

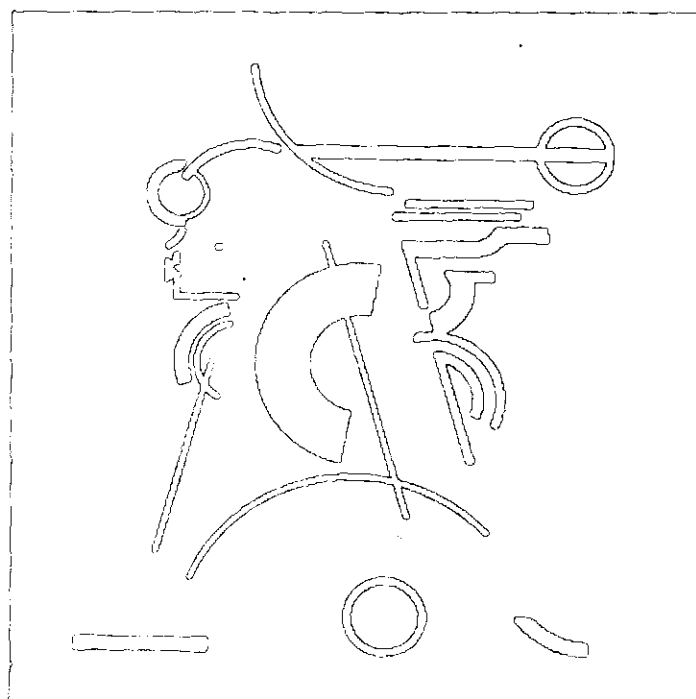
ریاضیات گسسته

قسمت پنجم

هم ارزی منطقی قوانین منطق

(سوّم ریاضی و پیش دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی پور



p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$p \rightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱

◀ جدول ۱

ملاحظه می‌کنیم که ارزشهای راستی $\bar{p} \vee q$ و $p \rightarrow q$ دقیقاً یکسان‌اند. □

این وضعیت به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۱

به دو گزاره S_1 و S_2 منطقاً هم‌ارز می‌گوییم، و $S_1 \Leftrightarrow S_2$ می‌نویسیم، اگر جدولهای ارزش S_1 و S_2 دقیقاً یکسان باشند.

به عنوان نتیجه‌ای از این مفهوم، ملاحظه می‌شود که می‌توانیم رابط استلزام را بر حسب نقیض و ترکیب فصلی بیان کنیم. به همین ترتیب، از نتیجه جدول ۲ داریم:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

با استفاده از هم‌ارزی منطقی جدول ۱، می‌توان

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{p})$$

را نیز نوشت. نتیجتاً، اگر چنین اختیار کنیم، می‌توانیم رابطهای

$\rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ را از گزاره‌های مرکبمان کنار بگذاریم.

با بررسی جدول ۳، درمی‌یابیم که نقیض، همراه با رابطهای

در جمیع زمینه‌های ریاضیات نیاز به دانستن این داریم که چه وقت موجودات مورد بررسیمان مساوی یا اساساً یکسانند، برای مثال، در حساب و جبر می‌دانیم که دو عدد حقیقی و ناصفر، زمانی که دارای یک مقدار و یک علامت باشند مساوی‌اند. در نتیجه، به ازای دو عدد حقیقی و ناصفر x ، y اگر $|x| = |y|$ و $xy > 0$ داریم $x = y$ ، و برعکس (یعنی، اگر $x = y$ ، آنگاه $|x| = |y|$ و $xy > 0$). در هندسه، هنگام سروکار داشتن با مثلثها، مفهوم هم‌نهشتی رخ می‌دهد. در این جا مثلث ABC و مثلث DEF هم‌نهشت‌اند اگر، برای مثال، اضلاع نظیر مساوی داشته باشند - یعنی، طول ضلع AB = طول ضلع DE، طول ضلع BC = طول ضلع EF، و طول ضلع CA = طول ضلع FD.

به مطالعه منطقی‌مان غالباً به صورت جبر گزاره^۱ (در مقابل جبر اعداد حقیقی) اشاره می‌شود. در این جبر، برای مطرح کردن این منظور که چه زمانی دو گزاره اساساً یکسان‌اند، از جداول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. کارمان را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.

در جدول ۱ جداول ارزش گزاره‌های $\bar{p} \vee q$ و $p \rightarrow q$ را داریم. در این جدول

◀ جدول ۴

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰

۸ و ۷، کل مواردی است که برای جانشینی یای مانع^۲، $\vee$ ، به آنها نیاز داریم. درواقع، حتی می‌توان ۸ یا ۷ را حذف کرد. اما، به‌خاطر کاربردهای مورد بررسی، به ۸ و ۷ نیز نقیض نیازمندیم.

◀ جدول ۲

در جدول ۴، جدولهای ارزش گزاره‌های $\overline{p \vee q}$ ، $\overline{p \wedge q}$ ، $\overline{p \vee q}$ و $\overline{p \wedge q}$ ستونهای ۴ و ۵ جدول فوق‌آشکار می‌کنند که $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p \vee q}$ ؛ ستونهای ۷ و ۸ آن نشان می‌دهند که $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p \wedge q}$. این نتایج به قوانین دومورگان^۴ معروف‌اند، و شبیه قانون آشنای اعداد حقیقی $-(a+b) = (-a) + (-b)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

هستند که نشان می‌دهد منفی یک مجموع مساوی مجموع منفیهای جمعه‌وندهای آن است. اما، در این مورد تفاوتی قاطع ظاهر می‌شود: نقیض ترکیب عطفی دو گزاره^۵ p ، q به ترکیب فصلی نقیضه‌ایشان، $\overline{p}$ ، $\overline{q}$ منجر می‌شود، درحالی که نقیض ترکیب فصلی p ، q منطقاً هم‌ارز ترکیب فصلی نقیضه‌های $\overline{p}$ ، $\overline{q}$ است. □

◀ جدول ۳

در حساب اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب هردو در اصل موسوم به قانون توزیع‌پذیری ضرب روی جمع، آمده‌اند؛ به ازای هر سه عدد حقیقی a ، b ، c ،

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
۰	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

مثال بعدی نشان می‌دهد که قانونی مشابه برای گزاره‌ها وجود دارد. قانون وابسته^۶ دومی نیز برای گزاره‌ها موجود است که مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد.

مثال ۳.

جدول ۵ شامل جدولهای ارزش گزاره‌های $p \wedge (q \vee r)$ ،

اکنون از مفهوم هم‌ارزی منطقی در بررسی بعضی از ویژگیهای مهمی که در جبر گزاره‌ها برقرارند استفاده می‌کنیم.

به ازای هر دو عدد حقیقی a ، b ، می‌دانیم که $-(a+b) = (-a) + (-b)$. آیا نتیجه قابل مقایسه‌ای برای گزاره‌های p ، q موجود است؟

مثال ۲.

◀ جدول ۵

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

از این جدول نتیجه می‌شود که به ازای گزاره‌های دلخواه p, q و r ،

قانون توزیعپذیری $\wedge$ روی $\vee$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

قانون توزیعپذیری $\vee$ روی $\wedge$

$$\boxed{} p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

قانون توزیعپذیری دوم مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد. یعنی، راست نیست که به ازای جمیع اعداد حقیقی a, b, c ،

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

به عنوان نمونه، به ازای $a=2, b=3, c=5$ ،
 $a + (b \times c) = 17$ اما $(a + b) \times (a + c) = 35$.

پیش از ادامه مطلب، توجه می‌کنیم که، در حالت عمومی، اگر S_1 و S_2 دو گزاره باشند و $S_1 \Leftrightarrow S_2$ صادق باشد، آنگاه S_1 و S_2 باید دارای جداول ارزش یکسان باشند و $S_1 \Leftrightarrow S_2$ هنگامی که S_1 و S_2 گزاره‌هایی منطقاً هم‌ارز باشند (یعنی، $S_1 \Leftrightarrow S_2$ ، آنگاه گزاره مرکب $S_1 \Leftrightarrow S_2$ صادق است. تحت این شرایط، این نیز راست است که $\bar{S}_1 \Leftrightarrow \bar{S}_2$ و $S_1 \Leftrightarrow \bar{S}_2$ صادق است.

اگر S_1, S_2 و S_3 گزاره‌هایی باشند که در آنها $S_1 \Leftrightarrow S_2$ و $S_2 \Leftrightarrow S_3$ ، آنگاه $S_1 \Leftrightarrow S_3$ هنگامی که دو گزاره S_1 و S_2 منطقاً هم‌ارز نباشند، می‌توانیم برای مشخص کردن این وضعیت بنویسیم $S_1 \not\Leftrightarrow S_2$.

با استفاده از مفاهیم هم‌ارزی منطقی، صادق، و کاذب، فهرست قوانین زیر را برای جبر گزاره‌ها بیان می‌کنیم.

قوانین منطق

به ازای هر گزاره p, q, r

$$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p \quad ۱.$$

قانون نقیض دوگانه^۵

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad ۲.$$

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

قوانین دومورگان

$$\begin{aligned} ۳. \quad p \vee q &\Leftrightarrow q \vee p \\ p \wedge q &\Leftrightarrow q \wedge p \end{aligned}$$

قوانین تعویضپذیری^۶

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad ۴.$$

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

قوانین شرکتپذیری^۷

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad ۵.$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

قوانین توزیعپذیری^۸

$$p \vee p \Leftrightarrow p \quad ۶.$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

قوانین خودنمایی^۹

$$p \vee F \Leftrightarrow p \quad ۷.$$

$$p \wedge T \Leftrightarrow p$$

قوانین همانی^{۱۰}

$$p \vee \bar{p} \Leftrightarrow T \quad ۸.$$

$$p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow F.$$

قوانین تقابل^{۱۱}

$$p \vee T \Leftrightarrow T \quad ۹.$$

$$p \wedge F \Leftrightarrow F.$$

قوانین سلطه^{۱۲}

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \quad ۱۰.$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

قوانین جذب^{۱۳}

برای اثبات جمیع مطالب فوق، می‌توانیم، همانگونه که در مثالهای ۲ و ۳ انجام دادیم، جدولهای ارزش آنها را نوشته به مقایسه ارزشهای راستی هر حالت پردازیم. اما، جمیع قوانین فوق، غیر از قانون نقیض دوگانه، به طور طبیعی به صورت جفت رخ می‌دهد. این مطلب به مفهوم زیر دلالت می‌کند.

تعریف ۲

اگر S گزاره‌ای (تنها شامل $\neg, \wedge, \vee$) باشد، دوگان^{۱۴} S ، به نمایش S^d ، گزاره‌ای است که با قراردادن $\vee$ ($\wedge$) به جای هر ظهور $\wedge$ ($\vee$) در S و قراردادن (T, F) به جای هر ظهور (F, T) در آن به دست می‌آید.

گزاره‌های $p \wedge \bar{p}$ و $p \vee \bar{p}$ دوگان یکدیگرند، همانگونه که

به جای هر ظهور $q, t \rightarrow u$ را قرار دهیم. اکنون، قاعده جانشینی مذکور صادق

$$P_T: \overline{(r \wedge s)} \vee (t \rightarrow u) \leftrightarrow [\overline{(r \wedge s)} \wedge \overline{(t \rightarrow u)}]$$

و هم ارزی منطقی

$$P_T: \overline{(r \wedge s)} \vee (t \rightarrow u) \Leftrightarrow (\overline{r \wedge s}) \wedge \overline{(t \rightarrow u)}$$

را به دست می دهد.

(b) قانون دوم سلطه بر این است که، به ازای هر گزاره p ، گزاره مرکب

$$P: (p \wedge F.) \leftrightarrow F.$$

صادق است. اگر به جای p گزاره دلخواه $[(q \vee r) \rightarrow s]$ را قرار دهیم، آنگاه همان قاعده اول جانشینی به صادق جدید

$$P_1: [(q \vee r) \rightarrow S] \wedge F. \leftrightarrow F.$$

و هم ارزی منطقی

$$P_1: [(q \vee r) \rightarrow S] \wedge F. \Leftrightarrow F.$$

منجر می شود. $\square$

مثال ۵.

(a) برای کاربردی از قاعده دوم جانشینی، فرض می کنیم P گزاره مرکب $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ را نمایش دهد. از آنجا که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ (چنان که در مثال ۱ و جدول ۱ آمده است)، اگر P_1 نمایشگر گزاره مرکب $(\overline{p} \vee q) \rightarrow r$ باشد آنگاه $P_1 \Leftrightarrow P$.

(b) اکنون گزاره مرکب $p \rightarrow (p \vee q)$ را مطرح می کنیم. از آنجا که $\overline{p} \Leftrightarrow p$ ، گزاره مرکب $P_1: p \rightarrow (\overline{p} \vee q)$ از p با قراردادن $\overline{p}$ به جای ظهور دوم p (اما نه ظهور اول آن) استخراج می شود. قاعده دوم جانشینی همچنان بر این است که $P_1 \Leftrightarrow P$. (توجه داشته باشید که $P_T: \overline{p} \rightarrow (\overline{p} \vee q)$ ، که از قراردادن $\overline{p}$ به جای هر دو ظهور p استخراج شده است، نیز منطقاً هم ارز P است.) $\square$

مثال بعدی مبرهن می کند که چگونه می توان مفهوم هم ارزی منطقی را همراه با قوانین منطق و قواعد جانشینی به کار برد.

مثال ۶.

گزاره مرکب $(p \vee q) \rightarrow r$ را نقیض و ساده کنید.

۱. $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\overline{p \vee q}) \vee r$ (بنا به قاعده اول جانشینی، زیرا $(\overline{s} \vee t) \Leftrightarrow (s \rightarrow t)$ به ازای هر دو گزاره s, t

گزاره های $p \vee T$ و $p \wedge F$ چنین اند.

اکنون به بیان و استفاده از قضیه ای، بدون اثبات آن، می پردازیم. اما، در آینده نتیجه ای را که در اینجا آشکار کرده ایم به اثبات می رسانیم.

قضیه ۱

(اصل دوگانگی)^{۱۵} فرض می کنیم s, t گزاره هایی، چنان که در تعریف ۲ آمده، باشند. اگر $s \Leftrightarrow t$ آنگاه $s^d \Leftrightarrow t^d$.

به عنوان نتیجه ای از این اصل، می توان قوانین ۲ تا ۱۰ فهرستمان را با اثبات یکی از قوانین هر جفت و بعد به استناد اصل مزبور، به اثبات رساند.

می توان با استفاده از قواعد جانشینی^{۱۶} زیر، هم ارزیهای منطقی بسیار دیگری را استخراج کرد.

۱. فرض می کنیم P گزاره مرکبی را که صادق است نمایش دهد. اگر p گزاره ای باشد که در P ظاهر می شود و به جای هر ظهور p گزاره یکسان q را قرار دهیم، آنگاه گزاره مرکب P_1 نیز صادق است.

۲. فرض می کنیم P گزاره مرکبی باشد که گزاره p در آن ظاهر می شود، و فرض می کنیم q گزاره ای چنان باشد که $p \Leftrightarrow q$. فرض می کنیم در P به جای p, q را قرار دهیم. این جانشینی گزاره مرکب P_T را به دست می دهد. تحت این شرایط $P_1 \Leftrightarrow P_T$.

این قواعد را در مثالهای زیر توضیح می دهیم.

مثال ۴.

(a) از قانون اول دومورگان می دانیم که، به ازای هر دو گزاره p, q ، گزاره مرکب

$$P: \overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

صادق است. چون به جای هر ظهور $p, r \wedge s$ را قرار دهیم، از قاعده اول جانشینی نتیجه می شود که

$$P_1: \overline{(r \wedge s)} \vee q \Leftrightarrow [(\overline{r \wedge s}) \wedge q]$$

نیز صادق است. در توسیع یک مرحله دیگر این نتیجه، می توانیم

صادق است.

است. ستونهای ۵ و ۶، جدول مزبور نشان می‌دهند که

$$(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\bar{p} \rightarrow \bar{q})$$

گزاره $q \rightarrow p$ عکس^{۱۸} $p \rightarrow q$ نامیده می‌شود؛ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ به وارون^{۱۹} $p \rightarrow q$ مصطلح است.

در حالتی که p و q گزاره‌های زیر را نمایش می‌دهند

p : چهارضلعی ABCD مربع است.

q : چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است.

به دست می‌آوریم:

● (استلزام: $p \rightarrow q$) اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد،

آنگاه چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است. (راست)

● (عکس نقیض: $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$) اگر چهارضلعی ABCD

متساوی‌الاضلاع نباشد، آنگاه مربع نیست. (باز هم راست)

● (عکس: $q \rightarrow p$) اگر چهارضلعی ABCD

متساوی‌الاضلاع است، آنگاه چهارضلعی ABCD مربع است.

(دروغ؛ هر لوزی که متساوی‌الزوایا نباشد همچنان

متساوی‌الاضلاع است.)

● (وارون: $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$) اگر چهارضلعی ABCD مربع

نباشد، آنگاه متساوی‌الاضلاع نیست. (باز هم دروغ)

همانگونه که مثال خاص فوق نشان می‌دهد، باید از

«استدلال با استفاده از عکس» اجتناب کنیم. این حقیقت که

استلزام (یا قضیه) خاص $p \rightarrow q$ ای راست است بر این نیست

که عکس آن، یعنی، $q \rightarrow p$ ، نیز باید راست باشد. اما، راستی

عکس نقیض آن، یعنی، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ ، را ضروری می‌کند. □

۲. با نقیض کردن نتایج مرحله اول، داریم

$$\overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q) \vee r}$$

۳. از قانون اول دومورگان و قاعده جانشینی اول،

$$\overline{(p \vee q) \vee r} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)} \wedge \bar{r}$$

۴. اکنون قانون نقیض دوگانه و قاعده جانشینی اول می‌دهد

$$\overline{(p \vee q) \vee r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$$

از مراحل ۱ تا ۴ داریم

$$\square \overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$$

مثال ۷.

در تعریف ۲، S^d ، دوگان گزاره S ، تنها به ازای گزاره‌های

شامل نقیض و رابطهای پایه‌ای $\wedge$ و $\vee$ تعریف شده است. در

این صورت چگونه می‌توان دوگان گزاره‌ای چون $S: p \rightarrow q$ را

مشخص کرد؟

از آنجا که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ ، S^d منطقاً هم‌ارز گزاره

$(\bar{p} \vee q)^d$ است، که $\bar{p} \wedge q$ است. □

در مثال بعد، به بررسی استلزام $p \rightarrow q$ و گزاره‌های خاص

وابسته به آن می‌پردازیم.

مثال ۸.

جدول ۶ جدولهای ارزش گزاره‌های $p \rightarrow q$ ، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ ،

$q \rightarrow p$ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ را به دست می‌دهد.

◀ جدول ۶

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

ستونهای سوم و چهارم این جدول آشکار می‌کنند که

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

گزاره $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ به عکس نقیض^{۱۷} استلزام $p \rightarrow q$ موسوم

◆ یادداشتها:

1. Algebra of propositional

2. Logically equivalent

3. Exclusive or

4. De Morgan's Laws

5. Law of Double Negation

6. Commutative Laws

7. Associative Laws

8. Distributive Laws

9. Idempotent Laws

10. Identity Laws

11. Inverse Laws

12. Domination Laws

13. Absorption Laws

14. Dual

15. The principle of Duality

16. Substitution Rules

17. Contrapositive

18. Converse

19. Inverse