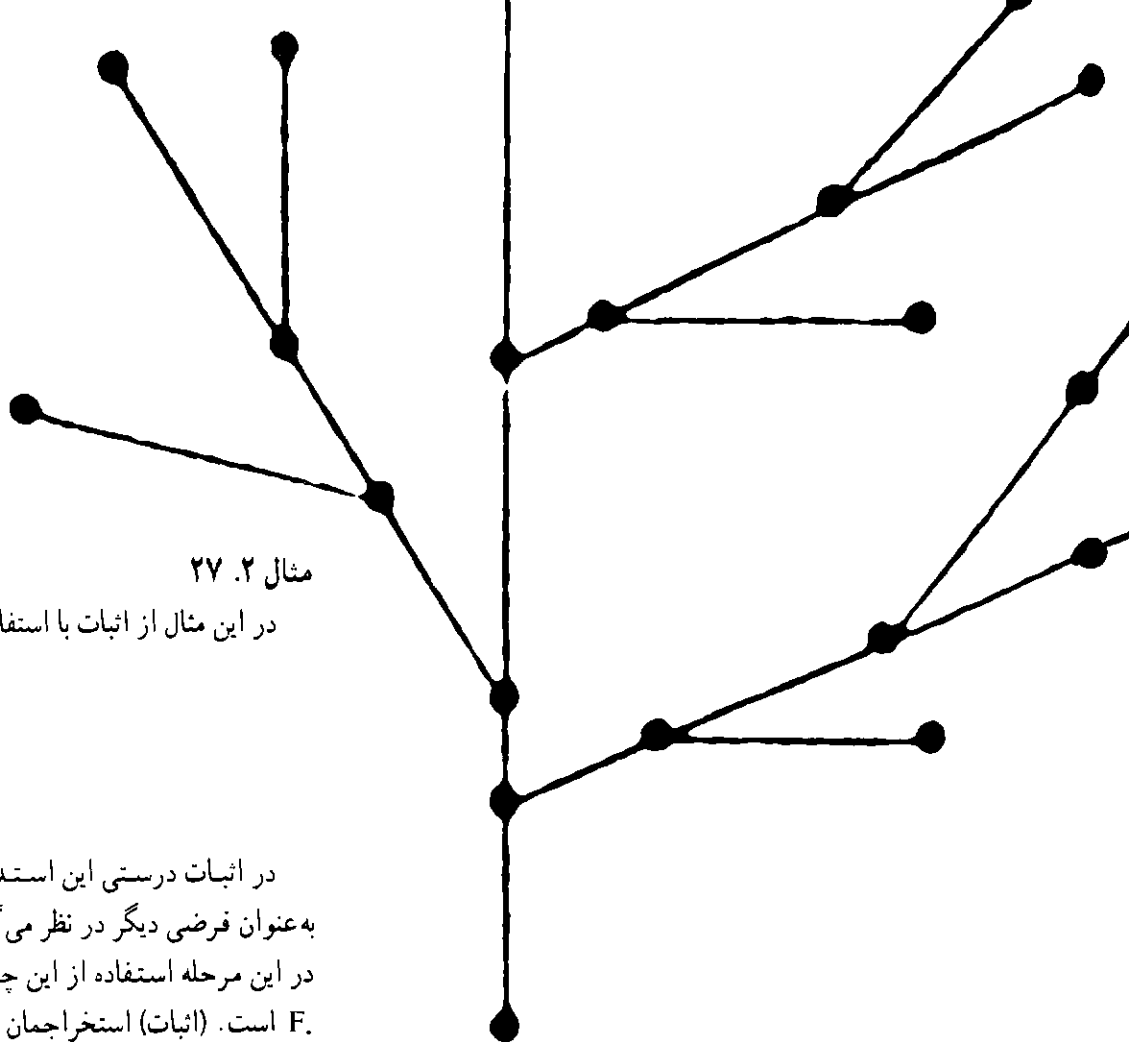




مثال ۲۷.۲

در این مثال از اثبات با استفاده از کاذب بهره می‌بریم.

$$\bar{p} \leftrightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\bar{r}$$

$$\therefore p$$

در اثبات درستی این استدلال، $\bar{p}$ ، نقیض نتیجه p ، را به عنوان فرضی دیگر در نظر می‌گیریم. در این صورت، هدفمان در این مرحله استفاده از این چهار فرض در استخراج کاذب F است. (اثبات) استخراجمان به ترتیب زیر است.

دلائل	مراحل
فرض	(۱) $\bar{p} \leftrightarrow q$
	(۲) $(\bar{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{p})$
(۱) و $[\bar{p} \leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(\bar{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{p})]$	
(۲) و قاعده تسهیل عطفی	(۳) $\bar{p} \rightarrow q$
فرض	(۴) $q \rightarrow r$
(۳)، (۴)، و قانون قیاس	(۵) $\bar{p} \rightarrow r$
فرض (در نظر گرفته شده)	(۶) $\bar{p}$
(۵)، (۶)، و قاعده انفصال	(۷) r
فرض	(۸) $\bar{r}$
(۷)، (۸)، و قاعده ترکیب عطفی	(۹) $r \wedge \bar{r} (\Leftrightarrow F)$
(۶)، (۹)، و اثبات با استفاده از کاذب	(۱۰) $\therefore p$

در صورتی که به بررسی بیشتر آنچه در اینجا رخ داده پردازیم، درمی‌یابیم که

$$[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}] \Rightarrow F.$$

استلزام منطقی فوق طالب این است که ارزش راستی $[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}]$ صفر باشد. به علت این که

ریاضیات گسسته

قسمت نهم

RALPH P. GRIMALDI

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

باشد.) در حالی که هر چهار فرض استدلال راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد).

نتیجه $\bar{s} \rightarrow \bar{t}$ ، تنها وقتی دروغ است که $\bar{s}$ راست و $\bar{t}$ دروغ باشد. این مطلب مستلزم این است که ارزش راستی s ، ۰ و ارزش راستی t ، ۱ باشد. برای اینکه فرض $p \vee q$ دارای ارزش راستی ۱ باشد، q می‌تواند راست (۱) یا دروغ (۰) باشد. بنابراین فرض $t \rightarrow r$ را در نظر می‌گیریم که در مورد آن می‌دانیم که t راست است. اگر قرار باشد $t \rightarrow r$ راست باشد، آنگاه r باید راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد). اما ارزش راستی فرض $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ ، با r راست (۱) و s دروغ (۰)، تنها وقتی که q دروغ (۰) است ۱ می‌شود. در نتیجه، تحت تخصیصات ارزش راستی:

$$p : 1 \quad q : 0 \quad r : 1 \quad s : 0 \quad t : 1$$

هر چهار فرض

$$p \quad p \vee q \quad q \rightarrow (r \rightarrow s) \quad t \rightarrow r$$

دارای ارزش راستی ۱ است، در حالی که نتیجه

$$\bar{s} \rightarrow \bar{t}$$

ارزش راستی ۰ دارد. در این حالت نشان دادیم که استدلال داده شده نادرست است.

□

ارزشهای راستی

$$p : 1 \quad q : 0 \quad r : 1 \quad s : 0 \quad t : 1$$

مثال ۲۸.۲ حالتی را به دست می‌دهد که آنچه را که می‌اندیشیدیم ممکن است قضیه باشد رد می‌کند. اکنون باید شروع به داشتن این مطلب داشته باشیم که در کوشش در اثبات این که گزاره‌ای به صورت $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ قضیه است، باید استدلالی عمومی برای همه حالت‌هایی که فرضهای $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ در آنها راست‌اند، ارائه دهیم. این استدلال، اساساً بر قواعد استنتاج و قوانین منطق بنا شده است، و در این مورد نمی‌توانیم از مثال خاصی به عنوان وسیله اثبات نتیجه‌ای عمومی استفاده کنیم. اما، زمانی که مایل به رد گزاره‌ای خاص هستیم، تنها کاری که باید انجام بدهیم، یافتن نمونه‌ای است که گزاره مورد نظر به ازای آن دروغ است. این نمونه را مثال نقض^۲ می‌نامیم.

اکنون مثال دیگری را در نظر می‌گیریم و در آن به آزمایش رهیافت غیرمستقیم مثال ۲۸.۲ می‌پردازیم.

$\bar{q} \leftrightarrow p, \bar{q} \rightarrow r$ و فرضهای داده شده‌اند، هر یک از آنها دارای ارزش راستی ۱ است. در نتیجه، برای این که:

$$[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}]$$

دارای ارزش راستی ۰ باشد، باید گزاره $\bar{p}$ دارای ارزش راستی ۰ باشد. بنابراین، p ارزش راستی ۱ دارد، و نتیجه استدلال، یعنی، p ، راست است.

□

مثالهای ۲۴.۲ – ۲۷.۲ راههایی در چگونگی اثبات درستی استدلال دادند. اکنون باید چگونگی تشخیص نادرستی^۱ یک استدلال را بیاموزیم.

این وضعیت در استدلال

$$p_1$$

$$p_2$$

$$p_3$$

$$\vdots$$

$$p_n$$

$$\therefore q$$

رخ می‌دهد که در آن هر یک از فرضهای $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ راست است (ارزش راستی ۱ دارد)، و با این همه نتیجه q دروغ است (ارزش راستی ۰ دارد).

مضام بعدی، روش غیرمستقیمی را توضیح می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان نشان داد استدلالی که احساس می‌کنیم نادرست است (شاید به این علت که نمی‌توانیم راهی برای نشان دادن درستی آن بیابیم) در واقع نادرست است.

مثال ۲۸.۲

استدلال زیر را در نظر بگیرید

$$p$$

$$p \vee q$$

$$q \rightarrow (r \rightarrow s)$$

$$\frac{t \rightarrow r}{\therefore \bar{s} \rightarrow \bar{t}}$$

برای نشان دادن نادرستی این استدلال، به چنان تخصیص ارزشهای راستی‌ای به هر یک از گزاره‌های p, q, r, s و t نیاز داریم که نتیجه $\bar{s} \rightarrow \bar{t}$ دروغ باشد (ارزش راستی ۰ داشته

محدود کنیم، در این صورت چون به جای x ، -۵ ، -۱ یا ۳ را قرار دهیم، گزاره نتیجه دروغ است. در واقع، جمله مزبور هرگاه به جای x عددی صحیح و فرد قرار دهیم دروغ است. اما، چون به جای x عددی صحیح و زوج قرار داده شود گزاره نتیجه راست است.

به جمله «عدد $x+۲$ عددی صحیح و زوج است» به عنوان گزاره باز^۵ اشاره، و آن را به طور صوری به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲

- جمله خبری گزاره باز است، اگر
۱. شامل یک یا بیش از یک متغیر باشد، و
 ۲. گزاره نباشد، اما
 ۳. چون به جای متغیرهای آن انتخابهای مجاز خاصی بگذاریم، به گزاره تبدیل شود.

هنگامی که جمله «عدد $x+۲$ عددی صحیح و زوج است» را در پرتو این تعریف بررسی کنیم، آن را گزاره بازی ملاحظه می‌کنیم که شامل تک متغیر x است. در رابطه با سومین عنصر تعریف فوق، در بحث پیشین مان «انتخابهای مجاز خاص» را به اعداد صحیح محدود کرده‌ایم. این انتخابهای مجاز آنچه را که به عالم^۶ یا عالم مقال^۷ گزاره باز موسوم است، تشکیل می‌دهند. عالم مزبور، شامل انتخابهایی است که مایل به در نظر گرفتن یا تجویزشان برای متغیرهای واقع در گزاره باز مورد نظرم. (عالم مورد بحث، مثالی از مجموعه^۸ است، مفهومی که آن را در آینده به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.)

در برخورد با گزاره‌های باز، نمادنویسی زیر را به کار خواهیم برد:

گزاره باز «عدد $x+۲$ عددی صحیح و زوج است» را به $p(x)$ [یا $q(x)$ ، $r(x)$ و غیره] نمایش می‌دهیم. در این صورت $\overline{p(x)}$ «عدد $x+۲$ عددی صحیح و زوج نیست» خوانده می‌شود.

از $q(x, y)$ برای نمایش گزاره بازی که شامل دو متغیر است استفاده می‌کنیم، چون $q(x, y)$: اعداد $y+۲$ ، $y-x$ و $x+۲y$ اعدادی صحیح و زوج‌اند. در حالت $q(x, y)$ ، بیش از یک ظهور هر یک از متغیرهای x ، y موجود است. باید دانست که چون به جای یکی از x ها

در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر چه می‌توان گفت؟

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow s$$

$$r \rightarrow \bar{s}$$

$$\frac{\overline{p} \vee r}{\therefore \bar{p}}$$

آیا نتیجه $\bar{p}$ ، در حالی که هر چهار فرض راست‌اند، می‌تواند دروغ باشد؟ نتیجه $\bar{p}$ هنگامی دروغ است که p دارای ارزش راستی ۱ باشد. بنابراین، برای این که فرض $p \rightarrow q$ راست باشد، باید ارزش راستی q چنین باشد. با توجه به ارزش فرض $q \rightarrow s$ ، ارزش q بر ارزش s مسلط است. در این مرحله جمع گزاره‌های p ، q و s را با ارزش راستی ۱ داریم. با پرداختن به فرض $r \rightarrow \bar{s}$ ، در می‌یابیم که به علت ارزش راستی ۱ داشتن s ، باید ارزش راستی r ، ۰ باشد. در نتیجه r دروغ می‌شود. اما با $\bar{p}$ ی دروغ و فرض $\overline{p} \vee r$ راست، r را راست نیز داریم. بنابراین: در می‌یابیم که $p \Rightarrow (r \wedge \bar{s})$.

به این ترتیب در کوششمان برای یافتن مثالی نقض در مورد درستی استدلال داده شده با شکست مواجه شدیم. اما، این شکست به اثبات درستی استدلال مزبور - اثباتی بر مبنای اثبات با استفاده از کاذب - منجر شده است.



معرفی قواعد استنتاج و روشهای اثباتمان، فاصله زیادی تا جامع بودن دارد. کتابهای دیگر، موضوعات دیگری را به خواننده‌ای که میل به بررسی بیشتر این موضوع دارد، ارائه می‌دهند. در آینده، تکنیک اثبات بسیار مهمتری موسوم به استقرای ریاضی^۹ را به زرادخانه‌مان، برای یورش به اثباتهای قضایای ریاضی، خواهیم افزود.

کاربرد سورها

در بخش ۱.۲ یادآور شدیم که چگونه لازم نیست، جمله‌هایی که با متغیری (چون x) سر و کار دارند، گزاره باشند. به عنوان مثال جمله «عدد $x+۲$ عددی صحیح و زوج است» لزوماً راست یا دروغ نیست، مگر این که بدانیم چه مقداری به جای x قرار گرفته است. اگر انتخابهایمان را به اعداد صحیح

گزاره (۲) در صورت نمادین به $\exists x \exists y q(x, y)$ تبدیل می‌شود. از نماد $\exists x, y$ نیز می‌توان برای اختصار $\exists x \exists y q(x, y)$ به $\exists x, y q(x, y)$ استفاده برد.

سور عمومی با $\forall x$ نمایش داده و «به ازای جميع x ها»، یا «به ازای هر x » خوانده می‌شود.

با در نظر گرفتن $p(x)$ به صورت تعریف شده در قبل و استفاده از سور عمومی، می‌توانیم گزاره باز $p(x)$ را به گزاره (سوردار) $\forall x p(x)$ ، گزاره‌ای دروغ، تغییر دهیم.

اگر گزاره باز $r(x)$: « $2x$ عددی صحیح و زوج است» را با همان عالم (جميع اعداد صحیح) در نظر بگیریم، آنگاه گزاره (سوردار) $\forall x r(x)$ گزاره‌ای راست است. هنگامی که می‌گوییم $\forall x r(x)$ راست است، مقصودمان این است که بی‌توجه به این که چه عدد صحیحی (از عالمان) به جای x قرار گرفته است، گزاره نتیجه راست است. نیز توجه داشته باشید که گزاره $\exists x r(x)$ گزاره‌ای راست است، در حالی که $\forall x \overline{r(x)}$ و $\exists x \overline{r(x)}$ هر دو، دروغ‌اند.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه مفاهیم جدید مربوط به سورهای فوق را می‌توان با رابطهای منطقی به کار برد.

مثال ۲. ۳۰

در این مثال، عالمان شامل جميع اعداد حقیقی است. گزاره‌های باز $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ و $s(x)$ در زیر داده شده‌اند.

$$x \geq 0 : p(x)$$

$$x^2 \geq 0 : q(x)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 : r(x)$$

$$x^2 - 3 > 0 : s(x)$$

در این صورت گزاره‌های زیر راست‌اند.

۱

$$\exists x [p(x) \wedge r(x)]$$

این گزاره به این علت نتیجه می‌شود که، فی‌المثل، عدد حقیقی ۴، عضوی از عالم مربوطه و چنان است که هر دو گزاره $p(4)$ و $r(4)$ راست‌اند.

۲

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$$

اگر به جای x در $p(x)$ عدد حقیقی و منفی a را قرار دهیم، آنگاه $p(x)$ دروغ است، اما $p(a) \rightarrow q(a)$ ، بی‌توجه به ارزش

انتخابی از عالمان را قرار می‌دهیم، به جای x های دیگر، همان انتخاب را می‌گذاریم. به همین ترتیب، چون جانشینی‌ای (از عالم مربوطه) در مورد یک ظهور y انجام می‌گیرد، همان جانشینی در مورد جميع ظهورات متغیر y به کار می‌رود.

با $p(x)$ و $q(x, y)$ چون فوق، و عالمی که همچنان اعداد صحیح را به عنوان تنها انتخابهای مجازمان مقرر می‌کند، هنگامی که بعضی جانشینیها را برای متغیرهای x و y به کار می‌بریم، نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

$p(5)$: عدد $7 (= 5 + 2)$ عددی صحیح و زوج است. (دروغ)

$\overline{p(7)}$: عدد ۹ عددی صحیح و زوج نیست. (راست)

$q(4, 2)$: اعداد ۴، ۲ و ۸ اعدادی صحیح و زوج‌اند. (راست)

نیز، به عنوان مثال، توجه می‌کنیم که $q(5, 2)$ و $q(4, 7)$ هر دو گزاره‌هایی دروغ‌اند، در حالی که $\overline{q(5, 2)}$ و $\overline{q(4, 7)}$ راست‌اند. در نتیجه، ملاحظه می‌کنیم که در مورد $p(x)$ و $q(x, y)$ ، بعضی از جانشینیها به گزاره‌های راست و بعضی به گزاره‌های دروغ منجر می‌شوند. بنابراین می‌توانیم گزاره‌های راست زیر را تشکیل دهیم.

۱. به ازای بعضی x ها، $p(x)$.

۲. به ازای بعضی x ها و y ها، $q(x, y)$.

توجه داشته باشید که در این حالت، گزاره‌های «به ازای بعضی x ها»، $\overline{p(x)}$ و «به ازای بعضی x ها و y ها»، $\overline{q(x, y)}$ نیز راست‌اند.

گفته می‌شود که فرازهای «به ازای بعضی x ها» و «به ازای بعضی x ها و y ها»، به ترتیب، گزاره‌های باز $p(x)$ و $q(x, y)$ را سوردار می‌کنند. بسیاری از اصول موضوع، تعاریف، و قضایای ریاضی شامل گزاره‌هایی هستند که گزاره‌های باز سوردارند. اینها از دو نوع سور^۱ نتیجه شده‌اند، که به سورهای وجودی و عمومی^۲ موسوم‌اند.

گزاره (۱) از سور وجودی «به ازای بعضی x ها» استفاده می‌کند، که می‌تواند به صورت «به ازای حداقل یک x » یا « x ی چنان موجود است که» نیز بیان شود. این سور در صورت نمادین به شکل $\exists x$ نوشته می‌شود. در نتیجه، گزاره «به ازای بعضی x ها، $p(x)$ » در صورت نمادین به $\exists x p(x)$ تبدیل می‌شود.

بنابراین انتخاب ۱- مثال نقض یکنایی را به دست می‌دهد که برای رد این گزاره (سوردار) به آن نیاز است.

گزاره (۳') را می‌توان به یکی از دو صورت زیر ترجمه کرد:

(a) به ازای هر عدد حقیقی x ، اگر $x^2 - 3x - 4 = 0$ ، آنگاه $x \geq 0$.

(b) به ازای هر عدد حقیقی x ، اگر x جواب معادله $x^2 - 3x - 4 = 0$ باشد، آنگاه $x \geq 0$.

□

از مثال ۲. ۳۰ ملاحظات زیر را به عمل می‌آوریم. فرض می‌کنیم $p(x)$ هر گزاره باز (برحسب متغیر x) با عالم ناتمامی^{۱۲} مشخصی را (یعنی، عالمی شامل حداقل یک موجود) نمایش دهد. در این صورت اگر $\forall x p(x)$ راست باشد، $\exists x p(x)$ نیز چنین است، یا

$$\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$$

نیز اگر $\exists x p(x)$ راست باشد، نتیجه نمی‌شود که $\forall x p(x)$ باید راست باشد. در نتیجه، $\exists x p(x)$ منطقاً مستلزم $\forall x p(x)$ نیست.

یادداشتها

1. Invalid
2. Disprove
3. Counterexample
4. Mathematical induction
5. Open statement
6. Universe
7. Universe of discourse
8. Set
9. Quantify
10. Quantifiers
11. Existential and universal quantifiers
12. Nonempty

راستی $q(a)$ ، راست است. با قرار دادن عدد حقیقی نامنفی b به جای x در $p(x)$ و $q(x)$ ؛ $p(b)$ و $q(b)$ ، هر دو، را، همچنان که $p(b) \rightarrow q(b)$ ، راست می‌یابیم، در نتیجه، $p(x) \rightarrow q(x)$ به ازای تمام مقادیر x واقع در عالم تمام اعداد حقیقی، راست است، و گزاره (سوردار) $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ راست است.

این گزاره را می‌توان به یکی از دو صورت زیر ترجمه کرد:

(a) به ازای هر عدد حقیقی x ، اگر $x \geq 0$ ، آنگاه $x^2 \geq 0$.

(b) هر عدد نامنفی مربعی نامنفی دارد.

گزاره $\exists x [p(x) \rightarrow q(x)]$ نیز راست است.

گزاره‌های مورد بررسی بعدی دروغ‌اند.

۱۲

$$\forall x [q(x) \rightarrow s(x)]$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این گزاره دروغ است، بنابراین لازم است که، به جای اثبات مطلبی به ازای تمام x ها، چنان که در گزاره (۲) انجام دادیم، تنها مثالی نقض ارائه دهیم - یعنی، مقداری از x که به ازای آن $q(x) \rightarrow s(x)$ دروغ است. با قرار دادن ۱ به جای x ، ملاحظه می‌کنیم که $q(1)$ راست و $s(1)$ دروغ است. بنابراین $q(1) \rightarrow s(1)$ دروغ است، و در نتیجه، گزاره (سوردار) $\forall x [q(x) \rightarrow s(x)]$ دروغ است. (توجه داشته باشید که $x=1$ تنها مثال نقض موجود را به دست نمی‌دهد: هر عدد حقیقی a بین $-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ ، $q(a)$ را راست و $s(a)$ را دروغ می‌کند.)

۲۲

$$\forall x [r(x) \vee s(x)]$$

در این مورد، مثالهای نقض بسیاری، چون، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، و 0 موجودند: امّا، با تغییر سور، درمی‌یابیم که گزاره $\exists x [r(x) \vee s(x)]$ راست است.

۳۲

$$\forall x [r(x) \rightarrow p(x)]$$

عدد حقیقی ۱- جواب معادله $x^2 - 3x - 4 = 0$ است، بنابراین $r(-1)$ راست است. در حالی که $p(-1)$ دروغ است.