

# شما هم می توانید در درس

## ریاضی خود موفق باشید (۱۴)

پرویز شهریاری



در حالت  $|x| = 1$  هم برقرار نیست.

دربارهٔ نادرست بودن نتیجه‌گیری فوریه، حتی می‌توان به این «استدلال عامیانه» متوسل شد که، چطور ممکن است از مجموع جبری عددهای درست، عددی کسری به‌دست آید؟ ولی اساس مطلب، از این جدی‌تر است. وقتی با تعدادی نامتناهی از عددها سروکار داریم که با عمل «جمع» یا «توان» و یا عمل دیگری به‌هم مربوط شده‌اند، تنها وقتی می‌توان دربارهٔ نتیجهٔ این عملها صحبت کرد که، به‌نحوی ثابت کرده‌باشیم چنین نتیجه‌ای وجود دارد. ولی رشتهٔ  $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

تن به چنین برآوردی نمی‌دهد و، بنابراین، به سمت عدد معینی میل نمی‌کند. چنین رشته‌هایی را «تباهند» یا «واگرا» می‌گویند. نمونهٔ دیگری از یک عبارت عددی که قابل محاسبه نیست و حد معینی ندارد عبارت عددی به‌صورت

$$A = \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \dots$$

است، زیرا اگر آن را برابر  $x$  فرض کنیم، به‌شرط وجود  $x$ ، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{2}x = x$$

ولی این معادله، دست‌کم دو جواب دارد:  $x = 2$  و  $x = 4$ ؛ و این، یک تناقض است، زیرا  $A$  نمی‌تواند هم برابر ۲ و هم برابر ۴ باشد. اکنون به مثالهایی از جبر دیفرانسیال می‌پردازیم.

مثال ۶. وضع خط راست  $3x + y + 1 = 0$  را نسبت به منحنی (c) پیدا کنید، به‌شرطی که منحنی (c) با معادلهٔ زیر داده شده باشد:

$$2x^2 - y^2 + xy + 2x + 5y - 4 = 0$$

ژوزف فوریه (۱۷۶۸ - ۱۸۳۰ میلادی)، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان فرانسه، در کتاب خود به نام «نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹)، مجموع رشتهٔ نامتناهی

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

را، برابر  $\frac{1}{2}$  دانسته است. او این‌طور استدلال می‌کرد:

$$S = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

چون داخل پرانتز، همان مقدار  $S$  است، بنابراین:

$$S = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

چند سال بعد برنارد بولتانو (۱۷۸۱ - ۱۸۴۸ میلادی)، ریاضی‌دان و فیلسوف چک، برای اثبات نادرستی نتیجه‌گیری فوریه، با استدلالی شبیه به استدلال فوریه، دو مقدار دیگر برای  $S$  پیدا کرد:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

برای نتیجه‌گیری فوریه، به نحو دیگری هم می‌توان «استدلال» کرد: اگر در تقسیم ۱ بر  $1 - x$ ، جمله‌های خارج قسمت را برحسب توان‌های صعودی  $x$  بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (1)$$

سمت راست برابری، به ازای  $x = -1$ ، برابر همان  $S$  و سمت چپ برابری برابر  $\frac{1}{2}$  می‌شود. گمان می‌کنم، حدس زده باشید که فوریه اشتباه کرده است. دربارهٔ برابری (۱)، باید گفت که، این برابری تنها وقتی درست است که داشته باشیم  $|x| < 1$  (مثلاً، روشن است که، برای  $x > 1$ ، سمت چپ برابری، عددی منفی می‌شود، در حالی که در سمت راست برابری، عددی مثبت به‌دست می‌آید). برابری (۱)،

که در نقطه  $(2, -1)$  یکدیگر را قطع می‌کنند. خط راست  $1 + y + 3x = 0$  هم از همین نقطه می‌گذرد و چون با هریک از خطهای راست  $(*)$  در نقطه  $(2, -1)$  برخورد دارد، بنابراین روشن است که چرا، در ابتدا، دوبار ریشه  $x = -1$  به دست آمد. موضوع کاملاً روشن شد. معادله  $(c)$  وجود ریشه مضاعف، به کمک هم، ما را فریب داده بودند.

مفهوم مماس بودن یک خط راست بر منحنی (یا دو منحنی بر هم) را، دقیقتر بررسی کنیم.

اگر ضمن حل دستگاه شامل دو معادله خط راست و منحنی (یا دو منحنی) به ریشه مضاعف رسیدیم، همیشه به معنای آن نیست که آنها برهم مماس‌اند. یک خط راست وقتی بر یک منحنی مماس است که مشتق تابع معرف منحنی در نقطه مشترک خود با خط راست، برابر با ضریب زاویه خط راست باشد. همچنین، دو منحنی وقتی در نقطه‌ای مثل  $A$  برهم مماس‌اند که در این نقطه مماس مشترک داشته باشند. به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۷. خط راست  $2 = y + 4x$ ، نسبت به منحنی  $(c)$  با معادله زیر چه وضعی دارد:

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 1$$

از حل معادله‌های خط راست و منحنی درجه سوم، با تبدیل‌های ساده‌ای، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^3 = 0$$

بسیار خوب! چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ خط راست و منحنی  $(c)$ ، در نقطه به طول ۱، مشترک‌اند. ولی آیا خط راست منحنی را قطع کرده یا بر آن مماس است؟

معیار مطمئن ما، محاسبه ضریب‌زاویه مماس بر منحنی  $(c)$  در نقطه به طول واحد است. داریم:

$$y' = 3x^2 - 6x - 1$$

که به ازای  $x = 1$ ، برابر  $-4$  می‌شود؛ و  $-4$  ضریب‌زاویه خط راست ماست: خط راست  $4x + y = 2$  نقطه  $(2, -2)$ ، بر منحنی  $(c)$  مماس است. البته، چون:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

نقطه  $x = 1$ ، تغییر علامت می‌دهد، به معنای آن است که خط راست مماس، در نقطه تماس از منحنی عبور می‌کند: نقطه  $(2, -2)$ ، نقطه عطف منحنی است و به همین دلیل، در این نقطه، منحنی  $(c)$  در دو طرف خط راست مماس واقع می‌شود (خط راست مماس بر منحنی

برای پی‌بردن به موقعیت یک خط راست، نسبت به یک منحنی، باید نقطه‌های مشترک آنها را (اگر وجود داشته باشند)، پیدا کنیم. برای این منظور، معادله خط راست و معادله منحنی را، مثل یک دستگاه دو معادله دوجمله‌ای حل می‌کنیم. از معادله خط راست به دست می‌آید:  $y = -3x - 1$ . این مقدار را، به جای  $y$ ، در معادله  $(c)$  قرار می‌دهیم؛ بعد از عملهای ساده، به این معادله درجه دوم (نسبت به  $x$ ) می‌رسیم:

$$0 = (x + 1)^2 - 10$$

که یک ریشه مضاعف (دو ریشه برابر) دارد. اگر این مقدار ریشه  $(x = -1)$  را در معادله خط راست، یا معادله منحنی  $(c)$  قرار دهیم، به جواب  $y = 2$  می‌رسیم (با قرار دادن  $x = -1$  در معادله منحنی  $(c)$ ، برای  $y$ ، ریشه مضاعف ۲ به دست می‌آید). تکلیف روشن شد: خط راست و منحنی  $(c)$  یک نقطه مشترک دارند و، در این نقطه، برهم مماس‌اند، زیرا از حل معادله‌های آنها با یکدیگر، به معادله‌ای با ریشه مضاعف رسیدیم. مسأله حل شد.

ولی اشتباه می‌کنیم؛ معادله‌ها ما را فریب داده‌اند... اندکی بیشتر دقت کنیم. معادله منحنی  $(c)$ ، به صورت منحنی داده شده است. با وجود این، می‌توانیم مشتق  $y$  را نسبت به  $x$  پیدا کنیم. اگر خط راست مفروض، بر منحنی  $(c)$  مماس باشد، باید مقدار  $y'$  به ازای مختصات نقطه تماس، یعنی به ازای  $x = -1$  و  $y = 2$ ، با ضریب‌زاویه خط مماس، یعنی  $-3$  برابر شود. مشتق  $y$  نسبت به  $x$  در معادله منحنی  $(c)$  چنین می‌شود:

$$y' = \frac{4x + y + 2}{2y - x - 5}$$

ولی این کسر، به ازای  $x = -1$  و  $y = 2$ ، به صورت  $\frac{0}{0}$  درمی‌آید و معلوم نیست، چگونه باید از آن رفع ابهام کرد. خود این مطلب، ما را، درباره درستی جواب، به تردید می‌اندازد.

معادله  $(c)$  را به صورت «صریح» درمی‌آوریم (یعنی  $y$  را برحسب  $x$  محاسبه می‌کنیم). اگر معادله  $(c)$  را برحسب توانهای نزولی  $y$  منظم کنیم، به این معادله درجه دوم، نسبت به  $y$ ، می‌رسیم:

$$y^2 - (x + 5)y - (2x^2 + 2x - 4) = 0$$

که از آن‌جا، بسادگی به دست می‌آید:

$$y = \frac{x + 5 \pm (3x + 3)}{2}$$

معلوم می‌شود،  $(c)$  یک منحنی نیست، بلکه دو خط راست است:

$$y = 2x + 4 \quad \text{و} \quad y = -x + 1 \quad (*)$$

به صورت

$$y = mx + m$$

درمی آید. برای به دست آوردن معادله‌ای که، ریشه‌های آن، نقطه‌های برخورد این خط راست با نمودار تابع باشد، باید معادله‌های آنها را، در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار دهیم و با هم حل کنیم. با حذف  $y$  در این دستگاه، به معادله درجه دوم

$$m^2x^2 + (2m^2 - 2m - 1)x + (m^2 - 2m) = 0 \quad (1)$$

می‌رسیم، یعنی در حالت کلی، خط راستی که از نقطه  $A$  می‌گذرد، نمودار ما را در دو نقطه قطع می‌کند و این، به شرطی است که معادله اخیر، دو ریشه حقیقی داشته باشد. اگر این معادله، ریشه‌های موهومی داشته باشد، خط راست، نمودار را قطع نمی‌کند. در ضمن در حالت حقیقی بودن ریشه‌های این معادله درجه دوم، ریشه‌ای از آن قابل قبول است که، به ازای آن، مقدار  $x + 1$  مثبت باشد، در غیر این صورت، تابع  $y = 1 - \sqrt{x+1}$  موهومی می‌شود. ولی ما می‌خواهیم خط راست بر منحنی مماس باشد، پس باید معادله (۱)، ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

اگر این نتیجه را بپذیریم، باید بگوییم: از نقطه  $A(-1, 0)$  تنها یک مماس بر نمودار تابع مفروض می‌توان رسم کرد. معادله این مماس به صورت:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x + 4y + 1 = 0$$

و مختصات نقطه تماس  $(-1, 3)$  است.

در این جا هم فریب خورده‌ایم. اگر سؤال را به کمک مشتق حل می‌کردیم، دو نقطه تماس و دو خط راست مماس به دست می‌آمد. اگر طول نقطه تماس را  $\alpha$  بگیریم، عرض آن برابر  $(1 - \sqrt{\alpha+1})$  می‌شود. ضریب زاویه مماس، برابر است با مشتق تابع، به ازای طول نقطه تماس، یعنی  $\frac{-1}{2\sqrt{\alpha+1}}$ . اگر دیگر خط راست مماس، از دو نقطه

$$A(-1, 0), \quad T(\alpha, 1 - \sqrt{\alpha+1})$$

می‌گذرد. پس ضریب زاویه مماس برابر است با  $\frac{1 - \sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}$

این دو مقداری که برای ضریب زاویه مماس به دست آمده است، با هم برابر قرار می‌دهیم:

در نقطه عطف آن، در نقطه تماس، از منحنی عبور می‌کند).

به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۸. سهمی  $y = -x^2 - 2$ ، نسبت به دایره  $x^2 + y^2 = 4$  چه وضعی دارد؟

اگر بین معادله‌های سهمی و دایره،  $x$  را حذف کنیم، به معادله درجه دوم

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad (**)$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: ۳ و -۲. نقطه به عرض ۳، در بیرون دایره است و، بنابراین، نمی‌تواند نقطه برخوردی از دایره و سهمی را مشخص کند.  $y = -2$ ، منجر به  $x = 0$  می‌شود.  $y = -2$ ، ریشه ساده معادله  $(**)$  بود (نه ریشه مضاعف). آیا باید نتیجه گرفت، سهمی و دایره، در نقطه  $(0, -2)$ ، یکدیگر را قطع کرده‌اند؟ ولی، این نتیجه گیری، با تصویری که از سهمی و دایره داریم، سازگار نیست: دایره و سهمی، اگر برهم مماس نباشند، یا در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، یا در دو نقطه؛ و یا نقطه برخوردی ندارند.

ضریب زاویه مماس بر سهمی و بر دایره را در نقطه  $(0, -2)$  محاسبه می‌کنیم. برای دایره داریم:  $y' = -\frac{x}{y}$  که در نقطه  $(0, -2)$  برابر صفر می‌شود. همین طور، برای سهمی  $y' = -2x = 0$  که باز هم در نقطه به طول صفر، برابر صفر است. سهمی و دایره، در این نقطه مماس مشترک دارند، یعنی برهم مماس‌اند.

می‌بینید، گاهی رسیدن به ریشه ساده (و نه مضاعف)؛ به معنای مماس بودن دو نمودار بر یکدیگر است. ولی، در این جا، به نکته دیگری اشاره کنیم. گفتیم سهمی و دایره، در حالت کلی، در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین، برای رسیدن به این چهار نقطه (حقیقی یا موهومی)، باید خودمان را به یک معادله درجه چهارم برسانیم؛ و این، وقتی حاصل می‌شود که بین معادله‌های سهمی و دایره،  $x$  را (نه  $x$  را) حذف کنیم. در این صورت، به معادله درجه چهارم  $x^4 + 6x^2 = x^2(x^2 + 6) = 0$

می‌رسیم که ریشه مضاعف  $x = 0$  را دارد و دو ریشه دیگر آن، عددهای موهومی‌اند. چون  $x = 0$ ، ریشه مضاعف این معادله درجه چهارم است، بنابراین سهمی و دایره، در نقطه به طول صفر برهم مماس‌اند و نقطه  $(0, -2)$ ، نقطه تماس آنهاست.

مثال ۹. از نقطه  $A(-1, 0)$ ، مماسهایی بر نمودار تابع

$$y = 1 - \sqrt{x+1}$$

اگر ضریب زاویه مماس را  $m$  بگیریم، معادله خط راست مماس،

کوچکهای هم درجه اند، ولی با هم برابر نیستند. اگر بسط  $\sin x$  را بر حسب توانهای  $x$  بدانیم:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

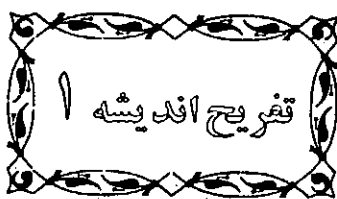
معلوم می شود که، وقتی  $x$  بی نهایت کوچک باشد،  $x^3$  و  $x^5$  و ... نسبت به  $x$  قابل صرف نظر کردن هستند و  $\sin x$  با  $x$  برابر می شود. ولی ما با  $\sin x - x$  سروکار داریم و

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 - \dots$$

و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{5040}x^4 - \dots \right) = \frac{1}{6}$$

گمان می کنیم همین ۱۰ مثال، شما را به درستی این مطلب قانع کرده باشد که: معادله، یک مدل ریاضی است و نمی توان از آن، «چشم بسته» به جای استدلال استفاده کرد. در مقاله بعد، مطلب را درباره شکلهای هندسی دنبال می کنیم.



مجموع سه عدد ۱، ۲، و ۳ مساوی حاصل ضربشان است. آیا سه تاییهای دیگری از این گونه در میان اعداد صحیح موجودند؟

$$1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$$

جواب در صفحه ۸۸

$$\frac{1 - \sqrt{\alpha + 1}}{\alpha + 1} = \frac{-1}{2\sqrt{\alpha + 1}}$$

این معادله دو جواب دارد:  $\alpha = 3$  و  $\alpha = -1$ . از نقطه  $A$ ، دو مماس بر نمودار تابع می توان رسم کرد.

نقطه های تماس  $T_1(3, -1)$  و  $T_2(-1, 1)$  و معادله های خطهای مماس چنین است:

$$x + 4y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x = -1$$

چرا با روش اول، جواب به دست نیامد؟ معادله یکی از مماسها به صورت  $x = -1$  درآمده، یعنی خط راستی است موازی با محور عرض. این مماس، با محور طول، زاویه ای برابر  $90^\circ$  درجه می سازد و، بنابراین، ضریب زاویه ای برابر بی نهایت دارد. از طرف دیگر، هر وقت یکی از ریشه های یک معادله چند جمله ای به سمت بی نهایت میل کند، ضریب بزرگترین درجه آن، به سمت صفر میل می کند. به همین مناسبت، برای به دست آوردن  $m$  (ضریب زاویه)، با صفر شدن ضریب درجه دوم، به معادله ای درجه اول رسیدیم و یکی از جوابها، از دست رفت.

مثال ۱۰. مطلوب است  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

به ترتیب می نویسیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

چون حد  $\frac{\sin x}{x}$ ، وقتی  $x$  به سمت صفر میل کند، برابر است با واحد، بنابراین: حد عبارت  $\left( \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{x^2}$  با حد  $\frac{1}{x^2}$  برابر است. ولی فریب خورده ایم. اگر برای رفع ابهام، از قاعده هوییتال استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

حد عبارت، برابر  $\frac{1}{6}$  است نه صفر. در واقع، وقتی  $x$  به سمت صفر میل کند،  $x$  و  $\sin x$ ، بی نهایت