

# شما هم می‌توانید در درس

## ریاضی خود موفق باشید (۱۱)

پرویز شهریاری



$$\Delta = (x^2 + 3)^2 - 4(x^2 + x + 2) \\ = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2$$

یعنی برای  $a$ ، دو جواب گویا به دست می‌آید:

$$a = x + 1, a = x^2 - x + 2$$

به این ترتیب  $x_1 = a - 1$  و برای دو جواب دیگر، باید این معادله درجه دوم را حل کنیم:

$$x^2 - x + 2 - a = 0;$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-5}}{2}$$

تکلیف ریشه‌های معادله درجه سوم (\*) معلوم شد. این معادله درجه سوم به ازای  $a < \frac{5}{4}$ ، تنها یک ریشه حقیقی دارد:  $x = a - 1$ . به ازای  $a = \frac{5}{4}$ ، یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف دارد:  $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ ،  $x_1 = -\frac{11}{4}$  و به ازای  $a > \frac{5}{4}$ ، سه ریشه حقیقی متمایز دارد:

$$x_1 = a - 1, x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{5}{4}}, x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{5}{4}}$$

مثال ۲: در پایان بخش مربوط به بخش‌پذیر بودن  $a^n - b^n$  بر  $a - b$  و  $a^n + b^n$  بر  $a + b$  (به شرط فرد بودن  $n$ )، این تمرین داده شده است:

چند جمله‌ای زیر را، به تفاضل مجذورهای دو چند جمله‌ای تبدیل کنید:

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 1$$

بی‌تردید به فکر می‌افتید؛ این تمرین، به چه مناسبت در این فصل داده شده است؟ ... چرا همه توانها زوج است؟ ... خوب، با فرض  $x^2 = y$ ، به عبارت ساده‌تری می‌رسیم:

درباره روش انجام تکلیفها صحبت می‌کردیم. اهمیت موضوع، آن قدر زیاد است که نمی‌توان بسادگی آن را کنار گذاشت.

دو نوع مسأله وجود دارد: (۱) تمرینهای ساده و یکنواختی که برای به‌خاطر سپردن دستورها و تسلط بر قضیه‌ها، به‌طور معمول، در پایان هر فصل کتاب درسی آمده است و، راه حل آنها، کم و بیش از قبل معلوم است و (۲) مسأله‌هایی که برای حل آنها، باید دستورها و قضیه‌های لازم را خودمان و با توجه به داده‌های مسأله، کشف کنیم.

مسأله‌های نوع اول، مسأله‌هایی «بی مضمون» هستند و به تفسیر و توضیحی نیاز ندارند. هرجا، در این رشته مقاله‌ها، از مسأله نام می‌بریم منظورمان مسأله‌های نوع دوم، یعنی مسأله‌های «با مضمون» است.

البته، در نوع اول، یعنی در تمرینهای پایان هر بخش کتاب درسی هم، ممکن است مسأله‌هایی گذاشته شده باشد که «اندک مضمونی» داشته باشند. سه مثال از این نوع می‌آوریم:

مثال ۱: در پایان بخش مربوط به معادله درجه دوم، برای تمرین در استفاده از دستور کلی حل معادله درجه دوم، این معادله، برای حل، داده شده است:

$$x^3 - ax^2 + x + a^2 - 3a + 2 = 0. \quad (*)$$

که معادله‌ای درجه سوم است. ولی، چون در فصل مربوط به معادله درجه دوم آمده است، باید ارتباطی با آن داشته باشد ... چه رابطه‌ای؟ ... بله! این معادله، نسبت به پارامتر  $a$ ، از درجه دوم است. آن را نسبت به  $a$  منظم می‌کنیم:

$$a^2 - (x^2 + 3)a + x^3 + x + 2 = 0.$$

بنابراین، می‌توان  $a$  را برحسب  $x$  به دست آورد؛ و اگر ریشه‌ها (نسبت به مجهول  $a$ ) عبارتهایی گویا باشند؛ این راه حل، ما را به نتیجه می‌رساند. همین معادله چنین است:

یعنی؛ مثلثها، در یک زاویه مشترکند و ضلعهایی از دو مثلث که مجاور این زاویه‌اند، طولهایی متناسب دارند، پس مثلثها متشابه‌اند. بنابراین، زاویه‌های نظیر در دو مثلث، با هم برابرند:

$$\hat{ECD} = \hat{EBC} = \alpha$$

اکنون، اگر به مثلث CEB توجه کنیم، روشن می‌شود:

$$\alpha + \beta = \hat{AEC} = 45^\circ$$

ولی حتی در این گونه مسئله‌ها، که «بی مضمون» هم نیستند، همان‌طور که دیدید، خود درس می‌تواند راهنمایی برای یافتن راه حل باشد. مسئله‌های واقعی «مضمون دارد»، آنهایی هستند که هیچ‌گونه دستور یا قضیه راهنما، چه مستقیم و چه غیر مستقیم، به همراه نداشته باشند. قبول کنید که اغلب مسئله‌های زندگی هم، چنین‌اند.



دو راه برای پی بردن به حل مسئله وجود دارد: راه اول این است که کتاب حل مسئله‌ها را باز کنیم و راه حل آن را ببینیم، یا منتظر جلسه بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش‌آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسئله» را به ما بدهد (و دریغ، که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیر فعال» با مسئله است، شیوه‌ای که هرگز ما را برای حل مسئله‌های تازه (چه در ریاضیات و چه در زندگی) آماده نمی‌کند، استفاده از کتابهای حل مسئله یا رونویس کردن آنچه بر تخته سیاه نوشته می‌شود، نقش دو «چوب دستی» را به عهده دارند که بخواهیم تنها به یاری آنها راه برویم و، طبیعی است، اگر به زیر بغل گرفتن «چوب دستیها» عادت کرده باشیم، بتدریج راه رفتن عادی را فراموش می‌کنیم و، بدون «چوب دستیها» به زمین می‌خوریم.

روش دوم، «برخورد فعال» با مسئله است. در آینده، درباره برخورد فعال با مسئله‌های ریاضی، با تفصیل بیشتری صحبت خواهیم کرد و در این جا، تنها به جنبه‌ای از آن - که برای همه، اهمیتی جدی دارد - اشاره می‌کنیم.

اندیشه یا تفکر، و بویژه اندیشه علمی، تنها با آگاهیهای پراکنده‌ای که از این جا و آن جا به دست می‌آوریم، پدید نمی‌آید. اگر ذهن آدمی، فعالیت نداشته باشد و اگر، با تکیه بر آنچه در اختیار دارد و آنچه پیشتر یاد گرفته است، تلاش برای پیدا کردن بستگیهای

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

و این، خارج قسمت  $y^5 - 1$  بر  $y - 1$  است. و دیگر، به خودی خود، حل مسئله دنبال می‌شود:

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = \frac{y^5 - 1}{y - 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x^5 - 1)(x^5 + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^5 - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^5 + 1}{x + 1}$$

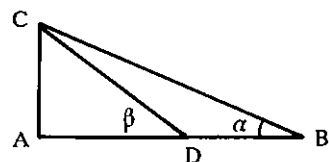
$$= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$= (x^4 + x^2 + 1)^2 - (x^3 + x)^2$$

مثال ۳: در پایان بخش مربوط به تشابه مثلثها، این تمرین داده شده است:

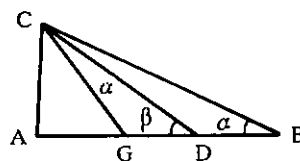
در مثلث قائم الزاویه ABC، می‌دانیم طول ضلع AB، سه برابر طول ضلع AC و طول پاره خط راست DB، یک سوم طول ضلع AB است (شکل را ببینید). ثابت کنید، مجموع دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  برابر  $45^\circ$  درجه است.

شکل ۱



کلید حل مسئله این است که از نقطه C به وسط پاره خط راست AD وصل کنیم و ثابت کنیم، دو مثلث CED و BCE متشابه‌اند.

شکل ۲



این دو مثلث، در زاویه E (CEB) مشترکند؛ در ضمن داریم (طول ضلع AC را واحد گرفته‌ایم):

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2};$$

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

باز هم نشد. اگر این مجموع به صورت:

$$1 + 11 + 101 + 1001 + \dots + \underbrace{100\dots01}_{\text{رقم } n}$$

بود، می شد واحدها را جدا کرد، آن وقت بقیه به صورت مجموعی از توانهای متوالی ۱۰، یعنی به صورت مجموعی از جمله های یک تصاعد هندسی، درمی آمد و سؤال حل می شد ... عجب! فهمیدم! در این جا، ساده ترین حالت، نمی تواند به ما کمک کند. ولی مجموع زیر، ساده تر ما را به هدف می رساند:

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{\text{رقم } n}$$

زیرا:

$$\underbrace{99\dots9}_{\text{رقم } n} = 10^n - 1$$

به این ترتیب، برای مجموع مورد نظر داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{q} \left( \underbrace{99\dots9}_{\text{رقم } k} + \underbrace{99\dots9}_{\text{رقم } (k+1)} + \dots + \underbrace{99\dots9}_{\text{رقم } (k+n-1)} \right) = \\ &= \frac{a}{q} (10^k - 1 + 10^{k+1} - 1 + \dots + 10^{k+n-1} - 1) = \\ &= \frac{a}{q} (10^k + 10^{k+1} + \dots + 10^{k+n-1} - n) = \\ &= \frac{a}{q} \left( \frac{10^{k+n} - 10^k}{9} - n \right) \\ &= \frac{a}{9} (10^{k+n} - 10^k - 9n) \end{aligned}$$

به این ترتیب، برای حل سؤال، ابتدا مجموع مجهول را به صورت

مجموع A نوشتیم، سپس به حالت خاص پرداختیم و در حالت خاص  $a = 9$  و  $k = 1$ ، کلید حل سؤال را به دست آوردیم؛ بعد این راه حل را تعمیم دادیم و، با استفاده از قانون مجموع در تصاعد هندسی، خود را به جواب سؤال در حالت کلی رساندیم.

اندیشه ما، از حالت کلی مجموع A، متوجه تصاعد شد؛ سپس خود را به تصاعد هندسی با جمله های  $10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^k$  رساند و از آن جا، با این تجزیه و تحلیل و استفاده از سؤال های کمکی، راه را برای حل سؤال (که تعمیمی از سؤال های کمکی بود) باز کرد.

ممکن بین عنصرهای به ظاهر جدا از هم نکند؛ اگر با تجزیه و تحلیل داده ها، به تدریج و گام به گام، راه را برای رسیدن به مقصود نگشاید ...، هرگز رشد نمی کند و استعداد رفع دشواریها را بدست نمی آورد. اندیشه، بویژه اندیشه ریاضی، ضمن جدا کردن و شناختن پدیده ها و حقیقت های موجود (تجزیه)، جست و جوی بستگی های بین آنها (ترکیب یا تحلیل) و عبور از حالت های خاص به حالت کلی (تعمیم) پدید می آید و رشد می کند؛ و «برخورد فعال با سؤال» یعنی همین

تجزیه و تحلیل و تعمیم، خمیرمایه هایی هستند که «اندیشه» را بارور می کنند، موجب افزایش آگاهیها و بالا رفتن استعداد کار می شوند و به ما امکان می دهند تا، به کمک اندیشه خود، حلقه مجهول یک موقعیت (یعنی آنچه را که به طور مستقیم به ما نداده اند) پیدا کنیم.

اندیشه، نه از راه به خاطر سپردن و حفظ کردن بلکه از طریق تلاش ذهن و جست و جوی بستگی های تازه به دست می آید. اندیشه، از ساده ترین آگاهیها آغاز می شود و با فعالیت خود - و بر پایه تجربه های پیشین - آگاهیهای مناسب دیگری را به یاد می آورد، آنها را به هم نزدیک می کند و با ارزیابی موردهای مشابه و توجه به حالت خاص، خود را از «بین بست» خارج می کند. با یکی دو مثال، مطلب را روشنتر می کنیم.

مثال ۱: n عدد طبیعی داریم که همه آنها، با رقم a نوشته شده اند (a می تواند یکی از رقمهای ۱، ۲، ...، ۹ باشد). کوچکترین عدد، k رقم و، هر عدد بعدی، یک رقم بیشتر از عدد قبل از خود دارد. مجموع این n عدد را پیدا کنید.

مجموع مجهول را می توان این طور نوشت (عددها در عدد - شماری به مبنای ۱۰):

$$A = \underbrace{aa\dots a}_{\text{رقم } k} + \underbrace{aa\dots a}_{\text{رقم } (k+1)} + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{\text{رقم } (k+n-1)}$$

باید مجموع n جمله را پیدا کنیم. تنها برای مجموعهایی قاعده کلی داریم که، جمله های آنها، به تصاعد حسابی یا تصاعد هندسی باشند. ولی در این جا، با تصاعد سر و کار نداریم. چه باید کرد؟ ... ساده ترین حالت را، وقتی  $a = 1$  و  $k = 1$  باشد، در نظر بگیریم:

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{\text{رقم } n}$$

نسبت به خط راست AP ثابت می‌شود.

حرکت بعدی اندیشه، برای تعیین طول پاره‌خطهای مجهول، دقت در ویژگیهایی است که شکل‌های متقارن دارند (برابر بودن پاره‌خطهای راست متناظر، عمود بودن محور تقارن بر پاره خط راستی که دو نقطه متناظر را به هم وصل می‌کند و نصف شدن این پاره خط راست به وسیله محور تقارن). در نتیجه:

$$[MK] \perp [AP] \text{ و } |MK| = |BC| = |AP|$$

سرانجام، با بررسی مساحت مربع و مثلث، به این نتیجه می‌رسیم که مربع ABPC و مثلث MPK هم ارزند (یعنی مساحت‌های برابر دارند) که، از آن‌جا، مساحت مجهول، برابر  $a^2$  واحد مربع می‌شود. اشاره‌ای به یک نکته مهم: مسأله را کامل حل کنید.

وقتی معادله ساده‌ای مثل  $mx = a$  روبه روی شماست، برای حل آن و پیدا کردن مقدار مجهول  $x$  چه می‌کنید؟ خیلی ساده است: می‌گویید دو طرف معادله را بر  $m$  تقسیم می‌کنیم، مقدار  $x$  به دست می‌آید:

$$x = \frac{a}{m}$$

آیا حل مسأله تمام شده است؟ نه! می‌دانید، دو طرف برابری را، تنها وقتی می‌توان بر  $m$  تقسیم کرد که،  $m$ ، برابر صفر نباشد. پس جوابی که به دست آورده‌اید، همیشه قابل قبول نیست و باید آن را این‌طور نوشت:

$$x = \frac{a}{m} \text{ اگر } m \neq 0 \text{، آن‌گاه}$$

هنوز کار حل مسأله تمام نشده است؛ زیرا باید به این پرسش هم پاسخ داد که: اگر  $m$  برابر صفر باشد، تکلیف  $x$  چه می‌شود؟ پاسخ را می‌دانید. بنابراین، تنها وقتی می‌توان حل معادله را کامل دانست که به پرسش اخیر هم، پاسخ داده باشیم:

$$x = \frac{a}{m} \text{ اگر } m \neq 0 \text{، آن‌گاه}$$

اگر  $m = 0$  و  $a = 0$ ، آن‌گاه  $x$  می‌تواند هر عدد دلخواه باشد؛

اگر  $m = 0$  و  $a \neq 0$ ، آن‌گاه معادله ریشه‌ای ندارد.

در برخی متنها و به‌ویژه در برخی کتابهای سطحی «حل المسائل»، این روند کار را به دو بخش تقسیم کرده‌اند: (۱) حل مسأله؛ (۲) بحث. اغلب، در صورت مسأله هم، همین دو بخش را یادآوری می‌کنند: «معادله  $mx = a$  را حل و بحث کنید».

که برخوردی سطحی و حتی بی‌معنی با یک مسأله ریاضی است. حل یک مسأله ریاضی، و مثلاً حل یک معادله، به معنای آن است که جواب یا جوابهای ممکن را، در همه حالت‌هایی که پیش می‌آید، پیدا

مثال ۲: روی ضلعهای مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی، با ضلع مجاور به زاویه قائمه برابر  $a$ ، مربعاتی در بیرون مثلث ساخته‌ایم و مرکزهای این مربعات را، با پاره خطهای راست به هم وصل کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آید.

برای به حرکت درآوردن اندیشه، ابتدا عنصرهای صورت مسأله را، مشخص و تعریف هر یک از آنها را مرور می‌کنیم: «مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین»، «ضلع مجاور به زاویه قائمه»، «مربع»، «مرکز مربع». بعد شکل را رسم و داده‌های مسأله را یادداشت می‌کنیم. پاره خطهای راست AB و AC، ضلعهای مجاور به زاویه قائمه؛  $|AB| = |AC|$ ؛

مربع  $AA_1C_1C$  و  $BB_1C_1C$ ،  $AA_1B_1B$

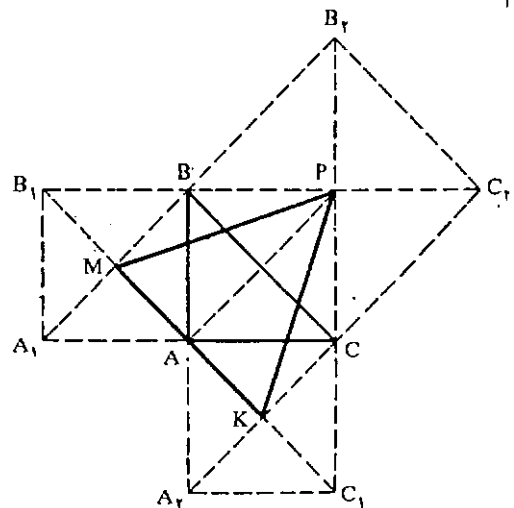
$$|AA_1| = |A_1B_1| = |B_1B| = |AB|$$

$$|BB_1| = |B_1C_1| = |C_1C| = |BC|$$

$$|AC| = |CC_1| = |C_1A_1| = |A_1A|$$

نقطه‌های M، P و K؛ مرکزهای مربعات.

شکل ۳



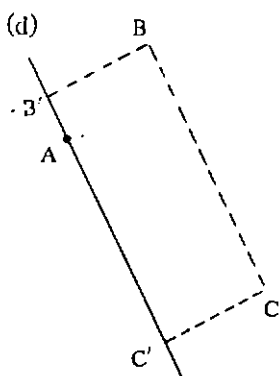
چون باید مساحت مثلث MPK را پیدا کنیم، به‌طور طبیعی اندیشه ما، متوجه تعیین قاعده مثلث و ارتفاع وارد بر این قاعده می‌شود. برای این که حرکت اندیشه را در جست و جوی بستگی‌هایی که بین داده‌ها (ضلعهای مجاور به زاویه قائمه در مثلث ABC) و مجهولها (قاعده و ارتفاع مثلث MPK) وجود دارد، ساده‌تر کنیم، باید آنها را در دستگاهی از بستگی‌ها وارد کنیم که معرف ویژگی مورد نظر ما باشند. در این مسأله، تقارن تمامی شکل و بخشی از آن؛ یعنی مثلث MPK،

برابر، منفی باشند، آن وقت لگاریتم عدد منفی معنا ندارد ... پس عمل لگاریتم گرفتن به شرطی درست است که  $x$ ، عددی مثبت باشد. ولی در صورت مسأله، شرطی برای مثبت بودن  $x$  وجود ندارد. در واقع  $\log|x|$  معنا دارد، ولی  $\log x$  ممکن است معنا نداشته باشد.

اگر  $\log|x| = \log 2$ ، آن وقت به دست می آید  $x = \pm 2$ . آیا  $x = -2$  در معادله صدق می کند ... بله!

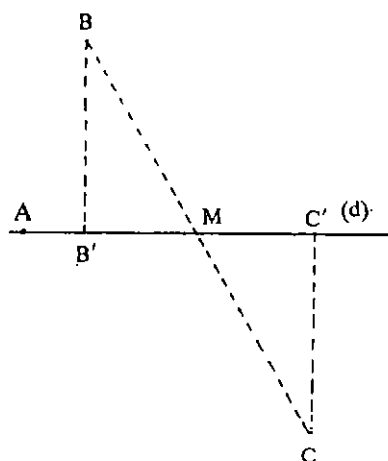
$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} ; (-4)^{-2} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

مثال ۲: سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک صفحه واقعند. از نقطه  $A$  خط راستی بگذرانید که، دو نقطه  $B$  و  $C$ ، از آن به یک فاصله باشند.



شکل ۴

مسأله ساده‌ای است: اگر خط راست مجهول را که از  $A$  می‌گذرد،  $d$  بنامیم، چون طول عمودهای وارد از  $B$  و  $C$  بر  $d$  با هم برابرند، بنابراین  $d$  با خط راست  $BC$  موازی است. پس از نقطه  $A$ ، خط راستی موازی خط راست  $BC$  رسم می‌کنیم، خط راست مجهول به دست می‌آید ... در درستی این جواب شک نیست. ولی مگر



شکل ۵

کنیم. «بحث» درباره جواب، جزو حل مسأله است، نه بخشی اضافی و بیرون از حل. اگر از شما بپرسند:  $x$  بزرگتر است یا  $x^2$ ؟ چه پاسخی می‌دهید؟ چاره‌ای جز این ندارید که در پاسخ، از همه حالت‌های ممکن نام ببرید:

اگر  $x = 0$  یا  $x = 1$ ، آن‌گاه  $x^2 = x$ ؛

اگر  $x < 0$  یا  $x > 1$ ، آن‌گاه  $x^2 > x$ ؛

اگر  $0 < x < 1$ ، آن‌گاه  $x^2 < x$ .

و روشن است، حذف هر کدام از این حالت‌ها و توجه نکردن به آن، به معنای آن است که پاسخ را کامل نداده‌ایم.

حل یک مسأله در کجا تمام می‌شود؟ وقتی که به این پرسش‌ها، پاسخ داده باشیم، آیا جوابی که به دست آورده‌ایم، قابل قبول است؟ از بین جواب‌هایی که به دست آورده‌ایم، کدام را باید پذیرفت و کدام را کنار گذاشت؟ آیا جوابی را از دست نداده‌ایم؟ موقعیت جواب، در حالت‌های خاص چه می‌شود؟ ...

قبل از هر کار، باید عمل‌ها و استدلال‌ها را بازبینی کرد. بازبینی درستی محاسبه‌ها و دقت در منطقی بودن استدلال‌ها، از بسیاری اشتباهات جلوگیری می‌کند. ولی با گذشتن از این مرحله، باز هم ممکن است، جوابی که به دست آورده‌ایم، قابل قبول نباشد، یا نیاز به تفسیر داشته باشد و یا بجز آن، جواب یا جواب‌های دیگری هم وجود داشته باشد و ...

مثل همیشه، موضوع را با مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱: معادله  $x^{\log x} = (2x)^x$  را حل کنید.

اگر از دو طرف معادله، در مبنای  $10$  لگاریتم بگیریم، به دست می‌آید:

$$2x \log x = x (\log 2 + \log x) \Rightarrow x \log x - x \log 2 = 0$$

از آن‌جا  $x (\log x - \log 2) = 0$ ، یعنی  $x = 2$  یا  $x = 0$ . ریشه

$x = 0$  قابل قبول نیست (دست کم برای ما).

$x = 0$  به شرطی قابل قبول است که بتوانیم ثابت کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^{\log x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x)^x$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

و ما از عهده این محاسبه بر نمی‌آییم.  $x = 2$  ریشه‌ای از معادله است و در آن صدق می‌کند، زیرا  $2^2 = 4^2$ .

آیا مسأله حل شد؟ دوباره جزء به جزء حل را مورد بررسی قرار می‌دهیم ... از دو طرف لگاریتم گرفتیم ... آیا اگر دو عدد برابر باشند، همیشه لگاریتم‌های آنها یکی است؟ ... نه! ممکن است دو عدد

حالت، نقطه B بر نقطه H منطبق و مثلث ABC قائم الزاویه می شود. دایره به مرکز D و شعاع برابر m، وقتی خط راست BH (و در حالت انطباق B بر H، خط راست عمود بر AH در نقطه H) را قطع می کند که داشته باشیم:  $m \geq \frac{1}{2}h$  یا  $h < 2m$ . به این ترتیب، به حالتی زیر برخورد می کنیم:

(۱) در حالت  $h > c$ ، مسأله جواب ندارد.

(۲) در حالت  $h < c$ : الف) اگر  $2m < h$ ، آن وقت مسأله جواب ندارد؛ ب) اگر  $2m = h$ ، مسأله یک جواب دارد؛ ج) اگر  $2m > h$ ، آن وقت دایره به مرکز D و شعاع برابر m، با خط راست BH، دو نقطه مشترک دارد؛ با وجود این، ممکن است این نقطه مشترک، مثلی را مشخص نکند؛ این وضع، وقتی پیش می آید که نقطه مشترک، منطبق بر B باشد. بنابراین، در این حالت، بازای  $c > \frac{1}{2}h$  یا  $c < \frac{1}{2}h$ ، مسأله دو جواب و به ازای  $c = \frac{1}{2}h$ ، یک جواب دارد. (۳)  $h = c$ . در این حالت، نقطه های B و H بر هم منطبق می شوند. اگر  $2m \leq h$ ، آن وقت مسأله جواب ندارد؛ اگر  $2m > h$ ، مسأله یک جواب دارد (زیرا دو مثلی که به دست می آید، با هم برابرند).

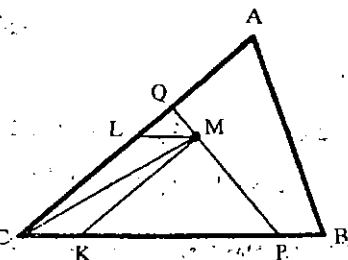


البته، مسأله هایی هستند که، گرچه می توان راه حل آنها را با روشهای مقدماتی دبیرستانی پیدا کرد، بحث درباره حالتیهای مختلف و تعداد جوابها، از مرز ریاضیات دبیرستانی خارج می شود. در چنین صورتی، که برای شما کمتر پیش می آید (زیرا بی شک مسأله ای را به شما می دهند که از عهده حل کامل آن برآید)، باید توضیح بدهید که حل مسأله ناتمام مانده است. ذکر جمله «ناتمام» در پایان حل مسأله، به معنای درک شما از مفهوم «حل مسأله» است.

برای آشنایی شما، نمونه ای از این گونه مسأله ها را می آوریم.

از نقطه M واقع در درون مثلث ABC، خط راستی رسم کنید که مثلث را به دو بخش هم ارز (با مساحتیهای برابر) تقسیم کند.

شکل ۷



نمی شود دو نقطه B و C در دو طرف خط راست d و، در ضمن، از آن به یک فاصله باشند؟...

... بله، درست است، اگر خط راست d را از نقطه A و نقطه M (وسط پاره خط راست BC) بگذرانیم، باز هم جوابی از مسأله، به دست می آید. پس مسأله دو جواب دارد: (۱) خط راستی که از A موازی BC رسم شود؛ (۲) خط راستی که از A و وسط پاره خط راست BC عبور کند.

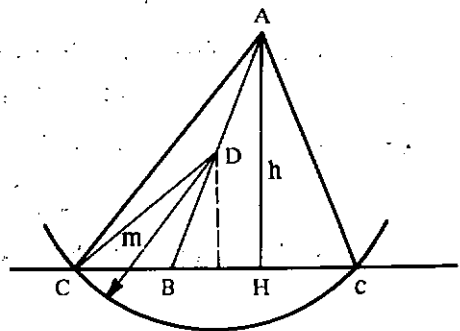
در ضمن، روشن می شود که، اگر A بر M منطبق باشد، مسأله بی نهایت جواب دارد، یعنی هر خط راستی که از M (یعنی A) بگذرد، جواب مسأله است. ولی اگر A روی خط راست BC و در جایی غیر از M باشد، آن وقت مسأله تنها یک جواب دارد: خود خط راست BC.. مسأله به طور کامل حل شد.

مثال ۳: مطلوب است رسم مثلث ABC، به شرطی که از آن، طول ضلع AB، طول میانه CD و طول ارتفاع AH معلوم باشد:

$$|AH| = h, |CD| = m, |AB| = c$$

ABC را مثلث مجهول می گیریم. خود مثلث ABC را، بلافاصله، نمی توان ساخت. ولی مثلث قائم الزاویه AHB قابل رسم است، زیرا از آن، طولهای وتر AB و ضلع مجاور به زاویه قائمه AH معلوم است. نقطه D، وسط ضلع AB است و اگر به مرکز D و شعاع برابر

شکل ۶

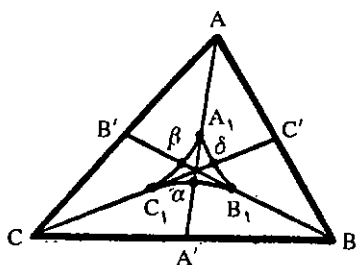


m دایره ای رسم کنیم تا خط راست BH را قطع کند، نقطه C، رأس سوم مثلث ABC به دست می آید (شکل ۶). روی شکل دیده می شود که مسأله، در حالت کلی، دو جواب دارد.

مسأله را حل کردیم و جواب را به دست آوردیم، ولی هنوز حل مسأله کامل نیست. حل را از آغاز مورد بازبینی قرار می دهیم. اول مثلث قائم الزاویه ABH را رسم کردیم. ولی این مثلث، وقتی وجود دارد که داشته باشیم  $c > h$ . حالت  $c = h$  هم قابل قبول است؛ در این

$|CQ| = y$  را جدا می‌کنیم، خط راست مجهول به دست می‌آید. جواب را با این فرض به دست آوردیم که، خط راست مجهول، ضلعهای  $CA$  و  $CB$  را قطع کرده باشد. به همین ترتیب، می‌توان دو حالت دیگر را در نظر گرفت و دو جواب دیگر به دست آورد. در نتیجه، در حالت کلی، سه جواب پیدا می‌شود.

همان‌طور که می‌بینیم، مسأله، با روشهای ریاضیات دبیرستانی به جواب رسید. ولی بحث دربارهٔ تعداد جوابها، چه از نظر کمی و چه از نظر کیفی، نسبت به حل کلی مسأله، بغرنجتر است و از محدودهٔ ریاضیات دبیرستانی بیرون می‌رود. نتیجهٔ این بحث را، در این جا می‌آوریم.



شکل ۸

هذلولی  $C_1A_1B_1$  را (شکل ۸) مماس بر سیانه‌های  $BB'$  و  $CC'$ ، به ترتیب در نقطه‌های وسط آنها، یعنی  $B_1$  و  $C_1$  رسم می‌کنیم (این هذلولی، روی میانهٔ  $AA'$ ، پاره خط راست به طول  $|AA'| \frac{\sqrt{2}}{2} = |A\alpha|$  را جدا می‌کند، مجانبهای این هذلولی، عبارتند از: خطهای راست  $AC$  و  $AB$  به همین ترتیب، هذلولیهای  $A_1BC_1$  و  $A_1CB_1$  را رسم می‌کنیم. مسأله، وقتی سه جواب دارد که نقطهٔ  $M$ ، در درون مثلث منحنی الضلع  $A_1B_1C_1$  واقع باشد. اگر  $M$  روی محیط مثلث  $A_1B_1C_1$  باشد، به شرطی بر یکی از رأسهای مثلث منطبق نشود، مسأله دو جواب دارد. مسأله، در همهٔ حالتها، دیگر، دارای یک جواب است.

تا بعد

در این مسأله حتی پیدا کردن نمونه‌ای از جواب هم، کار چندان ساده‌ای نیست و باید از جبر و مثلثات کمک بگیریم. خط راست مجهول را  $PQ$  فرض می‌کنیم (شکل ۷) که ضلعهای  $CA$  و  $CB$  را، به ترتیب، در نقطه‌های  $Q$  و  $P$  قطع کرده است.  $|CP| = x$  و  $|CQ| = y$  می‌گیریم. بنا بر فرض، باید داشته باشیم:

$$xy = \frac{1}{4} ab \quad (1)$$

برای به دست آوردن مقادیرهای  $x$  و  $y$ ، به معادلهٔ دیگری هم نیاز داریم. خطهای راست  $ML$  و  $MK$  را، به ترتیب، موازی ضلعهای  $CA$  و  $CB$  رسم و  $M$  را به  $C$  وصل می‌کنیم.  $|CK| = k$  و  $|CL| = l$  می‌گیریم (چون نقطهٔ  $M$  مفروض است، بنابراین طولهای  $k$  و  $l$  هم، مقدارهایی معلومند). روشن است که

$$S_{PCQ} = S_{CMQ} + S_{CMP}$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۷، داریم:

$$S_{CMQ} = \frac{1}{4} |CQ| \cdot |CK| \sin \hat{C} = \frac{1}{4} ky \sin \hat{C};$$

$$S_{CMP} = \frac{1}{4} lx \sin \hat{C}; \quad S_{PCQ} = \frac{1}{4} xy \sin \hat{C}$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$ky + lx = xy \quad (2)$$

اکنون باید، به کمک معادله‌های (۱) و (۲)، راهی برای رسم پاره‌خطهای راست  $x$  و  $y$  پیدا کرد. این رسم را می‌توان، مثلاً با روش زیر انجام داد. ابتدا، این پاره خط راست را می‌سازیم:

$$C = \sqrt{\frac{1}{4} ab}$$

سپس، مجهولهای کمکی  $u$  و  $v$  را، با توجه به تناسبهای

$$\frac{u}{k} = \frac{c}{x}; \quad \frac{v}{l} = \frac{c}{y} \quad (3)$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت، دستگاه معادله‌های (۱) و (۲)، منجر به این دستگاه می‌شود:

$$uv = kl \quad \text{و} \quad u + v = c \quad (4)$$

با توجه به معادله‌های (۴)، می‌توان پاره‌خطهای راست  $u$  و  $v$  و سپس، با توجه به معادله‌های (۳)، پاره‌خطهای راست  $x$  و  $y$  را ساخت. اگر  $x \leq a$  و  $y \leq b$  باشد، آن وقت پاره‌خطهای راست  $|CP| = x$  و

یادداشت. اغلب، ضمن تعریف تابع نمایی به صورت

$$[f(x)]^{p(x)} \quad (F)$$

شرط  $f(x) > 0$  را می‌پذیرند، یعنی دامنهٔ مقادیرهای قابل قبول  $x$ ، با شرط  $f(x) > 0$  به دست می‌آید. اگر این تعریف را برای تابع نمایی قبول داشته باشیم، آن وقت  $x = -2$  نمی‌تواند به عنوان ریشه‌ای از معادلهٔ  $(2x)^x = x^{2x}$  پذیرفته شود. با وجود این ضمن تعیین ریشه‌های این معادله، باید به این مطلب اشاره شود: اگر مقادیر منفی  $x$  را جزو دامنهٔ معادله به حساب آوریم، معادله دو ریشه دارد:  $x = \pm 2$ ؛ ولی اگر تنها مقادیر مثبت به عنوان دامنهٔ مقادیرهای قابل قبول  $x$  پذیرفته شود، آن وقت معادله تنها یک جواب دارد:  $x = 2$ .