

شما هم می توانید در درس

ریاضی خود موفق باشید (۱۲)

پرویز شهریاری



□ ریاضیات و دانشهای دیگر

تا این جا، با برخی نکته های آموزشی - که به کار شما در زمینه ریاضیات مربوط می شد - آشنا شدید. اکنون زمان آن رسیده است، به این پرسش پاسخ بدهیم: مسأله های ریاضی را چگونه حل کنیم؟ با وجود این، پیش از پرداختن به این پرسش، باید به جنبه دیگری از زندگی - که بویژه در روزگار ما اهمیت بسیار دارد - اشاره کنیم: تخصص در شاخه ای از دانش، و از آن جمله ریاضیات، نباید به معنای دوری از هنر و دانشهای دیگر باشد.

ابتداءً این مقاله کوتاه، آموزنده و پرنظر را - که از شماره سوم سال ۱۹۹۱ میلادی ماهنامه «کوانت» چاپ مسکو برداشته ایم - بخوانید تا بعد، بحث خود را ادامه دهیم. عنوان مقاله، این است: آیا می توان $(1 + 2^{16})$ ضلعی منتظم را رسم کرد؟ و اما، خود مقاله:

بلافاصله، بعد از آنکه سردیر «کوانت»، این پرسش را مطرح کرد، بحث و جدل آغاز شد:

ریاضی دان و منطق شناس، بله می توان! چون $1 + 2^{16}$ ، یکی از عددهای اول فرما^۱ است و همان طور که گوس^۲ ثابت کرد، می توان این چند ضلعی منتظم را رسم کرد.

ریاضی دان و تاریخ شناس، این چند ضلعی منتظم به وسیله پروفیسور هرمس رسم شده است. دو برابر کردن تعداد ضلعها هم، کار دشواری نیست. شرح آن، یک چمدان بزرگ را پر کرده است و این چمدان، در دانشگاه گوتینگن نگهداری می شود. هرکس مایل باشد، می تواند آن را مطالعه کند.

ریاضی دان و ویراستار، ولی تا امروز، کسی تفسیری بر آن ننوشت

است! بنابراین معلوم نیست، متن آن، قابل اعتماد است یا نه!

ریاضی دان و روش شناس، در امکان رسم این چند ضلعی، هیچ تردیدی نیست! ولی پرسش در جای دیگری است: چگونه می توان آن را رسم کرد؟ بفرمایید، در اختیار شماست (صفحه کاغذ، مداد، خط کش و پرگار را روی میز گذاشت).

ریاضی دان فیلسوف، نمی فهمم، گیر کار در کجاست؟ ثابت شده است، روش رسم وجود دارد. می دانیم اثبات درست و روش کار عملی است. بنابراین، می توان رسم کرد!

ریاضی دان اقتصادشناس، می توان یا نمی توان! باید محاسبه کرد (ماشین حساب خود را بیرون آورد). اگر برای رسم هر ضلع، یک ثانیه وقت لازم باشد و کار در سه نوبت (یعنی ۲۴ ساعته) انجام شود، آن وقت ... اوه اوه ... ۱۳۶ سال طول می کشد. نه، نمی شود!

ریاضی دان و ویژه کار سیبرنتیک، پس کامپیوتر برای چیست؟ برنامه ای تنظیم می کنیم ... در یک ساعت و کسری، کار انجام می شود.

نظریه پرداز فیزیک، اجازه بدهید، من هم امتحان کنم (مداد را در دست خود چرخاند و نوک آن را نشان داد). اگر اتم کربن ... در یک لایه ... قطر دایره محیطی ۳۰ سانتی متر ... فاصله بین سوراخها، در شبکه بلوری مغز مداد $1/4$ آنگستروم^۳ ... بنابراین، محیط دایره $10^9 \times 9/4$ آنگستروم ... بله، می توان اتمهای کربن را در دایره قرار داد ... تنها باید فاصله ها برابر باشند ... در ضمن عرض کنم ... نوسانها ...

آزمایشگر فیزیک، (حرف همکار خود را قطع کرد). این محاسبه ها برای چیست؟ (پرگاری برداشت و یک دایره رسم کرد). بفرمایید! هر

و هنری خود علاقه‌مند باشد و هم در جست و جوی راه یا راههای نجات انسانها از زشتیهای موجود.

اگر ریاضی‌دان، این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسانها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسأله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد و ...، آن وقت، به یک انسان «تک بُعدی» تبدیل می‌شود که در این صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد. ریاضی‌دان، همان طور که برای زنده ماندن، به غذا و لباس و مسکن نیاز دارد، برای زندگی در جامعه بومی خود و یا، به طور کلی، در جامعه انسانی، به غذای روح و به تقویت اندیشه و عاطفه خود نیازمند است که با عشق ورزیدن به هنر و علاقه‌مند بودن به مطالعه تاریخ گذشته و حال جامعه‌های بشری و تلاش در جهت بهتر کردن زندگی انسانها، می‌تواند تأمین شود.

یک ریاضی‌دان، باید با عمل خود و با رفتار فردی و اجتماعی خود، این تصور نادرست را از ذهن همگان دور کند که «ریاضی‌دان تنها با عدد و شکل سروکار دارد و به درد هیچ کار و هیچ بحث دیگری نمی‌خورد».

درباره رابطه ریاضیات با هنر، بستگی جدی و عمیق درک ریاضی با درک فلسفی، درباره اهمیت آگاهی از تاریخ ریاضیات (و اینکه، در تحلیل آخر، تاریخ ریاضیات، به گونه‌ای، خود ریاضیات است)، درباره ریاضیات کاربردی و دوره‌های متاوب تاریخ تکامل ریاضیات، که گاه با سمت‌گیری نظری و گاه با سمت‌گیری کاربردی، ظاهر شده است و ...، به موقع خود صحبت خواهد شد، ولی در این جا، تنها به نمونه مشخصی در زمینه تاریخ ریاضیات اشاره می‌کنیم و برای بحث منطقی‌تر و پیوسته‌تر درباره آن، منتظر فرصت مناسب می‌مانیم.

□

اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹ - ۱۸۵۷ میلادی)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی و عضو فرهنگستان علوم پاریس (از ۱۸۱۶ میلادی)

برای نخستین بار، این قضیه را در حالت کلی خود ثابت کرد:

میانگین حسابی n عدد مثبت، از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست؛ یعنی اگر n عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر بگیریم، همیشه داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

کس مایل است، برای من ثابت کند، این یک 4295032832 ضلعی منتظم نیست؟

□

نخستین و مهمترین نکته‌ای که، بعد از خواندن این گفت‌و شنود بر طرز، ولی بر پایه واقعیت، به ذهن می‌رسد، این است که: ریاضیات، دانشی خصوصی و ویژه ریاضی‌دانان نیست و هر کسی که با دانش، به مفهوم عام آن سروکار دارد، باید با ریاضیات آشنا باشد و، همین طور برعکس، یک ریاضی‌دان نمی‌تواند سر در لاک خود فرو برد و بدون اینکه از دانشهای دیگر بهره‌ای داشته باشد، خود را با فرمولها و شکلهای سرگرم کند. بویژه ریاضی‌دان نمی‌تواند به دور از واقعیت و تنها با دستگیره قانونهایی که در ریاضیات کشف کرده است، حکم کند و نتیجه‌گیریهای خود را عملی و واقعی پندارد.

ریاضیات دانشی زنده است و مثل هر موجود زنده، تنها در بستگی محیط دور و بر خود و در رابطه با واقعیتهای زندگی، می‌تواند رشد کند و یا حتی معنا داشته باشد. همه قانونهای ریاضی، مستقیم و یا غیر مستقیم، ریشه در قانونمندیهای طبیعت دارند و با جدا شدن از ریشه خود، نمی‌توانند به زندگی خود ادامه دهند. ولی از آنجاکه ریاضیات به صورتی انتزاعی و به ظاهر جدا از طبیعت و زندگی مطرح می‌شود، در هر مورد خاص، باید با معیار واقعیتهای بیرون از ریاضیات و بر پایه تجربه و نوع کاربرد، مورد ارزیابی قرار گیرد و روش تطبیق آن با عمل و شیوه کاربرد آن معین شود.

ریاضیات، از یک طرف به تاریخ خود وابسته است و از طرف دیگر با زندگی ما در آمیخته است و به همین دلیل، ریاضی‌دان نمی‌تواند خود را از تاریخ ریاضیات و از جنبه‌های کاربردی ریاضیات و (به اعتباری مهمتر از هر دوی اینها) از فلسفه ریاضیات دور نگه دارد. بجای آنها ریاضی‌دان، پیش از آنکه ریاضی‌دان باشد، یک انسان است و بویژه در روزگار ما، انسان «تک بُعدی» فرصت ابراز وجود نمی‌یابد و نمی‌تواند خود را با پیشرفتهای مادی و معنوی زمان، سازگار و هماهنگ کند.

درست است که ریاضی‌دان، به دلیل تخصصی که انتخاب کرده است، کار فکری خود را بیشتر در مسیر پیشرفت ریاضیات متمرکز می‌کند، ولی یک ریاضی‌دان هم، به عنوان انسانی که در عصر ما زندگی می‌کند، باید با دانشهای دیگر و با مسأله‌های عمده علمی و اجتماعی زمان خود آشنا باشد، از هنر لذت ببرد و در زندگی خانوادگی و اجتماعی خود، مثل هر انسان دیگری، هم به رشد فکری

همچنین، ریاضی دانان ایرانی، که تحت تأثیر کارهای ریاضی دانان یونانی، برای حل معادله‌ها به روشهای هندسی توجه داشتند؛ به این روشها قانع نشدند و بتدریج توانستند عنصرهای خالص جبری و محاسبه‌ای را وارد کار خود کنند. خوارزمی معادله‌های درجه دوم و خیام معادله‌های درجه سوم را، گاه با روش هندسی و گاه با روش محاسبه‌ای، حل می‌کردند و در میان همین تلاشها بود که دانش جبر تولد یافت و به جایی رسید که جمشید کاشانی، توانست معادله درجه سوم $4x^3 - 3x = a$ را (به قصد پیدا کردن سینوس یک درجه، با معلوم بودن سینوس سه درجه) حل کند.

□

به نابرابری «کوشی» برگردیم. در این جا ابتدا، یکی از روشهای اثبات نابرابری را (که به نظر من زیباترین و در عین حال، ساده‌ترین آنهاست) می‌آوریم و سپس، به نمونه‌ای از کاربرد نابرابری «کوشی» اشاره می‌کنیم.

در آغاز، باید فکری برای ریشه n ام کرد که در سمت راست نابرابری قرار دارد. چرا که وجود ریشه n ام، مزاحم به نظر می‌رسد و ذهن را آشفته می‌کند. دو طرف نابرابری را، به این ریشه n ام (که مقداری مثبت است) تقسیم می‌کنیم. سمت راست برابر ۱ می‌شود و مقدار سمت چپ نابرابری را، می‌توان میانگین حسابی این عددها دانست:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

به این ترتیب، قضیه نابرابری کوشی، تغییر شکل می‌دهد و به صورت قضیه زیر درمی‌آید:

اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ عددهای مثبت و حاصل ضربی برابر واحد داشته باشند، ثابت کنید:

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq 1 \quad (*)$$

و این قضیه را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد.

به ازای $n = 1$ ، نابرابری (*) روشن است و به برابری تبدیل می‌شود. به ازای $n = 2$ ، باید ثابت کنیم، به شرط مثبت بودن y_1 و y_2 و $y_1 y_2 = 1$ داریم: $\frac{y_1 + y_2}{2} \geq 1$. این نابرابری، با

توجه به شرط $y_1 y_2 = 1$ ، به نابرابری $y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$ و یا

و تنها در حالت برابری همه عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، این نابرابری، به برابری تبدیل می‌شود. [میانگین حسابی n عدد، یعنی $\frac{1}{n}$ مجموع آنها و میانگین هندسی n عدد، یعنی ریشه n ام حاصل ضرب آنها.] کوشی این نابرابری مهم و مشهور را، همراه با اثبات آن، در سال ۱۸۲۱ منتشر کرد. این نابرابری، که به سرعت کاربردهای زیادی پیدا کرد، از همان آغاز طرح خود، به عنوان یکی از دشوارترین نابرابریهای عددی (دشوار از نظر اثبات و نه از جهت مفهوم و مضمون آن) شناخته شد. اثباتی که خود کوشی برای آن آورده بود، هم پیچیده بود و هم مفصل؛ عملهای این اثبات، چند صفحه کامل را پر می‌کند. ولی ریاضی دانان بعد از «کوشی»، از پای ننشستند و در طول بیش از ۱۷۰ سالی که از طرح و اثبات نابرابری می‌گذرد دهها راه دیگر برای اثبات درستی آن پیدا کردند که، اغلب از روش اثبات کوشی ساده‌ترند (برای آگاهی از برخی اثباتهای نابرابری «کوشی» می‌توانید به کتاب «نابرابریها» نوشته پرویز شهریاری مراجعه کنید).

در این جا، این پرسش پیش می‌آید: اگر کوشی توانست درستی نابرابری میانگینها را ثابت کند و اگر برای استفاده از این نابرابری نیازی به اطلاع از روش اثبات آن نیست، چرا ریاضی دانان، به صورتی پی‌گیر، درصدد اثبات آن، با روشهای دیگری برآمده‌اند؟

در واقع در این گونه موردها هدف اصلی، نه خود قضیه، بلکه جست و جوی روشهای تازه‌ای در ریاضیات است. اغلب روشهای استدلال و اثباتهای منطقی (و به عنوان نمونه، روش استقرای ریاضی) از همین راه (والته، نه یکباره، بلکه گام به گام، در طول زمان و با کوشش عده زیادی از ریاضی دانان) پدید آمده‌اند.

بطلمیوس، اخترشناس یونانی و ریاضی دانان و اخترشناسان بعد از او (و از جمله خوارزمی)، برای تنظیم زیجها (جدولهای اخترشناسی) و محاسبه‌های آنها، از قضیه‌های کم و بیش دشوار هندسی (مثل قضیه بطلمیوس، قضیه مندلاگوس و قضیه یسوا) استفاده می‌کردند که با پیچیدگیهای زیادی همراه بود. ولی ریاضی دانان ایرانی، به این روشها قانع نشدند و روشهای تازه‌تر و ساده‌تری را برای محاسبه‌های طولانی و ملال آور و بغرنجی که در اخترشناسی لازم داشتند، جست‌وجو می‌کردند. این تلاشها، که بخش عمده آن، به وسیله «ابوریحان بیرونی» و «ابوالوفای بوزجانی» انجام گرفت، منجر به پیدایش روشهای مثلثاتی و رابطه‌های آنها شد و سرانجام با ساختمانی که «نصیرالدین طوسی»، براساس یافته‌های ریاضی دانان ایرانی پیش از خود بنا کرد، مثلثات به عنوان شاخه مستقلی از ریاضیات به وجود آمد.

نمی‌شوید و اگر راه حلی طولانی، دشوار و ملال‌آور برای آن پیدا می‌کنید، خودتان را سرزنش نکنید. تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد، حتی بزرگترین ریاضی‌دانان هم، مثل شما، گاهی با ناکامی روبه‌رو می‌شده‌اند، گاهی اشتباه می‌کرده‌اند و اگر هم به موفقیتی می‌رسیده‌اند، اغلب از کوتاهترین و زیباترین مسیر نبوده است.

□

به کمک نابرابری «کوشی»، قضیه زیر که یکی از مهمترین قضیه‌ها در جبر است، ثابت می‌شود:

اگر چند متغیر مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این متغیرها با هم برابر باشند.

n عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ را به مجموع ثابت m در نظر می‌گیریم. بنابر نابرابری «کوشی» داریم:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{m}{n}$$

اگر دو طرف این نابرابری را به توان n برسانیم، به دست می‌آید:

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

یعنی، حاصل ضرب $a_1 a_2 \dots a_n$ همیشه از $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ کوچکتر است، مگر در حالت

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{m}{n}$$

که در آن صورت، حاصل ضرب مفروض با $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ برابر می‌شود.

شبه این قضیه درباره حداقل مجموع وجود دارد:

اگر چند متغیر مثبت، حاصل ضرب ثابتی داشته باشند، مجموع آنها وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که این متغیرها، با هم برابر باشند.

[اثبات را خودتان پیدا کنید.]

تا بعد



$(y_1 - 1)^2 \geq 0$ تبدیل می‌شود که درستی آن روشن است (این نابرابری، به ازای $y_1 = 1$ ، یعنی $y_1 = y_2 = 1$ ، به برابری تبدیل می‌شود).

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری (*)، برابر n عدد برقرار باشد و ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n + 1$ عدد هم برقرار است. این برابریها را در نظر می‌گیریم:

$$z_1 = y_1, z_2 = y_2, \dots, z_{n-1} = y_{n-1}, z_n = y_n y_{n+1}$$

برای عددهای $z_1, z_2, \dots, z_n$ ، این شرط برقرارند:

$$z_1 > 0, z_2 > 0, \dots, z_n > 0$$

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = 1$$

بنابراین، طبق فرض استقرا داریم:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \geq n$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n y_{n+1} \geq n \quad (**)$$

یعنی: می‌توان عددهای $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$y_n > 1, y_{n+1} < 1$$

(روشن است، اگر همه عددهای y_i برابر ۱ نباشند، چنین دو عددی در بین آنها پیدا می‌شود.)

ثابت می‌کنیم، با این فرض، داریم:

$$y_n + y_{n+1} \geq y_n y_{n+1} + 1$$

اگر در این نابرابری، همه جمله‌ها را به سمت چپ منتقل و سپس، به ضرب تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$(1 - y_n)(y_{n+1} - 1) \geq 0$$

که درستی آن روشن است، زیرا فرض کردیم $y_n < 1$ و $y_{n+1} > 1$ با توجه به نتیجه اخیر، نابرابری (**)، چنین می‌شود:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} \geq n + 1$$

اثبات کامل و درستی نابرابری «کوشی» ثابت شد.

«کوشی» ریاضی‌دانی بزرگ و درجه اول بود، با وجود این نتوانست راه حل ساده‌ای برای نابرابری میانگینها پیدا کند. و این، یکی از درسهای تاریخ است. اگر شما، برای نخستین بار، با مسئله‌ای روبه‌رو می‌شوید. نباید انتظار داشته باشید، بلافاصله حل آن را - آن هم به صورتی ساده - پیدا کنید. از اینکه موفق به حل مسئله‌ای