. درواقع، اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم جهت نباشند (شکل ۵)، می توان به جای مثلث $A'B'C'$ ، مثلث $A_1B_1C_1$ را، که قرینه محوری مثلث $A'B'C'$ نسبت به محور عمود بر $B'C'$ است، انتخاب کرد.

دایره محیطی مثلث ABC را رسم می کنیم. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ را طوری روی مثلث ABC قرار دهیم که B_1 بر B و C_1 بر C قرار گیرند و A_1 در همان نیم صفحه شامل A باشد، آن وقت، اگر A_1 بر A قرار گیرد، قضیه ثابت شده است. فرض می کنیم، A_1 بر A واقع نشود و در نقطه ای روی کمان BA باشد (چون دو زاویه A و A_1 برابرند، نقطه A_1 روی کمان دایره واقع می شود؛ درضمن، اگر A_1 را روی کمان AN هم بگیریم، روش استدلال تغییر نمی کند).

مثلث $MC'C$ متساوی الساقین است، زیرا

$$|MC'| = |BB'| = |CC'|$$

از اینجا نتیجه می شود:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_3$$

$$\text{ولی } \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \hat{B} \text{ و } \hat{C}_2 = \frac{1}{2} \hat{C}, \text{ پس}$$

$$\hat{M}_1 + \frac{1}{2} \hat{B} = \hat{C}_3 + \frac{1}{2} \hat{C}$$

چون فرض کردیم $\hat{B} > \hat{C}$ ، پس باید داشته باشیم:

$$\hat{M}_1 < \hat{C}_3 \Rightarrow |B'C| < |B'M|$$

و چون $|B'M| = |BC'|$ (ضلعهای روبه رو در متوازی الاضلاع $BB'MC'$)، پس

$$|B'C| < |BC'|$$

در دو مثلث BCC' و BCB' داریم

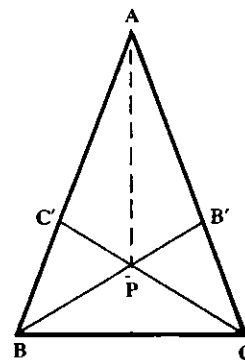
$$|BC| = |BC|, |BB'| = |CC'|,$$

$$|B'C| < |BC'|$$

بنابراین $\hat{B}_1 < \hat{C}_1$ یا، اگر دو طرف نابرابری را دو برابر کنیم: $\hat{B} < \hat{C}$

به این ترتیب، با فرض $\hat{B} > \hat{C}$ ، به نتیجه $\hat{B} < \hat{C}$ رسیدیم. با روشی مشابه، می توان ثابت کرد که با فرض $\hat{B} < \hat{C}$ به نتیجه $\hat{B} > \hat{C}$ می رسیم، یعنی در هر دو حالت $\hat{B} > \hat{C}$ و $\hat{B} < \hat{C}$ مواجه با تناقض می شویم. تنها یک راه می ماند: $\hat{B} = \hat{C}$ ؛ یعنی مثلث ABC متساوی الساقین است.

برای این مسأله، راه حل ساده دیگری وجود دارد که، درضمن، موجب اثبات قضیه کلی تری می شود.



* شکل ۴

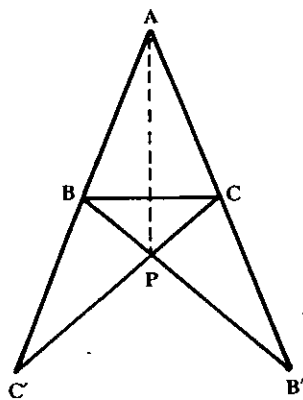
اگر نقطه برخورد نیمسازهای BB' و CC' را P

راست BB' و CC' روی نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت، برابر طولهای پاره خطهای راست BB' و CC' ، به معنای متساوی الساقین بودن مثلث ABC است.

اکنون ممکن است این پرسش پیش آید که آیا برابر بودن طول نیمسازهای خارجی دو زاویه B و C ، این بار هم به معنای متساوی الساقین بودن مثلث ABC است؟ بظاهر، باید، پاسخ مثبت باشد. به شکل ۷ توجه کنید؛ دو مثلث ABB' و ACC' با هم برابرند، زیرا در زاویه A و نیمساز AP از همین زاویه مشترک‌اند (می‌دانیم، نیمساز داخلی زاویه A ، از نقطه برخورد نیمسازهای خارجی دو زاویه B و C می‌گذرد) و ضلع روبه‌روی به زاویه A در دو مثلث (یعنی BB' و CC') طولهایی برابر دارند، بنابراین، بنابر معیار تازه‌ای که در مورد برابری دو مثلث پیدا کردیم، این دو مثلث برابر می‌شوند و داریم:

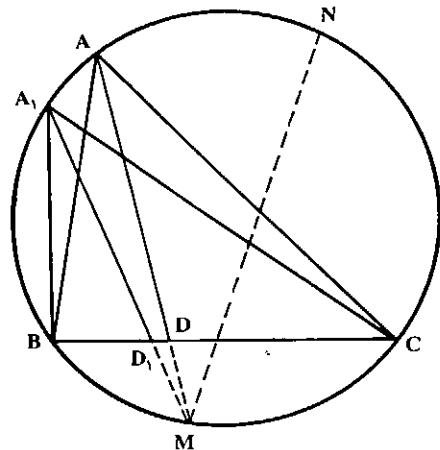
$$|AB| = |AC|$$

یعنی مثلث ABC متساوی الساقین است.



* شکل ۷

به این استدلال که روی شکل ۷ (یعنی مدلی که برای مسأله ساخته‌ایم) انجام دادیم، هیچ ایرادی نمی‌توان گرفت. با وجود این، به کمک مثلثات و اندکی محاسبه، می‌توان ثابت کرد (صفحه ۲۵۵ از کتاب «مسابقه‌ها، کنکورهای المپیادهای ریاضی» را ببینید) که، اگر دو نیمساز خارجی دو زاویه مثلث، طولهایی برابر داشته باشند، ممکن است مثلث متساوی الساقین نباشد. مثلاً اگر مثلثی با این زاویه‌ها رسم کنیم:

$$\hat{A} = 36^\circ, \hat{B} = 132^\circ, \hat{C} = 12^\circ$$


* شکل ۶

شرطها را مرور کنیم: در دو مثلث ABC و A_1BC ، قاعده BC مشترک، دو زاویه A و A_1 و، همچنین، طولهای دو نیمساز AD و A_1D_1 برابرند.

امتدادهای AD و A_1D_1 از نقطه M ، وسط کمان BC می‌گذرند. می‌دانیم وتر کوچکتر، متعلق به کمان کوچکتر است، یعنی

$$|A_1D_1| + |D_1M| < |AD| + |DM|$$

چون، نیمسازهای AD و A_1D_1 ، طولهایی برابر دارند، پس باید داشته باشیم:

$$|D_1M| < |DM|$$

و این ممکن نیست، زیرا قطر NM بر وتر BC عمود است و وضع دو مایل MD_1 و MD طوری است که باید داشته باشیم: $|D_1M| > |DM|$. وجود این تناقض به معنای آن است که A_1 بر A قرار می‌گیرد و دو مثلث ABC و A_1BC_1 قابل انطباق بر یکدیگرند.

در اینجا به دو نتیجه اصلی توجه کنیم:

(۱) معیار تازه‌ای، برای برابری دو مثلث به دست آوردیم: شرط لازم و کافی، برای برابری دو مثلث این است که، در یک ضلع، زاویه روبه‌رو به آن ضلع و نیمساز داخلی همان زاویه برابر باشند.

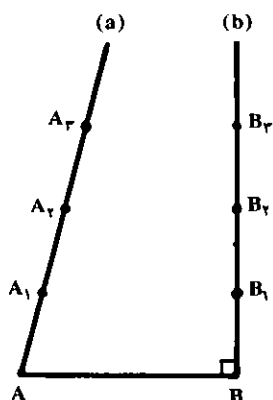
(۲) در اثبات قضیه، از نیمساز بودن پاره خطهای راست BB' و CC' استفاده نکردیم، بنابراین، مسأله اصلی را می‌توان به این صورت تعمیم داد: اگر در مثلث ABC ، پاره خطهای

کوچکتر از زاویه ۶۰ درجه است).

مثال بعدی، هم استدلال و هم مُدل شکل، ما را فریب می‌دهد. این مسأله و استدلال سفسطه‌آمیز آن، متعلق به پروکلوس (۴۱۰ - ۴۸۵ میلادی)، فیلسوف ذهن‌گرا و نوافلاطونی یونان باستان است.

به شکل ۱۰ توجه کنید: خط راست (a) با پاره خط راست AB زاویه‌ای حاده ساخته است و خط راست B بر پاره خط راست AB عمود است. نقطه‌های A_1 و B_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{\sqrt{3}} |AB|$$



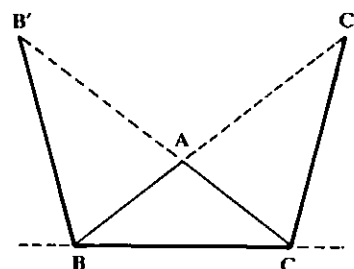
* شکل ۱۰

پاره‌خطهای راست AA_1 و BB_1 نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، زیرا، اگر این دو پاره‌خط راست، یکدیگر را در نقطه‌ای مثل M قطع کنند، آن وقت در مثلث MAB ضلع AB از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر می‌شود. به همین ترتیب، پاره‌خطهای راست AA_2 و BB_2 نمی‌توانند نقطه برخوردی مثل N داشته باشند، زیرا طول ضلع AB در مثلث NA_1B_1 نمی‌تواند از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد. اگر این استدلال را، ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، خطهای راست (a) و (b)، هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

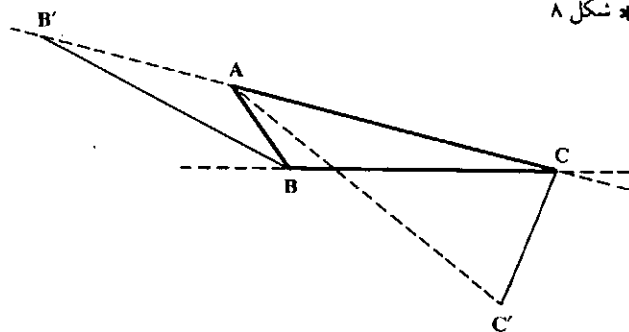
اشتباه در کجاست؟ نخست این که، شکل ۱۰، یعنی مُدل خود را، طوری رسم کرده‌ایم که نمی‌تواند اشتباه را روشن کند. دوم این که، از این استدلال تنها می‌توان نتیجه گرفت که، پاره‌خطهای مایل و عمود هم‌شماره (AA_1 و BB_1 یا AA_2 و BB_2 و غیره) یکدیگر را قطع نمی‌کنند و به قول خود

آن وقت، نیمسازهای خارجی دو زاویه B و C، طولهایی برابر پیدا می‌کنند، در حالی که مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست (چنین مثلثهایی را، شبه متساوی‌الساقین می‌نامند).

اشکال در کجاست؟ چه اشتباهی رخ داده است؟ درواقع، در رسم شکل (یعنی در ساختن مُدل) تنها به یکی از حالت‌های ممکن توجه کرده‌ایم. به شکل‌های ۸ و ۹ توجه کنید.



* شکل ۸



* شکل ۹

در شکل ۸، هر دو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C، در نیم‌صفحه شامل نقطه A، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند و در شکل ۹، یکی از نیمسازهای خارجی (نیمساز خارجی زاویه B) در نیم‌صفحه شامل نقطه A، نیمساز دیگر (نیمساز خارجی زاویه C) در نیم‌صفحه‌ای که شامل A نیست، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند. بنابراین، مُدل ما برای حل مسأله، ناقص بود، چون تنها یکی از سه حالت ممکن را در نظر گرفته‌ایم. مسأله وقتی به‌طور کامل حل می‌شود که دو حالت مربوط به شکل‌های ۸ و ۹ را هم در نظر بگیریم.

درواقع، در دو حالت شکل ۷ و شکل ۸، با مثلث متساوی‌الساقین و در حالت شکل ۹ با مثلث شبه متساوی‌الساقین سر و کار داریم (در مثلث شبه متساوی‌الساقین، زاویه A



ادب ریاضی

منطق قوانینی را به دست می دهد که انسان را از اشتباه و لغزش و خطای در معقولات باز می دارد، قوانینی که به وسیله آنها، در معقولات، آنچه را که ممکن است خطا کننده ای در آنها خطا کند می آزمایند. زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز امکان ندارد که اشتباهی پیش آید، و آن همان معقولاتی است که آدمی گویی بنابر فطرت می تواند آنها را بشناسد، و درباره آنها یقین حاصل کند، مانند اینکه کُل بزرگتر از جزء است، یا عدد سه فرد است. اما امور دیگری نیز هست که ممکن است در آنها خطایی پیش آید و آدمی را در رسیدن به حقیقت به اشتباه بی افکند، این گونه امور باید با فکر و اندیشه و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود. در این دسته از امور است - نه در آن دسته اول - که هرکس خواستار دست یافتن به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد، به قوانین منطق نیازمند می شود.

احصاء العلوم فارابی

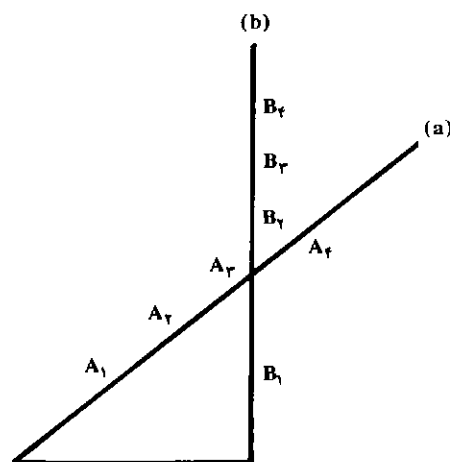
ترجمه خدیو جم

موضوعهای منطق آن چیزهاست که قوانین منطق برای آنهاست، و این موضوعها عبارتند از: معقولات، از جهت دلالت الفاظ بر آنها، و الفاظ، از لحاظ دلالتشان بر معقولات.

احصاء العلوم فارابی

ترجمه خدیو جم

پروکلوس، از این راه نمی توان برخورد دو خط راست (a) و (b) را ثابت کرد، ولی به این معنا نیست که (a) و (b) نقطه برخورد ندارند. مثلاً از کجا معلوم است که $A_k A_{k+1}$ و $B_n B_{n+1}$ ($k \neq n$) یکدیگر را قطع نکنند (شکل ۱۱). به این ترتیب، چیزی را ثابت کرده ایم و چیز دیگری را نتیجه گرفته ایم.



* شکل ۱۱



تفریح اندیشه ۱

برای یک مهماندار هواپیما لازم است که لباسش را هر روز تغییر دهد. چنانچه او به ازای هر شلوار سه بلوز و به ازای هر بلوز دو روسری داشته باشد، در طی سه سال به چند بلوز احتیاج دارد تا بتواند هر روز از یک لباس متفاوت با روزهای دیگر استفاده کند؟

جواب در صفحه ۸۸