

سری +n ..



امجدقندهاری

۱. برخی از خاصیت‌های سیگما

سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ است.

اگر دنباله $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ سری همگرا و}$$

چنانچه دنباله $\{S_n\}$ واگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

واگراست.

تذکر: در سری‌ها آنچه که مهم است، همگرایی یا

واگرایی سری است.

۳. قاعدهٔ ادغام (تلسکوپی)

$$S_n = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

$$f(k) = \frac{2}{k+1}$$

مثال.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1))$$

$$= f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{2}{n+2}$$

۴. تجزیه کسرها

اگر کسری به صورت $\frac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)}$ داشته باشیم و

$$1. \sum_{i=m}^n a = (n-m+1)a$$

$$2. \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$3. \sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

$$4. \sum_{i=1}^n (ka_i + pb_i) = k \sum_{i=1}^n a_i + p \sum_{i=1}^n b_i$$

۲. سری

دنباله $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ را در نظر می‌گیریم،

داریم:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در این صورت، دنباله $\{S_n\}: S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ حاصل

از مجموع‌های جزئی را سری می‌گوییم و S_n را مجموع جزئی

n ام سری یا به طور خلاصه مجموع سری می‌گوییم. اگر

دنباله $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم سری

همگراست و s حد دنباله $\{S_n\}$ را مجموع سری می‌نامیم و

می‌نویسیم:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\sum_{i=1} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

۵. راه حل مسائل سری

معمولاً برای یافتن مقدار سری، مراحل زیر را انجام می دهیم.

۱. عبارت داخل $\sum$ را با استفاده از تجزیه کسرها به صورت تفاضل در می آوریم.
 ۲. S_n را تشکیل می دهیم.
 ۳. $f(k)$ و $f(k+1)$ را می سازیم.
 ۴. قاعده ادغام را برای S_n به کار می بریم.
 ۵. حد S_n را وقتی $n \rightarrow \infty$ می یابیم.
- مسئله ۱. مقدار سری زیر را بیابید.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+5)}$$

حل:

$$\frac{2}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{A}{2k+3} + \frac{B}{2k+5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+5)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right), \quad f(k) = \frac{1}{2k+3}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) \Rightarrow S_n = f(1) - f(n+1)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right)$$

بخوایم آن را به کسرهای ساده تر تبدیل کنیم، می نویسیم:

$$\frac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)} = \frac{A}{ax-b} + \frac{B}{cx-d}$$

پس از مخرج مشترک گیری در سمت راست تساوی بالا، صورت ها را متحد قرار می دهیم؛ یعنی:

ضریب x دو طرف مساوی با یکدیگر و عددهای ثابت دو طرف مساوی با یکدیگر قرار می دهیم.

مثال. کسر $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k+2} + \frac{B}{k+3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k(A+B) + 2A + 3B}{(k+2)(k+3)}$$

$$k(A+B) + 2A + 3B \equiv 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1$$

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

پس:

راه کوتاه تجزیه کسرها: درباره مثال بالا، راه کوتاه بیان می شود.

محاسبه A : مخرج A را از سمت چپ تساوی بر می داریم و در بقیه کسر به جای k ، (-2) را قرار می دهیم.

محاسبه B : مخرج B را از سمت چپ تساوی بر می داریم و در بقیه کسر به جای k ، (-3) را قرار می دهیم.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} \right) = \frac{1}{12}$$

مقدار سری

۶. سری هندسی

$$\text{سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots$$

سری هندسی گویم.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

در این سری داریم:

الف. اگر $|r| < 1$ ، سری همگرا و مقدار آن برابر است با:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

ب. اگر $|r| \geq 1$ ، سری واگرا است.

$$\text{مسئله ۴. مقدار سری } A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n-1}}{4^{2n-1}}$$

را بیابید.

حل:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\pi^{2n})}{\pi(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \times \frac{(\pi^2)^n}{(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \times \frac{(\pi^2)^n}{16^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{16} \times \left(\frac{\pi^2}{16} \right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi^2}{16} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1 - \frac{\pi^2}{16}} = \frac{2\pi}{16 - \pi^2}$$

مقدار سری

۷. شرط لازم همگرایی سری

شرط لازم همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ آن است که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right) = \frac{1}{5}$$

مقدار سری

مسئله ۲. مقدار سری زیر را بیابید.

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}$$

$$\text{حل: } A = \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{\frac{k}{k+2}}{\frac{k+1}{k+1}}$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \frac{k}{k+1} - \log \frac{k+1}{k+2} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \frac{k}{k+1} - \log \frac{k+1}{k+2} \right), \quad f(k) = \log \frac{k}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

قاعده ادغام

$$S_n = \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{n+1}{n+2} \right) = \log \frac{1}{2} - 0 = \log \frac{1}{2}$$

مقدار سری

مسئله ۳. مقدار سری زیر را بیابید.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

حل:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \left(\frac{2}{(k+2)(k+4)} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right)$$

$$f(k) = \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

مثال. سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا می باشند؛ زیرا شرط لازم همگرایی در آن ها برقرار نیست.

۸. سری همساز (هارمونیک)

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را سری همساز (هارمونیک) گوئیم. با این که شرط لازم همگرایی برقرار است، ولی سری واگرا است.

۹. سری P

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را سری P گوئیم.

اگر $p > 1$ ، آن گاه سری همگرا و اگر $p \leq 1$ ، آن گاه سری واگراست، مثال. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست.

۱۰. نکات سری

۱. سری های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ ، $k \in \mathbb{R}$ هم رفتارند؛ یعنی هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.
۲. مجموع دوسری همگرا، یک سری همگراست.
۳. مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا، یک سری واگراست.
۴. داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e \approx 2.718$$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e, \quad \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} = e - 2$$

۵. آزمون مقایسه

اگر سری های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری هایی با جمله های مثبت باشند و از (n) ای به بعد داشته باشیم: $0 < a_n \leq b_n$

الف. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آن گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

❖ آزمون ۱. سری $\sum_{n=2}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n}$

- (۱) به صفر همگراست. (۲) به ۱ همگراست.
- (۳) به $\tan 1$ همگراست. (۴) واگراست.

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \tan \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n} > 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{n} = \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{سری } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{n} \text{ واگراست}$$

در نتیجه بنا به قسمت (ب) نکته ۵ (نکات آزمون مقایسه)

سری $\sum_{n=2}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n}$ نیز واگراست.

❖ آزمون ۲. سری $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$

- (۱) همگرا به صفر است. (۲) همگرا به (۱) است.
 - (۳) فقط همگراست. (۴) واگراست.
- حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{1}{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{2n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < \sin^2 \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$$

❖ آزمون ۵. مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)^2}$ به کدام عدد

نزدیک تر است؟

$\frac{1}{3}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)
$\frac{2}{3}$ (۳)	$\frac{3}{4}$ (۴)

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \frac{1}{(n+2)(n+3)^2} < \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

با فرض $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$ داریم:

$$S_n = \sum_{n=1}^n \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = f(1) - f(n+1)$$

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

پس مقدار سری این آزمون از $\frac{1}{3}$ کم تر است؛ بنابراین

مقدار آن با این گزینه ها به $\frac{1}{3}$ نزدیک تر است.

❖ آزمون ۶. حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$ A کدام

است؟

$\frac{4}{3}$ (۱)	$\frac{2}{4}$ (۲)	$\frac{2}{3}$ (۳)	$\frac{2}{5}$ (۴)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= 1 - 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

بنابر قاعده ادغام

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ P است و همگراست پس سری

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ نیز همگراست؛ بنا به قسمت (الف) نکته ۵ (نکات آزمون مقابله).

❖ آزمون ۳. حاصل $\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=5}^9 \sum_{k=2}^7 a$ کدام است؟

$132a$ (۱)	$80a$ (۲)
$182a$ (۳)	$184a$ (۴)

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=5}^9 \sum_{k=2}^7 a = \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=5}^9 (7-2+1)a = \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=5}^9 6a =$$

$$\sum_{i=1}^{15} (9-5+1)(6a) = \sum_{i=1}^{15} 30a = (15-10+1)(30a) = 180a$$

❖ آزمون ۴. حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n+3)!}$ کدام است؟

$\frac{1}{24}$ (۱)	$\frac{1}{36}$ (۲)
$\frac{1}{24}$ (۳)	$\frac{1}{6}$ (۴)

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+3)-1}{(n+3)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right)$$

$$f(k) = \frac{1}{(k+2)!}$$

$$S_n = \sum_{n=2}^n \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) = f(2) - f(n+1) = \frac{1}{4!} - \frac{1}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

حل: گزینه (۶) صحیح است. سری هندسی است با $|r| < 1$ ؛ پس:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

❖ آزمون ۱۰. حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3n}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

حل: گزینه (۲) صحیح است. در آزمون (۹) داشتیم:

$$|x| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

اگر از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

❖ آزمون ۱۱. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1)(\sqrt{5}-2)^{n-1}$$

سری هندسی است با $|r| < 1$ ،

❖ آزمون ۷. مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}{\cos \frac{1}{k} \cdot \cos \frac{1}{k+1}}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1$ (۲) $\tan 2$ (۳) $\tan \frac{1}{2}$ (۴) $\tan \frac{2}{3}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1} - \cos \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k+1}}{\cos \frac{1}{k} \cdot \cos \frac{1}{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{k} - \tan \frac{1}{k+1} \right) = \tan 1 - 0 = \tan 1 \end{aligned}$$

از قاعده ادغام استفاده شده است.

❖ آزمون ۸. مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^n}{4^{n+1}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{8}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

❖ آزمون ۹. حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ با شرط $|x| < 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{x}$ (۲) $\frac{1}{x-1}$ (۳) $x-1$ (۴) $\frac{1}{1-x}$

❖ آزمون ۱۴. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1-3x)^k}$ همگرا باشد، حدود

x کدام است؟

$$|x| < 1 \quad (1) \quad 0 < x < \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$x < 0 \text{ یا } x > \frac{2}{3} \quad (3) \quad x < 0 \text{ یا } x > \frac{1}{2} \quad (4)$$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1-3x)^k}; r = \frac{1}{1-3x}$$

برای آن که سری همگرا باشد، باید $|r| < 1$ یا $|1-3x| < 1$

$$\Rightarrow |1-3x| < 1 \Rightarrow |3x-1| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 > -1 \Rightarrow x > 0 \\ \text{یا} \\ 3x-1 < 1 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

❖ آزمون ۱۵. حاصل سری زیر کدام است؟

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+4} \right)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (1) \quad \frac{1}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (4)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+4} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} - \frac{(-1)^k}{k+4} = - \left(\frac{(-1)^k}{k+4} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} \right)$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+4} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+4} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} \right)$$

$$f(k) = \frac{(-1)^k}{k+4}$$

$$A = - \left(\frac{-1}{5} - 0 \right) = \frac{1}{5}$$

بنابه قاعده ادغام.

$$= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\sqrt{5}+2} = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

❖ آزمون ۱۲. حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ کدام است؟

$$2e-2 \quad (1) \quad 2e-1 \quad (2)$$

$$2e-5 \quad (3) \quad 2e-3 \quad (4)$$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + e - 1 = 2e - 1$$

نکته (۴) را ببینید.

❖ آزمون ۱۳. حاصل سری $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right)$$

$$f(k) = \frac{1}{(k+1)!}$$

$$A = \frac{1}{2!} - 0 = \frac{1}{2}$$

از قاعده ادغام استفاده شده است.