



میناها

نشان می‌دهد. از رابطه (۲)

بسط عدد برای حالت $b = 10$ به سادگی

به دست می‌آید:

$$\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_{10} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 (10) + a_0 = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}_{10}$$

در صورتی که b عددی غیر 10 باشد، ابتدا عدد را به صورت (۲) بسط می‌دهیم و سپس حاصل بسط را به دست می‌آوریم، که در این صورت، عدد حاصل بر مبنای 10 خواهد بود.

مثال ۱. عدد $(345)_7$ را به مبنای ۳ بنویسید.

حل: برای نوشتن عددی بر مبنای دلخواه b ، ابتدا عدد را بر مبنای 10 برده و سپسی با تقسیمات متوالی بر b ، عدد را بر مبنای b می‌نویسیم.

$$(345)_7 = 3 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = 12 + 8 + 5 = (25)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 25 \div 3 = 8 \text{ remainder } 1 \\ 8 \div 3 = 2 \text{ remainder } 2 \\ 2 \div 3 = 0 \text{ remainder } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (345)_7 = (25)_{10} = (221)_3 \end{array}$$

قضیه ۱. اگر b عددی طبیعی و

بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی N

را می‌توان به طریقی یکتا:

$$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \quad (1)$$

نمایش داد که در آن k یک عدد صحیح نامنفی و

$0 \leq a_i \leq b-1$ و $a_k \neq 0$ به عنوان مثال، برای عدد 1384

می‌توان نوشت:

$$b=10: 1384 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

می‌دانیم عدد b در رابطه (۱) که در واقع بسط عدد N را

نشان می‌دهد، مبنای و عددهای a_i ضرایب بسط خوانده

می‌شوند. واضح است که ضرایب بسط همیشه از مبنای مورد

نظر کوچک‌ترند.

نتیجه ۱. اگر $b \in \mathbb{N}$ و $b > 1$ و $k \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq a_i \leq b-1$ و

$a_k \neq 0$ ، آن‌گاه:

$$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \Leftrightarrow$$

$$N = \overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_b \quad (2)$$

$$\overline{(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)}_b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

رابطه (۲) بسط هر عدد دلخواه N را بر مبنای مورد نظر

مثال ۲. عدد x را تعیین کنید:

$$(543)_6 = (x)_7$$

حل: ابتدا عدد 543 را به مبنای 10 برده و سپس با تقسیمات متوالی بر 7 عدد را بر مبنای 7 می نویسیم.

$$(543)_6 = 3 + 4 \times 6 + 5 \times 6^2 = 3 + 24 + 180 = (207)_{10}.$$

$$\begin{array}{r} 207 \div 7 \\ 14 \overline{) 207} \\ \underline{14} 29 \\ 67 \overline{) 29} \\ \underline{28} 1 \\ 63 \overline{) 1} \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

$$(543)_6 = (207)_{10} = (414)_7; x = 414$$

نتیجه ۲. برای تبدیل عددی از مبنای غیر 10 مانند b به مبنایی دلخواه مانند c ، ابتدا عدد مورد نظر را به مبنای 10 برده و سپس با تقسیمات متوالی بر c عدد را به مبنای c می نویسیم.

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b = (a_k a_{k-1} b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0)_c = N$$

$$\begin{array}{r} N \\ \div r_0 \\ \hline q_1 \\ \div r_1 \\ \hline q_2 \\ \div r_2 \\ \hline q_3 \\ \div r_3 \\ \hline q_4 \\ \vdots \\ \div r_{m-1} \\ \hline q_m \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} L^2$$

پس:

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b = (q_m r_{m-1} \dots r_2 r_1 r_0)_c$$

توجه: بدیهی است که همه اعداد $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$ و q_m از عدد c (مبنا) کوچک تر و غیر منفی هستند.

مثال ۳. عدد x را در برابری تعیین کنید.

$$(1102202)_3 = (13x5)_9$$

حل: روش اول:

$$(1102212)_3$$

$$= \underbrace{2}_{5} + \underbrace{2 \times 3^2 + 2 \times 3^2}_{8(9^1)} + \underbrace{0 + 1 \times 3^5}_{3(9^2)} + \underbrace{1 \times 3^6}_{1(9^3)}$$

$$= 5 + 8(9) + 3(9^2) + 1(9^3)$$

$$= (1385)_9; \quad \boxed{x=8}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} (1102212)_3 &= 2 + 2 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^2 + 0 + 1 \times 3^5 + 1 \times 3^6 \\ &= 5 + 18 + 54 + 243 + 729 = (1049)_{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13x5)_9 &= 5 + x(9) + 3(9^2) + 1(9^3) \\ &= 9x + 5 + 243 + 729 = (9x + 977)_{10}. \end{aligned}$$

$$9x + 977 = 1049 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1049 - 977}{9} = \frac{72}{9} = 8;$$

$$\boxed{x=8}$$

نکته: اگر عددی در مبنای b برابر x باشد و در مبنای b^n خواسته شود:

$$(x)_b = (y?)_{b^n}$$

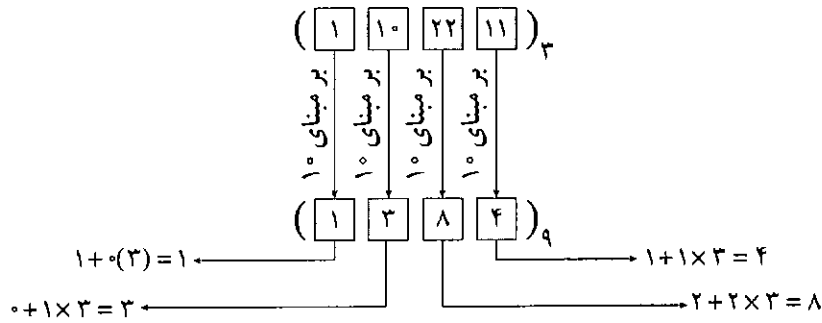
در این صورت کافی است n رقم اول x را بر مبنای 10 برده و حاصل را رقم اول y در نظر بگیریم، سپس n رقم بعدی را به مبنای 10 ببریم و حاصل را رقم دوم y به حساب آوریم و به همین ترتیب، همه ارقام y به دست خواهد آمد.

مثال ۴. عددی در مبنای 9 به صورت $(1102211)_3$

است، آن را بیابید.

حل: در واقع باید X را در برابری $(1102211)_3 = (x)_9$

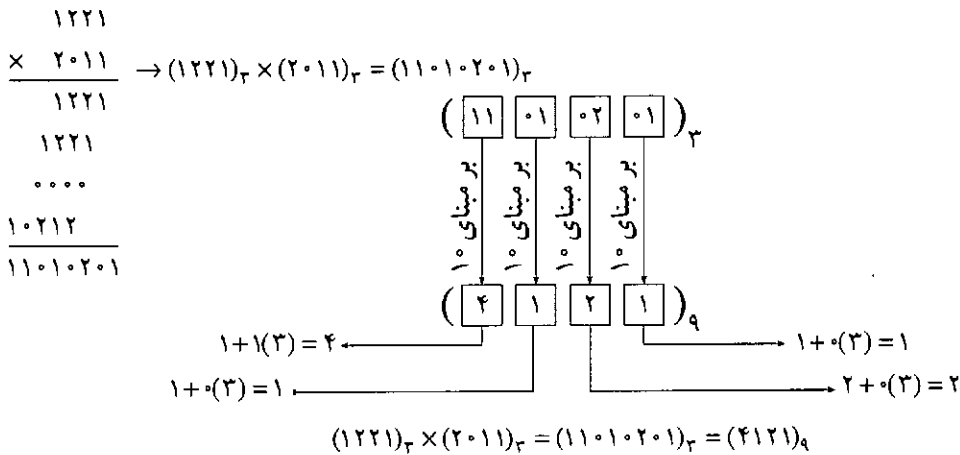
تعیین کنیم؛ زیرا $9 = 3^2$ ، بنابراین به سادگی می توان X را تعیین کرد:



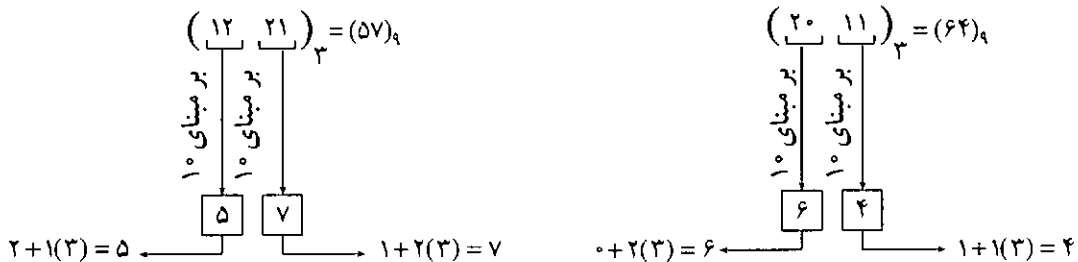
مثال ۵. حاصل عبارت $(1221)_3 \times (2011)_3$ را در مبنای

۹ بیابید.

حل: روش اول:



روش دوم:



$$\begin{array}{r}
 57 \\
 \times 64 \\
 \hline
 261 \\
 376 \\
 \hline
 4121
 \end{array}$$

$(57)_9 \times (64)_9 = (?)_9 \rightarrow 261 \rightarrow (57)_9 \times (64)_9 = (4121)_9$

حل: $(47)_n = (74)_m$; $v + 4n = 4 + 7m$;

$$m = \frac{4n+3}{v}, \quad \begin{array}{l|l} n=8 & m=5 \\ n=15 & m=9 \\ n>v & m>v \end{array}$$

$m+n=15+9=24$ (جواب قابل قبول)

مثال ۹. عددی در پایه ۷ به صورت $\overline{ab}$ و در پایه ۹ به صورت $\overline{ba}$ است، مقدار $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ را بیابید.

حل: $(\overline{ab})_v = (\overline{ba})_q$;

$$\begin{cases} a, b < v \\ va + b = 9b + a ; 8b = 6a ; b = \frac{3}{4}a ; \boxed{a=4, b=3} \end{cases}$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

تمرین

- عدد $(334)_5$ را به مبنای ۷ بپسندید.
- از برابری $(x)_7 = (1384)_9$ ، مقدار x را بیابید.
- از برابری $(1x85)_9 = (1102202)_3$ ، عدد x را بیابید.
- عددی در مبنای ۸ بیابید که معادل عدد $(1102202)_3$ باشد.
- حاصل عبارت $(2022)_3 \times (1021)_5$ را در مبنای ۶ بیابید (باسه روش).
- از برابری $(11x3)_{12} = (31)_{2x} \times (13)_{2x}$ مقدار x را بیابید.
- از برابری $(x6)_{2x} = (110)_{2x}$ و $(B)_7 = \overline{xx}$ مقدار B را بیابید.
- عددی در پایه m به صورت ۲۷ و در پایه n به صورت ۷۳ است، کمترین مقدار $(m+n)$ را بیابید.
- عددی در پایه ۵ به صورت $\overline{xy}$ و در پایه ۷ به صورت $\overline{yx}$ است، مقدار $(x+y)$ را بیابید.
- چند عدد چهار رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟
- چند عدد شش رقمی در مبنای ۷ با ارقام متمایز وجود دارد؟
- با توجه به برابری $(b)_7 = 13^2 = (a)_3$ ، مجموع تعداد صفرها در a و b را بیابید.
- هر عدد به صورت $\overline{aaaaaa} + \overline{aaa}$ بر چه اعدادی بخش پذیر است؟
- هر عدد به صورت $(\overline{aaaccc} + \overline{ccc})(\overline{aaabbb} + \overline{bbb})$ بر چه اعدادی بخش پذیر است؟

روش سوم:

$(1221)_7 = 1 + 2 \times 7 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7^3 = (52)_9$.

$(2011)_7 = 1 + 1 \times 7 + (0) \times 7^2 + 2 \times 7^3 = (58)_9$.

$(52)_9 \times (58)_9 = (3016)_9$; $3016 \div 9$

$(3016)_9 = (4121)_4$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 3016} \\ \underline{27} \\ 31 \\ \underline{27} \\ 46 \\ \underline{45} \\ 1 \end{array}$$

مثال ۶. از برابری $(1123)_x \times (31)_x = (13)_x$ ، حاصل $x^x = (A)_5$ را بیابید.

حل: $(13)_x \times (31)_x = (1123)_x$;

$(3+x)(1+3x) = 3 + 2x + x^2 + x^2$;

$3 + 10x + 3x^2 = 3 + 2x + x^2 + x^2$;

$x^2 - 2x^2 - 8x = 0$; $x(x+2)(x-4) = 0$

$x = 0$; $x = -2$; $\boxed{x=4}$ $x^x = (4)^4 = 256$;

$256 \div 5$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 256} \\ \underline{25} \\ 06 \\ \underline{5} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

$(256)_9 = (2011)_5$; $(A)_5 = (2011)_5$; $\boxed{A=2011}$

مثال ۷. از برابری $(3x)_{2x} = (110)_x$ ، حاصل $(B)_7 = \overline{xx}$ را بیابید.

حل: $(3x)_{2x} = (110)_x$; $x + 3(2x) = 0 + x + x^2$;

$7x = x^2 + x$; $x^2 - 6x = 0$; $x(x-6) = 0$;

$x = 0$; $\boxed{x=6}$; $\overline{xx} = (66)_7$.

$(66)_9 = (1002)_7$; $(B)_7 = (1002)_7$; $\boxed{B=1002}$

$64 \div 7$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 64} \\ \underline{63} \\ 16 \\ \underline{14} \\ 2 \\ \underline{0} \\ 2 \end{array}$$

مثال ۸. عددی در پایه n به صورت ۴۷ و در پایه m به صورت ۷۴ نوشته می شود، کمترین مقدار $m+n$ را بیابید.