

ریشه‌ی خارجی معادله

اشاره

در حل مسائل گوناگون معادلات، از جمله معادلات اصم، معادلات شامل لگاریتم و بعضی نمونه‌های دیگر، دانش‌آموزان پیش از شروع به حل معادله، به یافتن حدود قابل قبول برای متغیر می‌پردازند. در پایان و پس از حل معادله، جواب‌های به دست آمده را با دامنه‌ای که در ابتدا یافته‌اند، مقایسه می‌کنند. در این مقاله می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا این کار کافی است؟!

x قرار دارد. ولی آیا جواب معادله است؟ اگر در معادله آزمایش کنیم، داریم: $\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{25}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$. پس در معادله صدق نمی‌کند و $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ نیز قابل قبول نیست؛ با وجودی که در دامنه صدق می‌کرد!

به این ترتیب، در این نمونه دیدیم که هر جوابی که در دامنه‌ی تغییر x قرار داشته باشد، لزوماً جواب معادله نیست.

نمونه‌ی ۲. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب حقیقی دارد؟

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} = \sqrt{2x-1}$$

حل: ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+7 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{7}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا دامنه $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\}$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم. به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

نمونه‌ی ۱: معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{2x}$$

حل: ابتدا دامنه یا مقدارهای قابل قبول برای x را می‌یابیم. داریم:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

لذا دامنه $x \geq 0$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم:

$$x+1+2x+3+2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 2x$$

و به این معادله می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = -(x+4)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$4(x+1)(2x+3) = (x+4)^2$$

بنابراین: $7x^2 + 12x - 4 = 0$

این معادله‌ی درجه دوم، دو جواب دارد: $x = -2$ و

$$x = \frac{2}{7}$$

$x = -2$ بیرون از دامنه است. ولی $x = \frac{2}{7}$ در دامنه‌ی تغییر

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$t_2 = -\frac{5}{13} \text{ و } t = \frac{1}{2} \text{ و از آن جا: } 2t^2 - 3t - 5 = 0$$

در این صورت:

$$\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

و هم چنین:

$$\log_x 2 = -\frac{5}{13} \Rightarrow x = 2^{-\frac{13}{5}} = 2^{-2} \times 2^{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt[5]{4}}{4}$$

هر دو جواب $x = \frac{\sqrt[5]{4}}{4}$ و $x = 4$ در محدوده هستند و در

معادله صادق اند. اما تنها جواب های معادله این ها نیستند.

$x = 1$ هم جواب معادله است. شاید بتوان $x = 1$ را ریشه ی

فراموش شده نامید!

در واقع، استفاده ی صوری از دستور مربوط به تغییر مبنای

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

به از دست رفتن جواب منجر شده است. چرا که سمت

چپ و سمت راست تساوی فوق، می تواند دامنه های تعریف

متفاوتی داشته باشد.

اینک به سراغ مثلثات می رویم. وقتی یک برابری بین

زاویه ها داشته باشیم و از دو طرف برابری، سینوس یا کسینوس

بگیریم، غالباً با وضع مشابهی روبرو می شویم. برای نمونه،

زوج بودن تابع کسینوس، به معنای آن است که می تواند موجب

ورود ریشه های خارجی شود.

نمونه ی ۴. معادله ی زیر را حل کنید:

$$\text{Arc cos } x - \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

حل: این معادله، برای مقدارهایی از x که با شرط

$-1 \leq x \leq 1$ (دامنه) سازگار باشند، معنی دارد:

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} x \leq 1 &\Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

اکنون از دو طرف معادله کسینوس می گیریم:

$$\cos(\text{Arc cos } x - \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} x) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$2\sqrt{(x+3)(2x+7)} = -(x+11)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می کنیم:

$$4x^2 + 30x - 37 = 0$$

معادله ی درجه دوم اخیر، دو جواب دارد: $x = 1$ و

$$x = \frac{-37}{4}$$

$x = \frac{-37}{4}$ در دامنه ی جواب قرار ندارد و قابل قبول نیست.

اما $x = 1$ با وجودی که در محدوده ی دامنه قرار دارد، با

آزمایش آن در معادله ی داده شده، خواهیم دید که در آن صدق

نمی کند. اگر $x = 1$ را در معادله قرار دهیم، برابری نادرست

$2+3=1$ حاصل می شود. درواقع $x = 1$ ریشه ی معادله ی

$$-\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} = \sqrt{2x-1}$$

است.

در نمونه ی بعدی، به سراغ لگاریتم می رویم. در این جا با

وضع متفاوتی روبرو خواهیم شد.

«ریشه ی از دست رفته!»

نمونه ی ۳. معادله را حل کنید:

$$2 \cdot \log_{\sqrt{x}} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^2 - 3 \log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$$

حل: دامنه ی تعریف معادله را پیدا می کنیم:

$$x > 0, x \neq \frac{1}{4}, x \neq \frac{1}{16}, x \neq 2$$

حال داریم:

$$10 \log_{\sqrt{x}} x + 21 \log_{16x} x - 6 \log_{\frac{x}{2}} x = 0$$

با توجه به:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

داریم:

$$\frac{10}{\log_x \sqrt{x}} + \frac{21}{\log_x 16x} - \frac{6}{\log_x \frac{x}{2}} = 0 \quad (x \neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{10}{1+2 \log_x 2} + \frac{21}{1+4 \log_x 2} - \frac{6}{1-\log_x 2} = 0$$

$t = \log_x 2$ می گیریم، به این معادله می رسیم:

$$\frac{10}{1+2t} + \frac{21}{1+4t} = \frac{6}{1-t}$$

چون

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

خواهیم داشت:

$$(x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \sqrt{1-\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2} = \frac{1}{2}(1+x^4-2x^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

با وجودی که هر دو مقدار $x = 1$ و $x = -1$ در مجموعه ی مقادیرهای قابل قبول برای x (یعنی در دامنه ی معادله) قرار دارند، $x = 1$ ریشه ی خارجی معادله ی ۱ است، زیرا به ازای $x = 1$ ، مقدار سمت چپ معادله ی ۱، برابر $-\frac{\pi}{4}$ می شود و نه

$$\frac{\pi}{4}$$

در این مثال هم دیدیم که صدق کردن مقدار به دست آمده در دامنه کافی نیست، بلکه باید جواب ها را آزمایش کرد.

حال به نمونه ی جالب توجه زیر می پردازیم؛ یک معادله ی رادیکالی با ریشه های سوم. ظاهرآ به توان ۳ رساندن نمی تواند ریشه ی خارجی پدید آورد. به جای هر گونه اضافه گویی، به سراغ مسئله می رویم:

نمونه ی ۵. معادله ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2} \quad (2)$$

حل: مجموعه مقادیرهای قابل قبول x در این معادله (یعنی دامنه ی آن)، عبارت است از تمامی R .

دو طرف معادله ی ۲ را به توان ۳ می رسانیم:

$$x + 3x - 2 + 3\sqrt[3]{x(3x-2)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}) = x - 2 \quad (3)$$

در معادله ی ۳، می توانیم به جای $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}$ ، مقدارش از معادله ی ۱، یعنی $\sqrt[3]{x-2}$ را قرار دهیم. به دست می آید:

$$\sqrt[3]{x(3x-2)}(x-2) = -x$$

دوباره دو طرف را به توان ۳ می رسانیم:

$$x(3x-2)(x-2) = -x^3 \Rightarrow x^3 + x(3x-2)(x-2) = 0$$

$$x(x^3 + 3x^2 - 8x + 4) = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 8x + 4) = 0$$

که از آن جا به دست می آید:

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad (4)$$

و در نتیجه: $x = 0$ و $x = 1$

با آزمایش (امتحان جواب) معلوم می شود که $x = 1$ (با آن که بیرون از دامنه نیست!) یک ریشه ی خارجی است و فقط $x = 0$ قابل قبول است. در این نمونه هم دیدیم که صرف صدق کردن جواب در دامنه کافی نیست!

کار تمام نشده است! حوصله کنید تا ببینیم اشکال کار در کجاست؟ به توان ۳ رساندن، چه بار اول و چه بار دوم، نمی تواند مشکلی به وجود آورد. اما در این بین، یک عمل می ماند که می تواند موجب تردید شود. این عمل به آن جا مربوط می شود که سمت چپ معادله ی ۲ را با سمت راست آن



هر دو جواب به دست آمده در دامنه قرار می گیرند، اما هیچ کدام در معادله ی ۷ صدق نمی کند!

کافی است جواب ها را در معادله ی داده شده آزمایش کنیم:

$$x = 0: 2 \operatorname{Arc} \cos 0 + \operatorname{Arc} \sin(1-0) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 1: 2 \operatorname{Arc} \cos 1 + \operatorname{Arc} \sin 0 = 2(0) + (0) = 0 \neq -\frac{\pi}{2}$$

بنابراین، معادله ی اخیر در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد. به نقش بی بدیل آزمایش کردن جواب های به دست آمده در معادله توجه کنید.

راه دیگری نیز می توان ارائه داد. بدون حل معادله ی

$$2 \operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2}$$

می توان نشان داد که معادله جواب ندارد. توجه کنید که:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arc} \sin(1-x) \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } 0 \leq 2 \operatorname{Arc} \cos x \leq 2\pi$$

حاصل جمع دو عبارت $2 \operatorname{Arc} \cos x$ و $\operatorname{Arc} \sin(1-x)$ در

صورتی برابر $-\frac{\pi}{2}$ خواهد شد که هر دو کمترین مقدار خود را

بگیرند. در حالی که هیچ x ای را نمی توان یافت که هم

$$2 \operatorname{Arc} \cos x = 0 \text{ و } \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2}$$

نمونه های بالا کافی است تا قانع شویم که در پایان حل معادله، جواب را آزمایش کنیم. حوزه ی تعریف (یا مجموعه ی مقدارهای قابل قبول برای مجهول یا به زبان ساده، دامنه) و بیرون نبودن جواب ها از دامنه، ما را از آزمایش جواب هایی که به دست می آوریم، بی نیاز نمی کند.



۱. معادله را حل کنید:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

۲. معادله را حل کنید:

$$\operatorname{Arc} \sin x - \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

۳. آیا این معادله جواب دارد؟

$$\sqrt{|x+5|} - \sqrt{|x+2|} = 1$$

۴. این معادله چند ریشه دارد؟

$$10 \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

عوض کردیم؛ یعنی به جای $\sqrt[3]{x-1}$ ، مقدار $\sqrt[3]{x+1}$ را گذاشتیم. باید در همین جا باشد که ریشه ی خارجی فرصتی برای ورود یافته باشد. همه ی بحث به همین تبدیل ارتباط دارد.

درواقع اگر برابری $a+b=c$ (۵)

را در نظر بگیریم و دو طرف آن را به توان ۳ برسانیم، به این برابری می رسیم:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \quad (6)$$

واضح است، تمام عددهای حقیقی که در تساوی ۵ صدق کنند، در تساوی ۶ هم صادق اند. اما عکس این حکم درست نیست. برابری ۶ به ازای $a=b=-1$ و $c=1$ برقرار است، درحالی که برابری ۵، یعنی $a+b=c$ ، به ازای همین مقدارها برقرار نیست.

نمونه ی ۶. معادله ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب دارد؟

$$2 \operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2} \quad (7)$$

حل: این معادله برای مقدارهایی از x که در شرایط زیر سازگار باشند، معنی دارد:

$$\text{الف) } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ب) } -1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

در نتیجه، دامنه ی معادله (اشتراک الف و ب) عبارت است از:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

حال داریم:

$$2 \operatorname{Arc} \cos x = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \sin(1-x)$$

از دو طرف معادله کسینوس می گیریم:

$$\cos(2 \operatorname{Arc} \cos x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \sin(x)\right)$$

$$2 \cos^2(\operatorname{Arc} \cos x) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arc} \sin(1-x)\right)$$

$$2x^2 - 1 = -\sin(\operatorname{Arc} \sin(1-x))$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 1 = -(1-x) \Rightarrow 2x^2 - 1 = -1 + x$$

پس داریم:

$$2x^2 - x = 0$$

و بنابراین جواب های معادله عبارت اند از:

$$x = 0, x = \frac{1}{2}$$