

ریاضیات گسسته

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

چون نظریهٔ رمزنویسی، احتمال، و آمار (در ریاضیات) و در تحلیل الگوریتمها (در علوم کامپیوتری) نیز دارد. فصول بعدی به ارائهٔ بعضی از مثالهای خاص این کاربردها می‌پردازد.

هنگامی که به این حوزهٔ جذاب ریاضیات وارد می‌شویم، به مسائل بسیاری برخورد می‌کنیم که بیانشان بسیار ساده اما حلشان تا اندازه‌ای مشکل است. مواظب فرمولها باشید! چه استفادهٔ صرف از فرمول، بدون تحلیل مسئله، کاری عبث است. برعکس، در حل مسئله، کلنجار رفتن با مسائل غیرمتعارف یا مسائلی متفاوت با آنچه در گذشته با آنها مواجه شده‌اید، را خوش بدانید. راه‌حلها را بر مبنای جستجوی کامل و جامع خود جستجو کنید، و این کار را بی‌توجه به این که آیا موردی را که مؤلف به دست داده حاصل می‌کند یا خیر، انجام دهید.

۱.۱ - قواعد جمع و ضرب

مطالعهٔ ریاضیات ترکیبی و گسسته‌مان با دو اصل اساسی شمارش، یعنی، قواعد جمع و ضرب، آغاز می‌شود. صورت و کاربردهای اولیهٔ این اصول کاملاً ساده ظاهر می‌شوند. در تحلیل مسائل بفرنجتر، شخص اغلب می‌تواند آنها را به اجزایی تقسیم کند که توان به انجام رساندنشان را با استفاده از این اصول اساسی داشته باشد. در این مسائل، خواستمان بر این است که قابلیت «تجزیه» آنها و پهلوی هم قرار دادن راه‌حلهای جزئی‌مان، تا رسیدن به جواب نهایی، را گسترش دهیم. یکی از طرق صحیح انجام این کار تحلیل و حل مسائل شمارشی گوناگون بسیاری، با توجه به اصول به کار رفته در راه حلشان است، و این رهیافتی است که در این کتاب از آن پیروی می‌کنیم.

با توجه به نقش مهم ریاضیات گسسته در علوم معاصر، به خصوص علوم کامپیوتری هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم به نشر مطالبی در این زمینه گرفت. برای انجام این منظور مقالاتی را که از این پس تحت این عنوان می‌آوریم از کتاب مشهور و مهم

Discrete and Combinatorial Mathematics.

An Applied Introduction. Ralph P. Grimaldi

که یکی از کتابهای مقدماتی این شاخه از ریاضیات است انتخاب کرده‌ایم. امیدواریم مطالعهٔ این مقاله‌ها خواننده را با این شاخه از ریاضیات آشنایی بیشتری دهد.

فصل ۱ - اصول اساسی شمارش

ممکن است شمارش، به نظر اشخاص به عنوان فرایند واضحی بیاید که دانش آموزان هنگامی که برای اولین بار حساب می‌آموزند با آن آشنا می‌شوند. اما از پس آن، چنین به نظر می‌رسد که چون دانش‌آموز به زمینه‌های «مشکلات» ریاضیات، چون جبر، هندسه، مثلثات، و حساب دیفرانسیل و انتگرال رو آورد، توجه کمی به گسترش بیشتر شمارش مبذول می‌شود. نتیجتاً، فصل اول باید اختطاری چند در مورد جدی بودن و مشکل نمودن شمارش «صرف» به دست دهد.

شمارش با حساب پایان نمی‌گیرد، و کاربردهایی در زمینه‌هایی

اصل اول شمارشمان را می توان به طریق زیر بیان کرد:

قاعده جمع. اگر عمل اولی را بتوان به m طریق انجام داد، در حالی که عمل دومی را بتوان به n طریق انجام داد، و دو عمل مزبور نتوانند به طور همزمان انجام گیرند، در این صورت انجام هر یک از آنها را می توان به $m + n$ طریق انجام داد.

توجه داشته باشید زمانی که می گوئیم واقعه ای خاص، به عنوان عمل اول، می تواند به m طریق انجام شود، فرضمان بر این است که m طریق مزبور متمایزند، و غیر این صورت را با گزاره ای بیان می کنیم. این موضوع در سراسر این متن صادق است.

مثال ۱.۱. کتابخانه دانشکده ای دارای ۴۰ کتاب درسی جامعه شناسی و ۵۰ کتاب درسی مربوط به انسان شناسی است. بنا به قاعده مجموع، دانش آموز این دانشکده می تواند، برای آموختن مطالب بیشتری در مورد یکی از این دو موضوع، از میان $90 = 40 + 50$ کتاب درسی، کتاب انتخاب کند. □

مثال ۲.۱. قاعده مزبور را می توان در مورد بیش از دو عمل، البته تا جایی که هیچ جفتی از عملها نتواند به طور همزمان رخ دهد، تعمیم داد. به عنوان نمونه، یک معلم علوم کامپیوتر که، مثلاً، برای هر یک از موارد ای.پی.ال «APL»، بیسیک «BASIC»، فورترون «FORTRAN»، و پاسکال «PASCAL» پنج کتاب مقدماتی دارد، می تواند هر یک از ۲۰ کتاب مزبور را، به دانش آموزی علاقه مند به آموختن زبان برنامه نویسی اولیه ای، سفارش کند. □

مثال ۳.۱. معلم علوم کامپیوتر مثال ۲.۱ دو همکار دارد. یکی از این همکاران دارای سه کتاب درسی در مورد تحلیل الگوریتم است، و دیگری پنج کتاب از این دست دارد. اگر n تعداد کتب مربوط به این موضوع را که معلم مزبور می تواند از آنها امانت بگیرد، نمایش دهد، آنگاه $5 \leq n \leq 8$ ، زیرا در این حالت هر دو همکار مزبور می توانند نسخه هایی از یک نوع کتاب (های) درسی داشته باشند. □

مثال زیر قاعده حاصل ضرب را معرفی می کند.

مثال ۴.۱. مدیر مؤسسه ای، برای اخذ تصمیم در مورد توسعه دستگاههای ماشین آلات، ۱۲ نفر از کارمندان خود را به دو کمیته تخصیص می دهد. کمیته A شامل پنج عضو است و مأمور بررسی نتایج مطلوب ممکن حاصل از چنین توسعه ای است. هفت نفر دیگر، کمیته B، بازتابهای نامطلوب ممکن را مورد رسیدگی قرار می دهند. در صورتی که مدیر مورد بحث پیش از گرفتن تصمیم، مصمم به گفتگو با تنها یکی از اعضای کمیته ای باشد، در این صورت بنا به قاعده جمع ۱۲ کارمند برای انجام چنین کاری موجودند. اما برای بی طرفی بیشتر، بر آن شد که قبل از اخذ تصمیم، با عضوی از کمیته A در دوشنبه، و بعد با عضوی از کمیته B در چهارشنبه گفتگو کند. با استفاده از اصل زیر، در می یابیم که مدیر مزبور می تواند با دو عضو از چنین اعضای به $35 = 5 \times 7$ طریق گفتگو داشته باشد. □

قاعده حاصل ضرب: اگر فرایندی را بتوان به مراحل اول و دوم تقسیم کرد، و اگر m نتیجه ممکن برای مرحله اول و n نتیجه ممکن برای مرحله دوم موجود باشند، در این صورت کل فرایند مزبور را می توان، در ترتیب مشخص شده مورد بحث، به mn طریق انجام داد.

گاهی به این قاعده به عنوان اصل انتخاب «Principle of choice» اشاره می شود.

مثال ۵.۱. کلوب نمایشنامه دانشگاه مرکزی «Central University» آزمونهایی برای نمایشنامه بهار خود انجام می دهد. کارگردان نمایشنامه، بنابه قاعده حاصل ضرب می تواند، از میان شش مرد و هشت زنی که صداهایشان برای نقشهای زن و مرد اصلی نمایشنامه مورد آزمایش قرار گرفته اند، زوج اصلی خود را به $48 = 6 \times 8$ طریق انتخاب کند. □

مثال ۶.۱. در این جا توسیعات گوناگون قاعده مورد بحث را با

بررسی شماره‌ای اتومبیل شامل دو حرف از الفبای انگلیسی و چهار رقم پس از آنها، توضیح داده‌ایم.

(a) اگر هیچ حرف یا رقمی نتواند تکرار شود:

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3,276,000, \dots$$

شماره مختلف ممکن موجودند.

(b) با مجاز بودن تکرار حروف و ارقام:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6,760,000, \dots$$

شماره مختلف ممکن موجودند.

(c) در صورت مجاز بودن تکرار، در چند شماره قسمت (b) هر دو حرف صدا دارند (a, e, i, o, u) و جميع ارقام زوجند (0 رقمی زوج است). □

مثال ۲.۱. در حافظه اصلی کامپیوتری، اطلاعاتی را در سلولهای حافظه ذخیره کرده‌ایم. برای شناختن سلولهای واقع در حافظه اصلی کامپیوتر، به هر سلول نامی یکتا موسوم به آدرس «address» تخصیص داده‌ایم. آدرس مزبور در بعضی از کامپیوترها به صورت فهرست مرتبی از هشت نماد نمایش داده شده است، که هر نماد آن یکی از بیتها «bits» ی ۰ یا ۱ است. فهرست هشت بیتی مزبور به بایت «byte» موسوم است. با استفاده از قاعده حاصل ضرب، در می‌یابیم که

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$$

بایت از چنین بایتهایی موجودند. در نتیجه، برای سلولهای حافظه ۲۵۶ آدرس داریم که در آنها می‌توان اطلاعات را ذخیره کرد.

بعضی از ماشینها (از جمله خانواده PDP ۱۱) آدرسهای دوبایتی را به کار می‌برند. آدرسی چنین از دو بایت متوالی، یا ۱۶ بیت متوالی تشکیل شده است، بنابراین ذخیره کردن

(۱) خانواده‌های کامپیوترهای PDP 11 محصولی از Digital Equipment Corporation است.

$$256 \times 256 = 2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 65,536$$

تکه اطلاعات در آنها امکان‌پذیر است. کامپیوترهای دیگر (از جمله IBM PC/RT)^۲ از دستگاههای آدرس چهار بیتی استفاده می‌کنند.

در این حالت، برای ذخیره اطلاعات در سلولهای حافظه ماشین مزبور:

$$2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{32} = 4,294,967,296$$

آدرس در دسترس است.

مثال ۸.۱. گاهی لازم می‌آید که در حال مسأله‌ای اصول

شمارش متفاوت چندی را ترکیب کنیم. در این حالت در می‌یابیم که هر دو قاعده جمع و ضرب برای به دست آوردن پاسخ مورد نیازند.

در صورتهای خاصی از زبان برنامه‌نویسی بیسیک، نام یک

متغیر عبارت از حرفی منفرد (A, B, C, ...) یا حرفی منفرد پیش از

رقمی منفرد است. به علت این که کامپیوتر تمایزی بین حروف بزرگ

و کوچک قائل نمی‌شود، A و a، چنان‌که EV و ev، نام متغیر

یکسانی در نظر گرفته می‌شوند. بنا به قاعده حاصل ضرب

$$26 \times 10 = 260$$

نام متغیر شامل حرفی پیش از یک رقم موجودند، و به علت این که

۲۶ نام متغیر شامل حرفی منفرد وجود دارند، بنا به قاعده جمع، در

زبان برنامه‌نویسی مزبور، کلاً

$$26 + 260 = 286$$

نام متغیر موجودند. □

۲.۱- جایگشتها

اکنون در ادامه بررسی کاربردهای قاعده حاصل ضرب، به

شمارش ترتیبات اشیای متمایز در ترتیبی مشخص، رو می‌آوریم.

عموماً اشیای مورد نظر را واقع در سطر، یا خطی مستقیم، در نظر

می‌گیریم، و این کار به ترتیب خطی معینی می‌انجامد. این ترتیبات را

اغلب جایگشت «Permutation» می‌نامیم، روشهای سیستماتیک

(۲) پروسور IBM PC/RT توسط International Business Machines Corporation ساخته شده است.

(که با $n!$ نمایش داده می شود.) با

$$0! = 1 \text{ و}$$

به ازای $n \geq 1$ $n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (2)(1)$ تعریف می شود.

به این ترتیب درمی یابیم که

$$1! = 1 \text{ و } 2! = 2 \text{ و } 3! = 6 \text{ و } 4! = 24 \text{ و } 5! = 120$$

علاوه بر این، به ازای هر $n \geq 0$

$$(n+1)! = (n+1)(n)!$$

با استفاده از نماد فاکتوریل، درمی یابیم که پاسخ مسأله ۹.۱ می توان به صورتی فشرده تر، به طریق زیر بیان کرد:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 =$$

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{5!}$$

تعریف ۲.۱. با معلوم بودن مجموعه ای از n شیء متمایز، هر ترتیب (خطی) از آنها به جایگشت «Permutation» موسوم است.

با آغاز از حرف a ، b ، c ، درمی یابیم که شش طریق در ترتیب دادن این حروف موجودند:

در صورتی که به ترتیب تنها دو حرف در هر بار علاقه مند باشیم، شش جایگشت از چنین جایگشت هایی دو اندازه ای، از مجموعه مورد بحث وجود دارند: ab ، ba ، ac ، ca ، bc ، cb

در حالت کلی، اگر شیء متمایز، نمایش داده شده با $a_1, a_2, \dots, a_n$ موجود باشند، و r عددی صحیح باشد، یا $1 \leq r \leq n$ ، در این صورت بنا به قاعده حاصل ضرب، تعداد جایگشت های r اندازه ای n شیء مزبور عبارت است از:

$$(n) \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) =$$

مکان	مکان	مکان	مکان
اول	دوم	سوم	۱ ^{ام}

$$(n) \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times$$

$$\frac{(n-r)(n-r-1) \dots (2)(1)}{(n-r)(n-r-1) \dots (2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

چندی را برای انجامشان مطرح می کنیم. کار را با مثالی نمونه آغاز می کنیم.

مثال ۹.۱. در کلاسی با ۱۰ دانش آموز باید پنج نفر برای گرفتن عکس در ردیفی بنشینند. چند نوع از چنین ترتیبیاتی خطی ممکن اند؟

کلمه کلیدی این مسأله ترتیب «arrangement» است، که اهمیت مرتب کردن را مشخص می کند. اگر A ، B ، C ، $\dots$ ، I ، J ده دانش آموز مورد بحث را نمایش دهند، در این صورت $BCEFI$ ، $CEFIB$ و $ABCFG$ سه مورد از چنین ترتیبیاتی هستند، هر چند دو مورد اول شامل پنج دانش آموز یکسان باشند.

برای پاسخ دادن به سؤال مورد نظر، مکانها و تعداد ممکن دانش آموزانی را که برای پر کردن هر مکان، می توانیم از آنها انتخاب کنیم، در نظر می گیریم. پر کردن یک مکان مرحله ای از فرایندمان است.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

مکان پنجم مکان چهارم مکان سوم مکان دوم مکان اول

در سطر فوق هر یک از ۱۰ دانش آموز می تواند مکان اول را اشغال کند. به علت این که در این حالت، تکرار ممکن نیست، می توان برای پر کردن مکان دوم تنها یکی از نه دانش آموز باقیمانده را اختیار کرد. با ادامه دادن به این مسیر، تنها شش دانش آموز را برای پر کردن مکان پنجم و نهایی پیدا می کنیم. این کار، کلاً ۲۴۰ و ۳۰ ترتیب ممکن انتخاب پنج دانش آموز از کلاسی ده نفری را به دست می دهد.

در صورتی که مکانهای مورد بحث به ترتیب مقابل $(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6)$ پر شوند نیز همین پاسخ را به دست می آوریم. در صورتی که ترتیب در نظر گرفته شده سومی، اولی، چهارمی، پنجمی، و دومی باشد (یعنی، ابتدا مکان سوم، بعد مکان اول، سپس مکان چهارم، چهارم مکان پنجم، و بالاخره مکان دوم پر شود)، در این صورت پاسخ $10 \times 8 \times 7 \times 6 \times 9$ است. □

تعریف ۱.۱. به ازای عدد صحیح $n \geq 0$ ، فاکتوریل «factorial» n

جایگشت داریم. این جایگشتها را در جدول ۱.۱ (b) فهرست کرده‌ایم. جدول ۱.۱ آشکار می‌کند که در مورد هر ترتیبی که، به ازای آن، L های مزبور تمیز ناپذیرند، یک جفت جایگشت با L های متمایز متناظر است.

نتیجتاً (تعداد ترتیبات نمادهای A, B, L, L) $2 \times (L, L, A, B)$
 (تعداد جایگشتهای نمادهای A, B, L_1, L_2)
 و پاسخ مسأله اصلی یافتن جمیع ترتیبات حروف $BA11$ ،
 $12 = 4! / 2$ است. □

جدول ۱.۱

$A B L L$	$A B L_1 L_2$	$A B L_2 L_1$
$A L B L$	$A L_1 B L_2$	$A L_2 B L_1$
$A L L B$	$A L_1 L_2 B$	$A L_2 L_1 B$
$B A L L$	$B A L_1 L_2$	$B A L_2 L_1$
$B L A L$	$B L_1 A L_2$	$B L_2 A L_1$
$B L L A$	$B L_1 L_2 A$	$B L_2 L_1 A$
$L A B L$	$L_1 A B L_2$	$L_2 A B L_1$
$L A L B$	$L_1 A L_2 B$	$L_2 A L_1 B$
$L B A L$	$L_1 B A L_2$	$L_2 B A L_1$
$L B L A$	$L_1 B L_2 A$	$L_2 B L_1 A$
$L L A B$	$L_1 L_2 A B$	$L_2 L_1 A B$
$L L B A$	$L_1 L_2 B A$	$L_2 L_1 B A$

(a)

(b)

مثال ۱۲.۱. اکنون، با استفاده از ایده مطرح شده در مثال ۱۱.۱، به بررسی ترتیبات جمیع حروف PEPPER می‌پردازیم. به ازای هر ترتیبی که در آن P ها متمایز نیستند، $6 = 3!$ ترتیب با P های متمایز موجودند. به عنوان مثال

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ و $P_1 P_3 P_2 P_4 P_5 P_6$ و $P_2 P_1 P_3 P_4 P_5 P_6$
 $P_2 P_3 P_1 P_4 P_5 P_6$ و $P_3 P_1 P_2 P_4 P_5 P_6$ و $P_3 P_2 P_1 P_4 P_5 P_6$

چون اندیشه‌های P ها را حذف کنیم، جمیعاً متناظر با PEPPER اند.

تعداد مورد بحث را با $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم. به ازای $r = 0$ ،
 $P(n, 0) = 1 = n! / (n - 0)!$

بنابراین:

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

که در آن $0 \leq r \leq n$. مثال ۹.۱ حالت خاصی از این مطلب است، که در آن $n = 10$ ، $r = 5$ و $240 = 3!$ و $P(10, 5) = 3!$. چون جایگشت جمیع n شیء واقع در مجموعه مورد بحث را در نظر بگیریم، $r = n$ را داریم و درمی‌یابیم که

$$P(n, n) = n! / 0! = n!$$

تعداد جایگشتهای r اندازه‌ای، با $0 \leq r \leq n$ ، از مجموعه n شیء عبارت است از:

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

اما، در صورت مجاز بودن تکرار، و بنا به قاعده حاصل ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \geq 0$ موجودند.

مثال ۱.۱. تعداد جایگشتهای حروف واقع در کلمه COMPUTER ۸! است.

اگر تنها چهار حرف از آن را به کار ببریم، تعداد جایگشتها (ی به اندازه چهار) عبارت است از:

$$P(8, 4) = 8! / (8 - 4)! = 8! / 4! = 1680$$

و اگر تکرار حروف مجاز باشد، تعداد دنباله‌های ۱۲ حرفی ممکن $10^4 = 10000$ است. □

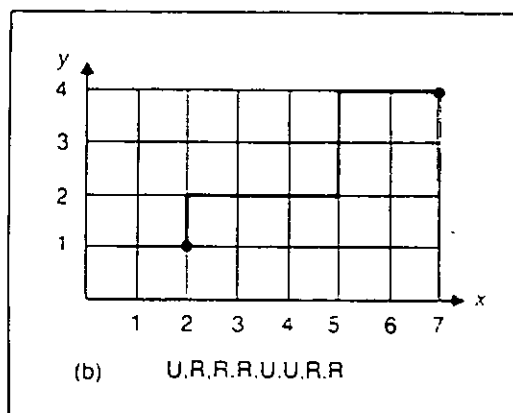
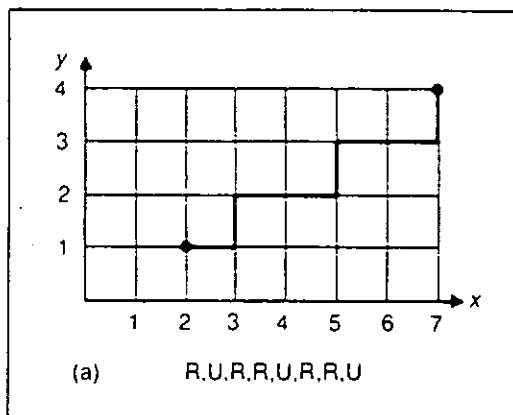
مثال ۱۱.۱. برخلاف مثال ۱۰.۱. تعداد ترتیبات حروف کلمه $BA11$ ، ۱۲، نه $4!$ ، یا 24 ، است. دلیل آن این است که در این مورد، برای انجام ترتیب، چهار حرف متمایز نداریم. برای به دست آوردن ۱۲ ترتیب مورد بحث، می‌توانیم آنها را چنانچه در جدول ۱.۱ (a) نشان داده شده است، فهرست کنیم.

اگر دو L مزبور را به صورت L_1 و L_2 متمایز کنیم، می‌توانیم اندیشه‌های قبلی‌مان، در مورد جایگشتهای اشیای متمایز، را به کار ببریم، در این صورت، با چهار نماد متمایز A, B, L_1, L_2 ، $24 = 4!$

می‌رود، تشکیل شده است. خطوط پرننگ واقع در شکل ۱.۱ دو مسیر از چنین مسیرهایی را نشان می‌دهند.

در زیر هر مسیر شکل ۱.۱ مراحل فردی مربوط به آن را فهرست کرده‌ایم. به عنوان مثال، در قسمت (a) ی شکل مزبور، فهرست U, R, R, U, R, R, U, R

مشخص می‌کند که با آغاز از نقطه $(1, 2)$ ، ابتدا یک واحد به راست $[(1, 2) \rightarrow (2, 2)]$ ، سپس یک واحد به بالا $[(2, 2) \rightarrow (2, 3)]$ ، پس از آن دو واحد به راست $[(2, 3) \rightarrow (3, 3)]$ ، و غیره حرکت کرده تا به نقطه $(7, 4)$ رسیده‌ایم. مسیر مزبور شامل ۵، R برای حرکات به راست و ۳، U برای حرکات به بالاست.



شکل ۱.۱

مسیر واقع در قسمت (b) ی شکل مورد بحث نیز از ۵، R و ۳،

علاوه براین، چون E ها متمایز شوند، جفت جایگشت $P_1 E_2 P_3 P_4 P_5 E_6 R, P_1 E_1 P_2 P_3 P_4 E_5 R$ متناظر با ترتیب $P_1 E_2 P_3 P_4 E_5 R$ اند نتیجه:

(تعداد ترتیبات حروف) $(2!)(3!)(PEPPER)$
 (تعداد جایگشت‌های نمادهای $P_1, E_1, P_2, P_3, E_4, P_5$) $= (R_1, E_2, P_3, P_4, E_5, P_1)$
 بنابراین تعداد ترتیبات حروف PEPPER عبارت است از:

$$6! / (2!3!) = 60$$

پیش از بیان اصل عمومی ترتیبات با نمادهای مکرر، مایل به خاطرنشان این نکته‌ایم که در دو مثال پیشین مان، نوع جدیدی از مسأله را، با ربط آن به اصول شمارش قبلی، حل کردیم. این کار عملی متعارف در ریاضیات در حالت عمومی است، و غالباً در استخراج فرمولهای گسسته و ترکیباتی به کار می‌رود.

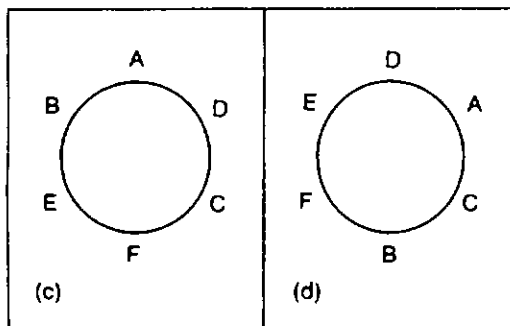
در حالت عمومی، اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم، ... و n_r شیء از نوع r ام، با

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

موجود باشند، در این صورت $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارند. (اشیای از یک نوع تمایزناپذیرند).

مثال ۱۳.۱. MASSASAUGA مار سمی قهوه‌ای و سیاه از خزنده‌های بومی آمریکای شمالی است. با ترتیب جمع حروف $\frac{10!}{4!1!1!1!1!1!} = 25,200$ ، در می‌یابیم که MASSASAUGA ترتیب ممکن موجودند. در میان آنها $\frac{10!}{3!1!1!1!1!1!} = 840$ ترتیب وجود دارند که در آنها جمع چهار A با هم‌اند. برای به دست آوردن نتیجه آخر، جمع ترتیبات هفت‌نماد AAAA (یک‌نماد S، S، S، S، M، U، G را در نظر گرفته‌ایم. □

مثال ۱۴.۱. تعداد مسیرهای (پلکانی) واقع در صفحه xy از $(2, 1)$ به $(7, 4)$ را بیابید که در آنها هریک چنین مسیری از مرحله‌ی فردی، که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U)



شکل ۲.۱

چون در مورد غالب وضعیات جدید سعی در ارتباط دادن با مفاهیم گذشته می‌کنیم. با ملاحظه شکل‌های ۲.۱ (a) و ۲.۱ (b)، و با آغاز از بالای دایره و حرکت ساعتگرد، ترتیبات خطی متمایز ABEFCD و CDABEF را که متناظر با ترتیب دوری یکسانی هستند، فهرست می‌کنیم. علاوه بر این دو، چهار ترتیب خطی دیگر - EFCDAB ، EFCDAB ، DABEFC ، BEFCDA و FCDABE - پیدا می‌کنیم که متناظر با همان ترتیب دوری واقع در (a) یا (b) اند. بنابراین، از آن‌جا که هر ترتیب دوری متناظر با شش ترتیب خطی است، داریم:

$$6 \times (\text{تعداد ترتیبات دوری } A, B, \dots, F) =$$

$$6! = (\text{تعداد ترتیبات خطی } A, B, \dots, F)$$

$$120 = 6! / 6 = 5! = \text{تعداد ترتیب از } A, B, \dots, F$$

نتیجتاً

حول سیزگردمان موجودند. □

مثال ۱۷.۱. اکنون فرض می‌کنیم که شش فرد مثال ۱۶.۱ شش زوجند و A، B، و C زنهای مربوطه‌اند. می‌خواهیم این شش فرد را حول سیزگردی چنان قرار دهیم که زن و مردها یک در میان باشند. (بار دیگر، ترتیبات را، در صورتی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان در نظر می‌گیریم.)

پیش از حل این مسأله، مثال ۱۶.۱ را با روش دیگری که به حل مسأله حاضر کمک می‌رساند، حل کنیم.

اگر A را، چنان که در شکل ۲.۱ (a) نشان داده‌ایم، پشت میز

U تشکیل شده است. در حالت عمومی، کل سفر از (۱، ۲) به (۴، ۷) به $5 = 7 - 2$ حرکت افقی به راست و $3 = 4 - 1$ حرکت قائم به بالا نیازمند است. نتیجتاً، هر مسیر متناظر با فهرستی از ۵، R و ۳، U است، و جواب مربوط به تعداد مسیرها به عنوان تعداد ترتیبات ۵، R و ۳، U پدیدار می‌شود، که $\frac{8!}{5!3!} = 56$ است. □

مثال ۱۵.۱. اکنون به عملی مجردتر دست می‌زنیم و اثبات می‌کنیم که اگر n و k اعدادی صحیح، با $n = 2k$ ، باشند، در این صورت $n! / 2^k$ عددی صحیح است. این موضوع، از آن‌جا که استدلالمان متکی بر شمارش است، مثالی از اثبات ترکیباتی است.

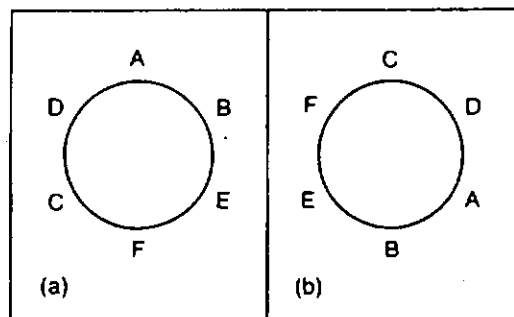
n نماد $x_1, x_2, \dots, x_k, x_k, \dots, x_k$ را در نظر می‌گیریم. تعداد طرقتی که طبق آنها می‌توانیم جمع این $n = 2k$ نماد را مرتب کنیم عددی صحیح است یعنی:

$$\frac{n!}{2!2! \dots 2!} = \frac{n!}{2^k}$$

□

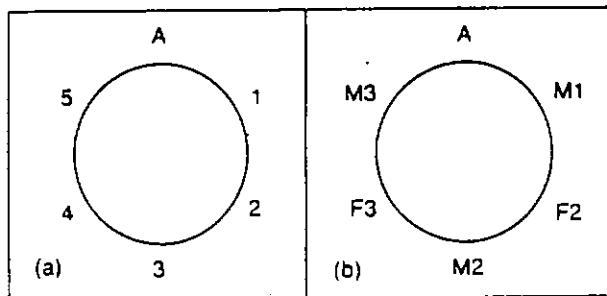
سرانجام، آنچه را تاکنون مطرح کرده‌ایم، در حالتی به کار ببریم که ترتیبات آن دیگر خطی نیستند.

مثال ۱۶.۱. اگر شش فرد، مشخص شده به صورت A، B، ...، F، دور میز گردی نشسته باشند، چند ترتیب دوری متفاوت ممکنند، در صورتی که ترتیبات را، هنگامی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان به شمار آوریم؟ (در شکل ۲.۱. ترتیبات (a) و (b) یکسان در نظر گرفته می‌شوند، در حالی که (b)، (c)، و (d) سه ترتیب متمایزند.)



برای حل مسأله جدید زن و مردهای یک درمیان، روش نشان داده شده در شکل ۳.۱ (b) را در نظر می‌گیریم. A (یکی از زن‌ها) را، چون قبل، مکان می‌دهیم. مکان بعدی، ساعتگرد از A، نشان شده با M_1 (مرد اول)، می‌تواند به سه طریق پر شود. با ادامه دادن ساعتگرد از A، مکان F_1 (زن دوم) را می‌توان به دو طریق پر کرد. با حرکت به این طریق، و با قاعده حاصل ضرب $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 = 12$ طریق موجودند که در آنها شش فرد مزبور را می‌توان، بدون این که هیچ دو مرد یا دو زنی کنار یکدیگر واقع شوند، گرد میز نشانند. □

مورد بحث قرار دهیم، پنج محل (ساعتگرد از A) برای پر شدن باقی می‌مانند. پر کردن مکانهای مزبور با B، C، ...، F به روشی خطی است، و این کار را می‌توان به $5! = 120$ انجام داد.



شکل ۳.۱

تفریح اندیشه ۱



کلمه چهار حرفی ستادول انگلیسی‌ای را با این معلومات بیابید که با هر یک از چهار کلمه زیر دو حرف مشترک، اما نه در مکان درست، داشته باشد:

EGIS

PLUG

LOAM

ANew

جواب در صفحه ۹۶

ادب ریاضی

در پنجاه و یک سالگی لاگرانژ این احساس را داشت که به پایان قدرت خویش رسیده است. وضع او مثال بارزی از ایجاد ناتوانی کامل اعصاب در نتیجه کار فکری ممتد و مداوم بوده است.

پاریسیها او را هنگام معاشرت و مصاحبت آرام و مطبوع می‌دیدند، لیکن هرگز پیشقدم مباحثه و اقدامی نمی‌شد. بندرت حرف می‌زد و غالباً گنج و مبهوت و غوطه‌ور در مایخولیایی عمیق به نظر می‌رسید. در اجتماعات دانشمندان که در منزل لاوازیه «Lavoisier» تشکیل می‌شد غالباً در کنار پنجره‌ای می‌ایستاد و به خارج می‌نگریست و پشت به مهمانانی می‌کرد که برای ادای احترام به او آمده بودند. غالباً اظهار می‌داشت که آتش شور، وی خاموش شده و ذوق ریاضیات راز دست داده است. هنگامی که به او اطلاع می‌دادند که فلان ریاضی‌دان به فلان تجسس مهم پرداخته است جواب می‌داد: «چه خوب شد، من این کار را شروع کرده بودم و مجبور نیستم آنرا خاتمه دهم.»

ریاضی‌دانهای نامی - حسن صفاری