

شما هم می توانید در درس

ریاضی خود موفق باشید (۱۵)

پرویز شهریاری



ولی به طور مستقیم دیده می شود که معادله (۱)، دو جواب دارد:
 $x = \frac{1}{4}$ و $x = 1$ (آزمایش کنید!); در ضمن، نقطه های متناظر این
 ریشه ها در روی نمودار، روی خط راست $y = x$ نیستند. به این
 ترتیب، معادله (۱)، دست کم سه جواب دارد.

این حقیقت، موجب شگفتی بسیاری از دانش آموزان و، به
 احتمالی، دبیران آن ها می شود. ولی این، مسأله تازه ای نیست و، به
 عنوان نمونه، می تواند ما را قانع کند که، در حل نموداری معادله ها و
 استفاده از شکل، باید احتیاط کامل را رعایت کنیم تا گمراه نشویم. راز
 کار روشن است: شکل ۱، تنها طرحی و مدلی تقریبی از نمودار
 تابعهاست و در مورد معادله (۱)، منجر به اشتباه می شود.

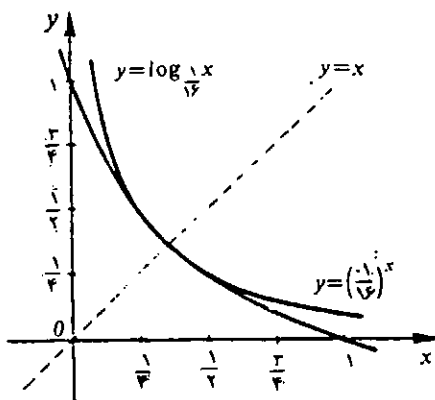


مثال ۱۱: این معادله، چند ریشه دارد:

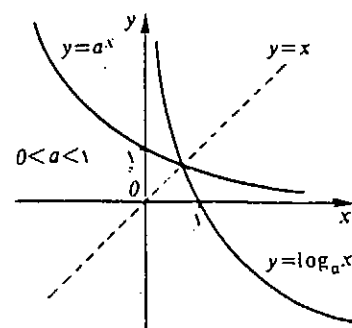
$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x \quad (۱)$$

اگر طرح نمودار تابعهای $y = \log_a x$ و $y = a^x$ را، با شرط
 $0 < a < 1$ رسم کنیم (شکل ۱)، روشن می شود که، این نمودارها،
 همیشه، یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند؛ در ضمن، این نقطه، روی
 خط راست $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد.

شکل (۲)



شکل (۱)



به این ترتیب، اگر معادله (۳)، دست کم یک ریشه داشته باشد، معادله (۲) هم دارای ریشه خواهد بود. نکته دیگری را هم یادآوری می‌کنیم. به ازای $a > 1$ ، تابع $f(x) = a^x$ صعودی است. معادله (۳) را می‌توان به صورت $f(f(x)) = x$ نوشت که، در این صورت، معادله (۳) به صورت $f(x) = x$ در می‌آید.

پیش قضیه، اگر تابع $y = f(x)$ صعودی باشد، آن وقت معادله‌های زیر هم ارزند:

$$f(f(x)) = x \quad \text{و} \quad f(x) = x$$

اثبات: x را ریشه معادله $f(x) = x$ می‌گیریم. در این صورت:

$$f(f(x)) = f(x) = x.$$

یعنی x ، ریشه معادله $f(f(x)) = x$ هم هست. برعکس، فرض کنید $f(f(x)) = x$ ، در ضمن $f(x) \neq x$ ، در این صورت یا $x > f(x)$ یا $x < f(x)$ ؛ ولی از آن جا که تابع f صعودی است، در حالت اول به دست می‌آید:

$$f(x) > f(f(x)) = x.$$

و در حالت دوم:

$$f(x) < f(f(x)) = x.$$

و این یک تناقض است، زیرا با شرط $x > f(x)$ به دست می‌آید $x < f(x)$ و برعکس. از این پیش قضیه و یادآوری قبلی، نتیجه می‌شود که، به ازای $a > 1$ ، معادله (۲) با معادله $a^x = x$ هم ارز است.

بررسی معادله $a^x = x$

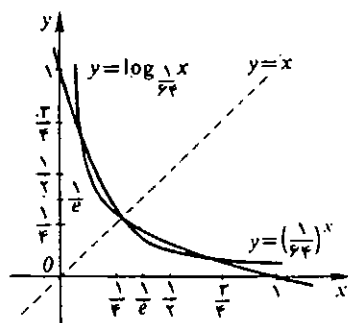
ابتدا از قضیه مهمی یاد می‌کنیم که، به احتمال زیاد، از آن اطلاع دارید.

قضیه: (بولتسانو - وایراشتراس). اگر تابع $y = f(x)$ ، در بازه بسته $[a, b]$ ، معین و پیوسته باشد، در ضمن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ ، آن وقت معادله $f(x) = 0$ ، ریشه‌ای در بازه (a, b) دارد.

اثبات این قضیه در دوره آنالیز ریاضی داده می‌شود. با وجود این، درک عینی آن روشن است: منحنی پیوسته‌ای که در شکل ۴ داده شده است، به ناچار، محور Ox را قطع می‌کند. از این قضیه، در این جا، بارها استفاده خواهیم کرد.

شکل ۲، دقیق‌تر و به کمک کامپیوتر رسم شده است. روی این شکل هم نمی‌توان، تعداد ریشه‌های معادله (۱) را، مشخص کرد، زیرا به دلیل ضخامت خط‌های منحنی، دو نمودار در فاصله‌ای، روی هم قرار گرفته‌اند.

شکل (۳)



شکل ۳ هم، به همان دقت شکل ۲ و با کامپیوتر رسم شده است. ولی روی آن، به روشنی دیده می‌شود که معادله زیر-دارای سه ریشه است:

اگر نمودارهای دو تابع $y = \log_{1/64} x$ و $y = (1/64)^x$ را، با همان دقت قبلی، و به طور مثال با واحد برابر 10^{-6} سانتیمتر، رسم می‌کردیم، آن وقت شبیه شکل ۳ به دست می‌آمد و قانع می‌شدیم که معادله (۱) هم، دارای سه ریشه است. ولی دریغ که، در این جا، نمی‌توانیم این شکل را، با توجه به بُعدهای بزرگ خود نشان دهیم. درست است که شکل‌های ۲ و ۳ با کامپیوتر رسم شده‌اند، ولی هیچ کامپیوتری نمی‌تواند نمودارهای دقیق ایده‌آلی رسم کند. بنابراین، نمی‌توان با استناد به شکل، مسأله را مورد تحقیق قرار داد و با تکیه به شکل، آن را حل شده دانست. برای حل مسأله، استدلال دقیق ریاضی لازم است.

حالت کلی معادله را در نظر می‌گیریم:

$$a^x = \log_a x \quad (۲)$$

که در آن، a می‌تواند هر عدد مثبتی به جز واحد باشد.

یادآوری می‌کنیم که، معادله (۲)، با معادله

$$a^{a^x} = x \quad (۲')$$

هم ارز است. به جای معادله (۲')، معادله

$$a^x = x \quad (۳)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر x ، ریشه‌ای از معادله (۳) باشد، آن وقت:

$$a^{a^x} = a^x = x.$$

یعنی x ، در ضمن ریشه معادله (۲) یا (۲') هم هست.

$\frac{1}{e} < a < e$ ، معادله (۳')، درست دو ریشه دارد.

تمرین ۲. با استفاده از نمودار شکل ۵، ثابت کنید، نمودار تابع $y = x^{\frac{1}{x}}$ به صورت شکل ۶ در می‌آید و، از آن جا، معادله $x^{\frac{1}{x}} = a$ را مورد بررسی قرار دهید.

تمرین ۳. نمودار تابع $y = x^x$ را رسم و معادله $x^x = a$ را بررسی کنید.

به این ترتیب، معادله (۲)، به ازای $\frac{1}{e} < a < e$ ، درست دو ریشه؛ به ازای $a = e$ ، یک ریشه $x = e$ دارد؛ و به ازای $a > e$ ، ریشه‌ای ندارد.

حالت $0 < a < 1$

معادله $a^x = x$ ، به ازای $0 < a < 1$ ، دارای یک ریشه منحصر x است.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a^x - \log_a x$$

و رفتار آن را مطالعه می‌کنیم. برای این منظور، مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{xa^x \ln^2 a - 1}{x \ln a}$$

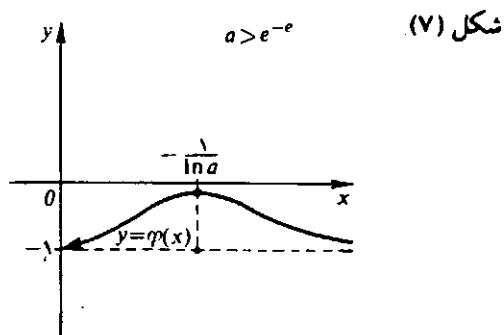
صورت کسر مشتق را $\varphi(x)$ می‌نامیم:

$$\varphi(x) = xa^x \ln^2 a - 1$$

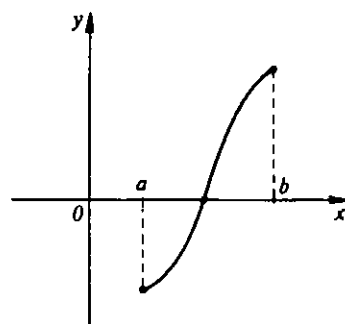
مخرج کسر مشتق منفی است (به ازای هر $x > 0$)، و بنابراین،

علامت $f'(x)$ ، مخالف علامت $\varphi(x)$ است.

تمرین ۴. ثابت کنید، تابع $\varphi(x)$ ، به ازای $x < -\frac{1}{\ln a}$ نزولی و به ازای $x > -\frac{1}{\ln a}$ صعودی است و حداکثر مقدار $\varphi(x)$ به ازای $x = -\frac{1}{\ln a}$ به دست می‌آید.



شکل (۴)



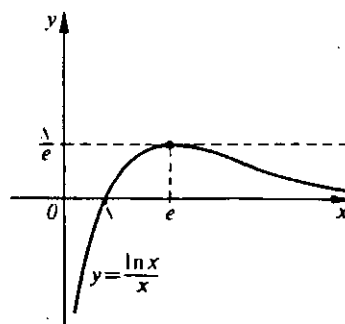
در حالت خاصی که، تابع $f(x)$ ، در بازه بسته $[a, b]$ ، همه جا صعودی یا همه جا نزولی باشد، معادله $f(x) = 0$ ، در بازه (a, b) ، یک ریشه منحصر دارد.

اکنون، معادله (۳) را بررسی می‌کنیم. این معادله، با معادله

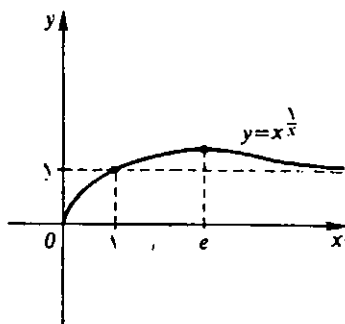
$$\ln a = \frac{\ln x}{x} \quad (3')$$

هم ارز است. نمودار تابع $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ را رسم می‌کنیم. چون $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ، پس تابع $h(x)$ ، به ازای $x < e$ صعودی، و به ازای $x > e$ نزولی است و در نقطه $x = e$ ، ماکزیمی برابر $\frac{1}{e}$ دارد (شکل ۵). بنابراین معادله (۳')، به ازای $\frac{1}{e} > \ln a$ (یعنی به ازای $a > e^e$) ریشه ندارد و به ازای $a = e^e$ ، تنها یک ریشه دارد: $x = e$.

شکل (۵)

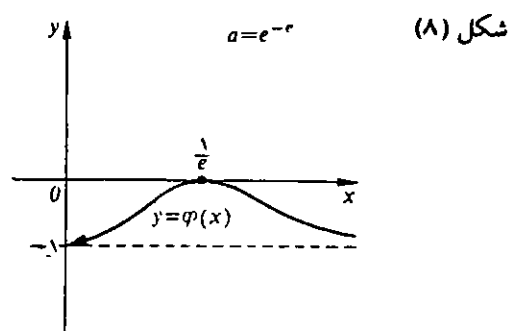
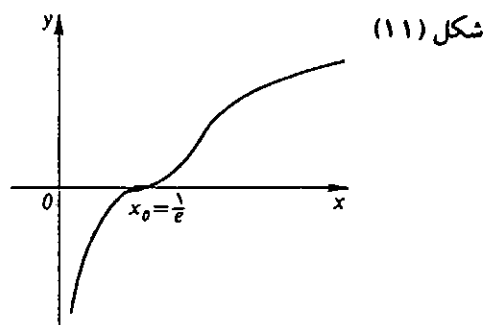


شکل (۶)



بر اساس بحث‌های بالا، این سه تمرین را حل کنید:

تمرین ۱. ثابت کنید به ازای $\frac{1}{e} < \ln a < 1$ ، یعنی به ازای



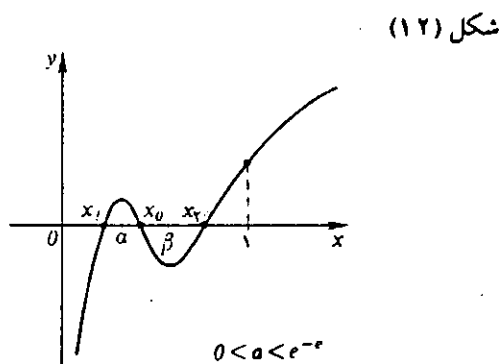
تمرین ۵. ثابت کنید، به ازای $0 < a < e$ ، داریم:

$$\varphi(1) = a \ln^2 a - 1 < 0$$

راهنمایی. ماکزیم تابع $g(a) = a \ln^2 a$ را پیدا کنید.

از تمرین ۵ نتیجه می‌شود که، تابع $\varphi(x)$ ، در دو نقطه α و β برابر صفر می‌شود و، در ضمن

$$0 < \alpha < -\frac{1}{\ln a}, \quad -\frac{1}{\ln a} < \beta < 1$$



و این، به معنای آن است که تابع f ، به ازای $x \in (0, \alpha)$ صعودی، به ازای $x \in (\alpha, \beta)$ نزولی و دوباره به ازای $x \in (\beta, 1)$ صعودی است. بنابراین، α نقطهٔ ماکزیم و β نقطهٔ می‌نیم تابع f است (نمودار این تابع، در شکل ۱۲ داده شده است).

برای کامل کردن بررسی خود، ثابت می‌کنیم: $\alpha < x_0 < \beta$.
تمرین ۶. ثابت کنید، به ازای $0 < a < e^{-e}$ ، داریم $\frac{1}{e} < x_0$.
راهنمایی. اگر فرض کنید $x_0 > \frac{1}{e}$ ، بنست می‌آورید:

$$x_0 = a^{x_0} < a^{\frac{1}{e}} < \frac{1}{e}$$

که فرض $x_0 > \frac{1}{e}$ را نقض می‌کند.

از تمرین ۴، نتیجه می‌شود، اگر حداکثر مقدار $\varphi(x)$ ، به ازای همهٔ مقادیر x ، غیر مثبت باشد ($\varphi_{\max} \leq 0$)، آن وقت تابع $f(x)$ ، به ازای هر $x > 0$ ، صعودی است، به نحوی که x ، تنها ریشهٔ معادلهٔ (۲) خواهد بود (شکل‌های ۷ و ۸).

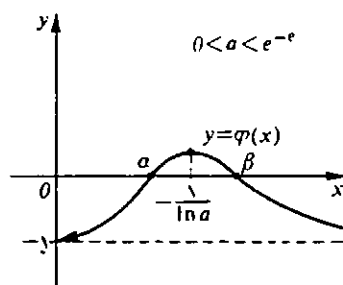
اگر نامعادلهٔ $\varphi_{\max} = -\frac{\ln a}{e} - 1 \leq 0$

را حل کنیم، به دست می‌آید: $a \geq e^{-e}$. بنابراین معادلهٔ (۲)، به ازای $e^{-e} \leq a < 1$ درست یک ریشهٔ دارد: $x = x_0$.

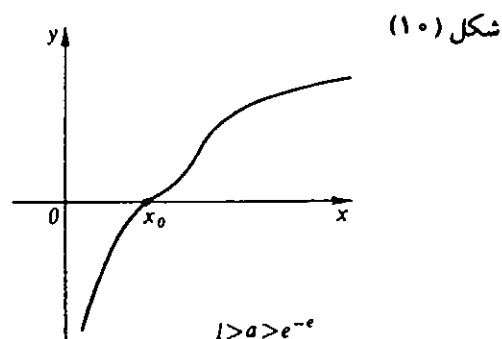
در حالت $0 < a < e^{-e}$ داریم: $\varphi_{\max} > 0$ و نمودار تابع φ بصورتی است که در شکل ۹ نشان داده شده است. برای روشن شدن مطلب، کافی است توجه کنیم که

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi(1) < 0$$

شکل (۹)

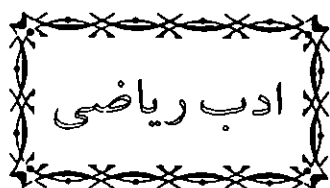


در ضمن نمودار تابع $f(x) = a^x - \log_a x$ ، به ازای $e^{-e} < a < 1$ در شکل ۱۰ و به ازای $a = e^{-e}$ در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



شکل (۱۳) $a > e^{\frac{1}{e}}$ $y = a^x$ $y = \log_a x$ $y = x$

شکل (۱۴) $y = (e^{\frac{1}{e}})^x$ $y = x$ $y = \log_{e^{\frac{1}{e}}} x$



شکل (۱۵) $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ $y = a^x$ $y = x$ $y = \log_a x$

علم حیل عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آنها در ریاضیات با برهان ثابت شده است بر اجسام خارجی منطبق سازد، و به ایجاد و وضع آنها در اجسام خارجی فعلیت بخشد. توضیح آنکه در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد، و دیگر مفاهیم ریاضی-تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی- بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج- یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به وسیله صنعت- به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد و مطابقت آنها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن نماید، زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند، که آن احوال مانع می‌شوند از این که مفاهیمی که در ریاضیات ثابت شده است، به آسانی و هرطور که هست، بر این اجسام منطبق گردد، بلکه نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آنچنان آماده کند که این صورتهای ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود بپذیرا شوند، و در برطرف ساختن عوایق و موانع رام دست باشد. علم حیل همان علمی است که راههای شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به وسیله صنعت مشخص می‌سازد، و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس، آشکار نمود.

اکنون به محاسبه می‌پردازیم:

$$\varphi(x) = x^x \cdot \text{Ln}^2 a - 1 = \text{Ln}^2 a^x - 1 = \text{Ln}^2 x - 1$$

چون $\text{Ln} x < -1$ ، بلافاصله نتیجه می‌شود: $\varphi(x) > 0$ ، به نحوی که $f'(x) < 0$ ، یعنی $\alpha < x < \beta$.

از این جا نتیجه می‌شود: $f(\alpha) > 0$ و $f(\beta) < 0$ و با توجه به اینکه (مونوتون) بودن تابع f ، سرانجام، روشن می‌شود که معادله (۲)، در هر یک از بازه‌های $(0, \alpha)$ و (α, β) و (β, ∞) دارای یک ریشه است و در بازه $(1, \infty)$ ریشه ندارد.

نتیجه بررسی: معادله $a^x = \log_a x$ ، در بازه $0 < a < e^{-e}$ سه ریشه دارد و در بازه $e^{-e} \leq a < 1$ دارای یک ریشه است.

تمرین ۷. ثابت کنید، به ازای مقدارهای مختلف a ، موقعیت نمودار تابعهای $y = \log_a x$ و $y = a^x$ ، نسبت به یکدیگر، به صورتی است که در شکلهای ۱۳، ۱۴ و ۱۵ نشان داده‌ایم، برای حالت‌های