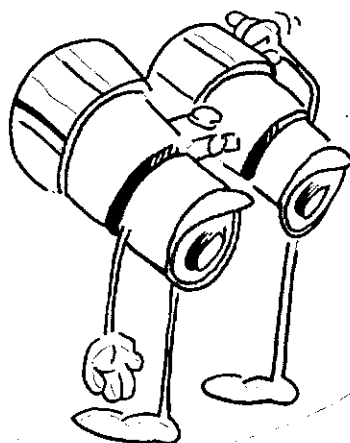
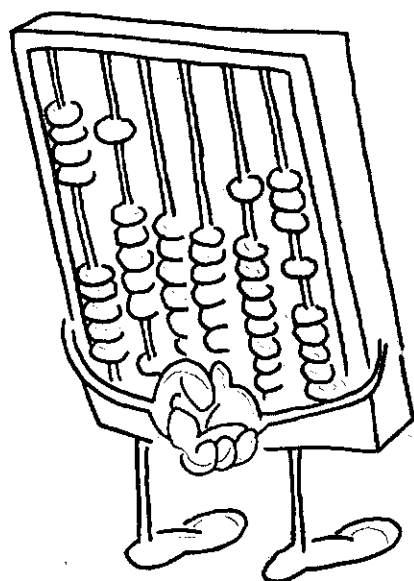
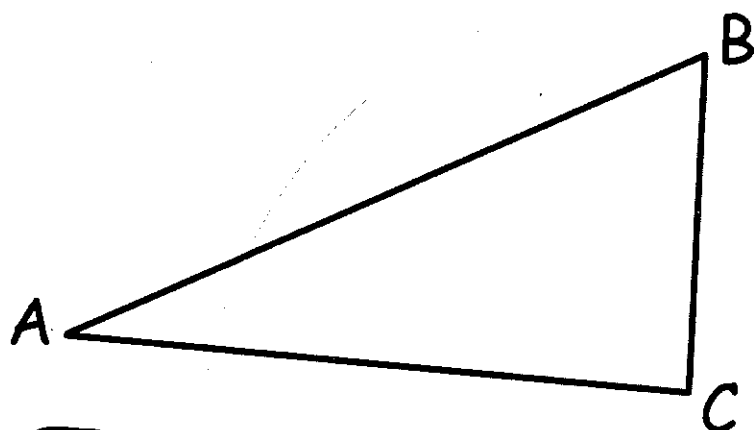




اشاره

به منظور استفاده

بیشتر دانش آموزان

از این مقاله، از چند

شماره‌ی قبل به حل

مسئله‌های هندسه در صفحه

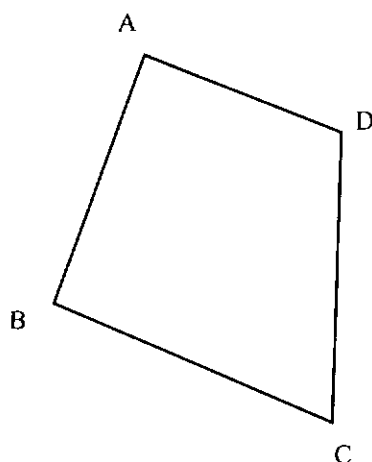
(هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم.

در این شماره ادامه‌ی این مطالب را

پی می‌گیریم.

رویکرد هندسی و

رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۴



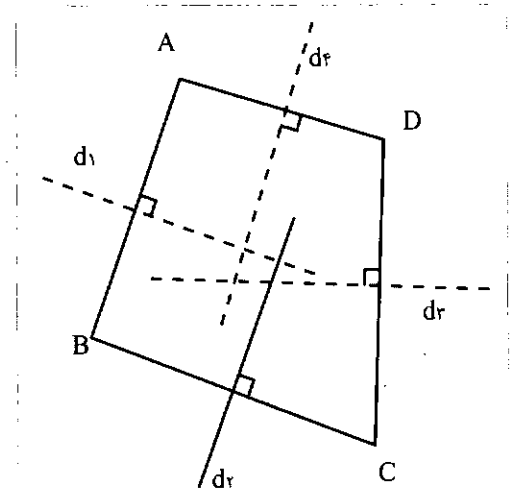
مسئله‌ی ۷. چهار نقطه‌ی غیرهمخط A, B, C و D در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ در صورتی که چنین نقطه‌ای وجود دارد، شرط وجودش چیست؟

الف) حل به روش هندسی

پاره‌خط‌های AB, BC, CD و DA را رسم می‌کنیم، یعنی در واقع چهار ضلعی $ABCD$ را می‌سازیم. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های AB, BC, CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1, d_2, d_3 و d_4 می‌نامیم.

در صورتی که این چهار خط هم‌رس باشند، نقطه‌ی هم‌رسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم از چهار نقطه‌ی A, B, C, D به یک فاصله است، یعنی داریم:

$$MA = MB = MC = MD$$

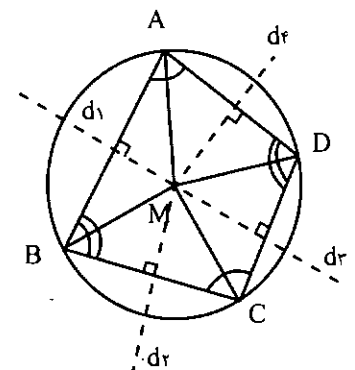


اما در چه صورتی خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 هم‌رس‌اند؟ در هندسه‌ی ۲، کتاب درسی سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی و فیزیک داریم:

قضیه: در هر چهار ضلعی محاطی مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو 180° است:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

نکته: چهار ضلعی را محاطی می‌نامند در صورتی که بر چهار



رأس آن یک دایره بگذرد، یعنی نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار رأس آن چهارضلعی به یک فاصله باشد (این نقطه را مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی می‌نامند و آن را با M یا O یا هر حرف دیگری نشان می‌دهند).

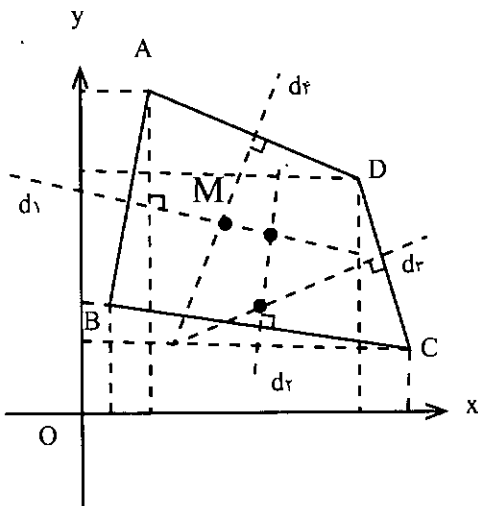
عکس قضیه: هر چهارضلعی که مجموع دو زاویه‌ی روبه‌روی آن 180° باشد، محاطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. مرکز این دایره همان نقطه‌ی M ، یعنی محل برخورد (نقطه‌ی هم‌رسی) خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 است.

اثبات این دو قضیه به روش هندسی در کتاب هندسه‌ی ۲ آمده است، بنابراین از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توانیم بگوییم شرط لازم و کافی برای آن که چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، یا به عبارت دیگر دیگر نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار نقطه‌ی A, B, C, D به یک فاصله باشد ($MA = MB = MC = MD$) آن است که مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن 180° باشد، یا به بیان دیگر، هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

مربع، مستطیل و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین از چهارضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را دارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره می‌گذرد. چرا؟ اما متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهار ضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را ندارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد. چرا؟

(ب) اثبات به روش جبری - مختصات

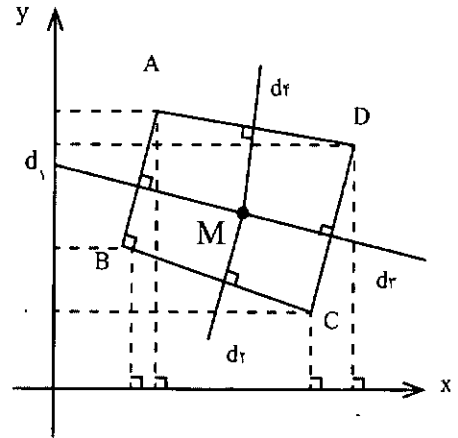
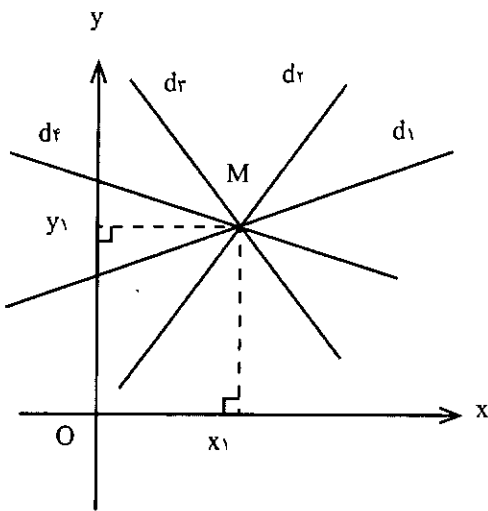
دستگاه مختصات قائم xOy را در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A, B, C, D در نظر می‌گیریم و مختصات این نقطه‌ها در این دستگاه مختصات در حالت کلی را $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ ، $C = (x_3, y_3)$ و $D = (x_4, y_4)$ می‌نامیم. پاره‌خط‌های AB, BC, CD, DA را رسم می‌کنیم (در واقع چهارضلعی $ABCD$



را می‌سازیم) و عمود منصف‌های این پاره‌خط‌ها را به ترتیب d_1, d_2, d_3, d_4 می‌نامیم. معادله‌ی این عمود منصف‌ها را می‌نویسیم و هم‌رس

بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

از این خط‌ها را به دست می‌آوریم و آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادله‌ی خط‌های دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی خط‌های دیگر صدق کند، این خط‌ها هم‌رسند و اگر صدق نکند، هم‌رس نیستند.



در صورتی که این چهار خط هم‌رس باشند، نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است، یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی است و در صورتی که چهار خط d_1, d_2, d_3, d_4 هم‌رس نباشند، نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A, B, C و D وجود ندارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد یا به بیانی دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

برای این که هم‌رس بودن یا نبودن خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 را که همان عمودمنصف‌های پاره‌های AB, BC, CD و DA هستند بررسی کنیم، نخست معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم، سپس مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این چهار خط را به دست می‌آوریم (یا حل یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی)؛ آن‌گاه مختصات این نقطه‌ی برخورد را در معادله‌ی دو خط دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق کند، بدان معناست که دو خط دیگر هم از این نقطه می‌گذرند، یعنی چهارخط هم‌رس‌اند و نقطه‌ی هم‌رسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است، یعنی از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی است.

در صورتی که مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق نکند مسئله جواب ندارد، یعنی نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود ندارد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله باشد یا به بیان دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

نکته‌ی مهم: برای بررسی هم‌رس بودن یا نبودن هر چند خط (۳ خط، ۴ خط، ۵ خط، ۶ خط یا بیشتر) می‌توانیم از روش بالا استفاده کنیم، یعنی با داشتن معادله‌ی آن‌ها، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط

از این ویژگی برای بررسی محاطی بودن یا نبودن یک چندضلعی می‌توانیم استفاده کنیم، بدین ترتیب که معادله‌ی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن را بنویسیم و هم‌رس بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنیم. اگر این عمودمنصف‌ها هم‌رس باشند، چندضلعی محاطی است و اگر هم‌رس نباشند، چندضلعی محاطی نیست. محاطی بودن چندضلعی به معنای آن است که در صفحه‌ی آن چندضلعی، نقطه‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن چندضلعی به یک فاصله است و محاطی نبودن چندضلعی به معنای بودن چنین نقطه‌ای است.

مثال ۱: ثابت کنید که در صفحه‌ی هر مستطیل نقطه‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن به یک فاصله است. به عبارت دیگر، دایره‌ای وجود دارد که بر چهار رأس یک مستطیل می‌گذرد یا به بیان دیگر، هر مستطیلی می‌تواند در یک دایره محاط شود.

الف) اثبات به روش هندسی

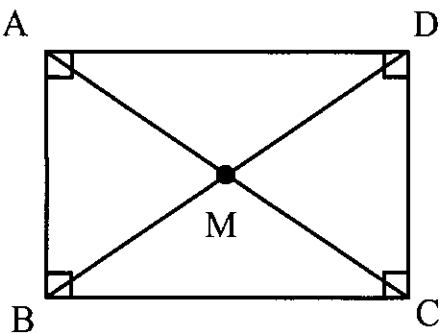
روش اول - مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M جواب مسئله باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است، یعنی داشته باشیم:

$$MA = MB = MC = MD$$

با توجه به این که $AB = CD$ و $BC = AD$ و $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

است، دو مثلث MAB و MCD و همچنین دو مثلث MAD و MBC هم‌نهشت‌اند (به حالت ض ض ض)؛ زیرا:

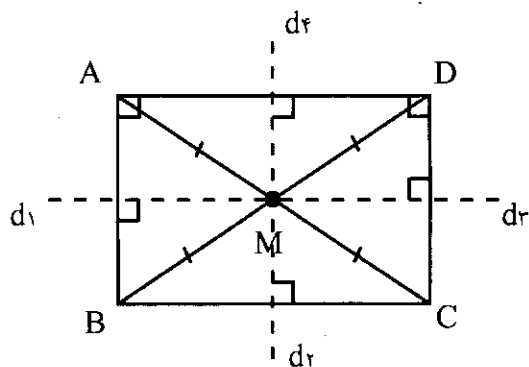
روش سوم - قطرهای AC و BD از مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. چون قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:
 $MA = MB = MC = MD$



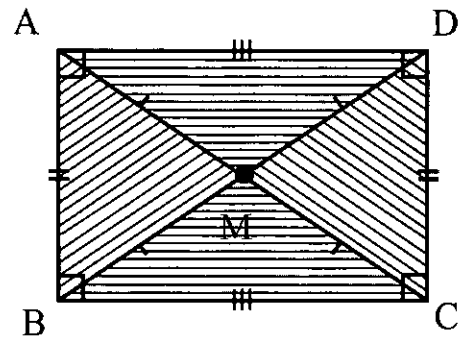
بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD جواب مسئله است.

روش چهارم - عمودمنصف‌های ضلع‌های مستطیل، یعنی عمودمنصف‌های پاره‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1, d_2, d_3, d_4 می‌نامیم. d_1 و d_2 بر هم منطبق‌اند، زیرا در واقع خطی که وسط‌های ضلع‌های AB و CD از این مستطیل را به هم وصل می‌کند بر هر دو ضلع AB و CD عمود است، یعنی هم عمودمنصف AB است و هم عمودمنصف CD؛ چرا؟ هم‌چنین خط‌های d_3 و d_4 نیز بر هم منطبق‌اند. اگر نقطه‌ی برخورد d_1 و d_2 با خط‌های d_3 و d_4 را M بنامیم، این نقطه جواب مسئله است، یعنی داریم:

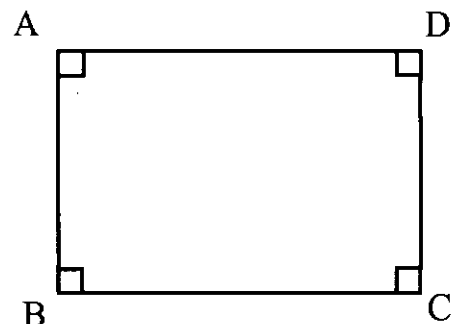
$$MA = MB = MC = MD$$



$MA = MB = MC = MD$ و $AB = CD \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta MCD$
 $MA = MB = MC = MD$ و $BC = AD \Rightarrow \Delta MBC \cong \Delta MAD$
 از هم‌نهشتی این مثلث‌ها نتیجه می‌شود که $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$ است، پس $2\hat{M}_1 + 2\hat{M}_2 = 360^\circ$ اما $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 360^\circ$ است، پس



در نتیجه $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ و $\hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180^\circ$ پس AMC و BMD خط‌های راست هستند، یعنی BMD و AMC قطرهای مستطیل ABCD هستند. بنابراین نقطه‌ی M وجود دارد و این نقطه محل برخورد قطرهای AC و BC از مستطیل ABCD است.
 روش دوم - چون در مستطیل ABCD $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ است، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ است، یعنی هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند، بنابراین مستطیل ABCD محاطی است، یعنی بر چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد. اگر مرکز این دایره را M بنامیم، جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس این مستطیل یک فاصله است، یعنی داریم $MA = MB = MC = MD$ (این دایره به قطر AC یا BD است).



زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB, M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$

$$M \in d_1 \Rightarrow MB = MC, M \in d_2 \Rightarrow MA = MD$$

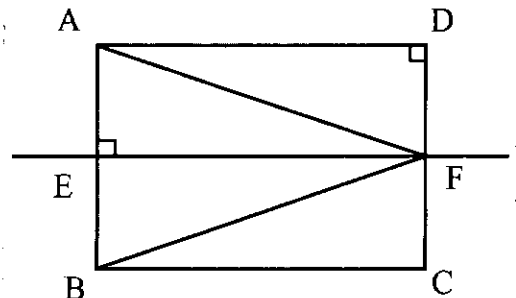
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

نکته: از این که M هم روی d_1 و هم روی d_2 است، به طور مستقیم می توان نتیجه گرفت که $MA = MB = MC = MD$ است، زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB, M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

پاسخ چرا در حل مسئله: اگر وسط ضلع AB را E و وسط ضلع CD را F بنامیم و از E به F وصل کنیم، خط EF بر دو ضلع AB و CD عمود است، زیرا اگر از F به A و B وصل کنیم دو مثلث قائم الزاویه ADF و BCF به دلیل برابری ضلع های مجاور به زاویه های قائمه نشان هم نهشتاند ($\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$ و $FC = FD$ و $AD = BC$) بنابراین $FA = FB$ است، یعنی نقطه F روی عمود منصف پاره خط AB است و چون پای این عمود منصف نقطه E است، پس EF هم عمود منصف پاره خط AB و هم عمود منصف پاره خط CD است، یعنی d_1 و d_2 برهم منطبق اند. به دلیل مشابه، خط های d_1 و d_2 که به ترتیب عمود منصف های پاره خط های BC و AD هستند، نیز، برهم منطبق اند.



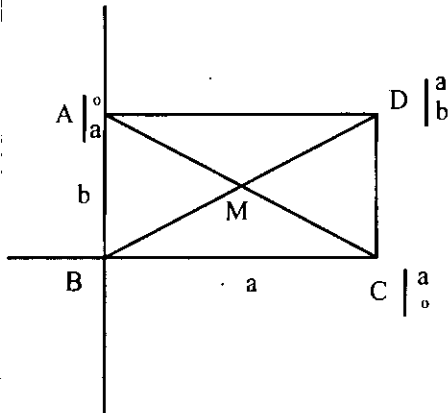
(ب) اثبات به روش جبری - مختصات

روش اول - اندازه ی ضلع های مستطیل ABCD را a و b در نظر می گیریم، یعنی فرض می کنیم $AB = CD = a$ و $BC = AD = b$. دستگاه مختصات قائم xOy را چنان اختیار می کنیم که محور x ها روی BC و محور y ها روی BA باشد. رأس B را مبدأ مختصات در نظر می گیریم، یعنی $B = (0,0)$.

در این دستگاه مختصات $A = (0,b)$ ، $D = (a,b)$ و $C = (a,0)$ است. وسط قطر AC که آن را M می نامیم، محل برخورد قطر های آن است و داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

اکنون فاصله ی نقطه ی M تا چهار رأس مستطیل را به دست می آوریم.



$$MA = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

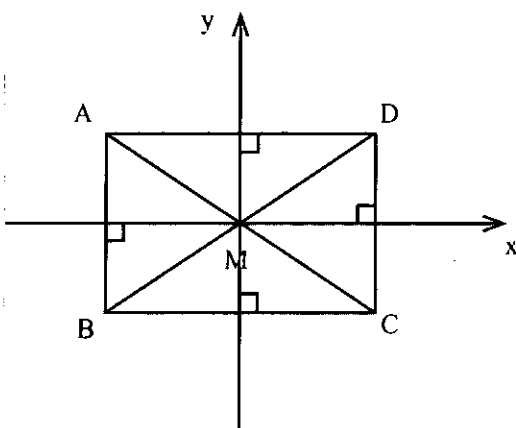
$$MB = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

پس نقطه ی M جواب مسئله است. این نقطه مرکز تقارن مستطیل نیز هست که همان نقطه ی برخورد قطر های مستطیل است. روش دوم - طول ضلع های مستطیل را a و b در نظر می گیریم. قطر های آن را رسم می کنیم و نقطه ی برخورد آن ها را M می نامیم.



دستگاه مختصات قائم xMy را چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ مختصات، محور x ها موازی راستای AB و محور y ها موازی راستای BC باشد. در این دستگاه مختصات رأس‌های مستطیل $A = (-\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ، $B = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ، $C = (\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و $D = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ است. فاصله نقطه M مبدأ مختصات و محل برخورد قطرهای مستطیل از چهار نقطه A ، B ، C و D را به دست می‌آوریم. داریم:

$$MA = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل و جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله خواهد بود.

نکته‌ی مهم: این سؤال پیش می‌آید که چرا در راه‌حل‌های جبری - مختصاتی ارائه شده، حدس زدیم که نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل جواب مسئله است و سپس درست بودن این حدس را ثابت کردیم. این حدس زدن می‌تواند از راه‌حل هندسی مسئله نشأت بگیرد، اما بدون حدس زدن، مستقیماً می‌توانیم مختصات نقطه‌ی جواب مسئله را پیدا کنیم و متوجه شویم که این نقطه همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. برای مثال در روش آخر راه‌حل جبری - مختصاتی که مختصات رأس‌های مستطیل $ABCD$ به صورت $A = (-\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ، $B = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ، $C = (\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و $D = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ است، فرض می‌کنیم جواب مسئله نقطه‌ی $M = (\alpha, \beta)$ باشد. یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله است. در این صورت داریم:

$$MA = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(-\frac{b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(-\frac{b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MA = MB = MC = MD \Rightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2 = MD^2$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2 = \left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(-\frac{b}{2} - \beta\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a\alpha + \frac{b^2}{4} + \beta^2 - b\beta$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a\alpha + \frac{b^2}{4} + \beta^2 + b\beta$$

$$\Rightarrow 2b\beta = 0, b \neq 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad (1)$$

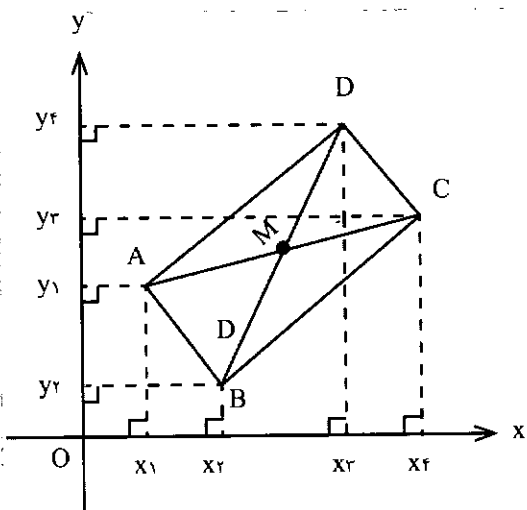
$$\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(-\frac{b}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2$$

$$\Rightarrow 2a\alpha = 0, a \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad (2)$$

از (1) و (2) نتیجه می‌شود $M(0,0)$. پس جواب مسئله، نقطه‌ی M ، محل برخورد قطرهای مستطیل است که در این دستگاه مختصات به عنوان مبدأ مختصات انتخاب شده است.

روش سوم - اگر دستگاه مختصات قائم xOy را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های مستطیل $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ ، $C = (x_3, y_3)$ و $D = (x_4, y_4)$ خواهد بود. در این صورت نیز می‌توانیم مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله را همانند روش ارائه شده در قسمت قبل به دست آوریم، یعنی فرض کنیم $M = (\alpha, \beta)$ جواب این مسئله است و از رابطه‌های $MA = MB = MC = MD$ اندازه‌های α و β را به دست آوریم. نتیجه‌ی کار چنین خواهد بود:



$$M = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) \text{ یا } M = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$$

که این نقطه، محل برخورد قطرهای مستطیل است.

نکته: چون نقطه‌ی M وسط قطر AC و وسط قطر BD نیز هست،

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \text{ و } \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2}$$

برقرارند.

توجه: چگونگی تعیین α و β برحسب مختصات رأس‌های مستطیل را برای ما بنویسید و به نشانی مجله ارسال کنید. به بهترین پاسخ‌ها جوایزی اهدا خواهد شد.

ادامه دارد