

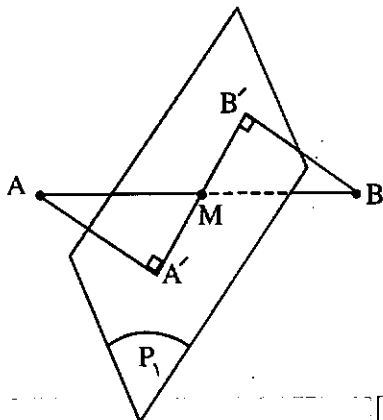


رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره: یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است. (از استانداردهای موضوعی NCTM)

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه برخی از راهبردهای مهم برای حل مسأله های هندسه را مطرح می کنیم، در ضمن لازم است گفته شود مسأله هایی را که با این دو رویکرد حل می کنیم، مسأله هایی از کتاب درسی هندسه ی ۱ و هندسه ی ۲ هستند، تا دانش آموزان بتوانند، مسائل دیگر این کتاب ها را با این دو رویکرد حل کنند.



شکل الف

دسته ی دوم، مجموعه ی تمام صفحه هایی است که با خط AB (راستای AB) موازی است. صفحه ی P_1 در شکل «ب» یکی از این صفحه ها را نشان می دهد.

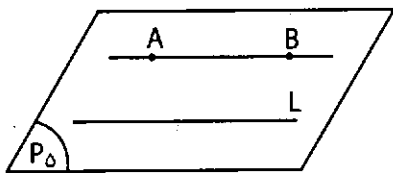
مثال ۱۰. آیا برای دو نقطه ی متمایز A و B و خط L، صفحه ای وجود دارد که بر L بگذرد و A و B از آن به یک فاصله باشند؟ در حالت های گوناگون چند جواب وجود دارد؟ مسئله را با روش هندسی و جبری - مختصاتی حل می کنیم.

روش هندسی

در مثال ۵ دیدیم، دو مجموعه صفحه وجود دارند که دو نقطه ی A و B از آن ها به یک فاصله اند: دسته ی اول، مجموعه ی تمام صفحه هایی است که از نقطه ی M وسط پاره خط AB می گذرند. صفحه ی P_1 در شکل «الف» یکی از این صفحه ها را نشان می دهد.

که همان جواب‌های مشخص شده در شکل‌هایی (پ) و (ت) هستند.

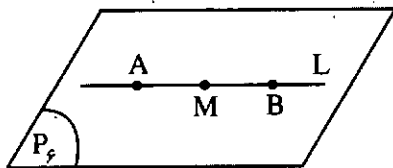
۲. اگر خط AB موازی با خط L و متمایز از آن باشد (یعنی منطبق بر L نباشد)، مسئله بی‌شمار جواب دارد که صفحه‌های گذرنده بر L (دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L) هستند. یکی از این صفحه‌ها، صفحه‌ای است که بر خط L و خط AB می‌گذرد. زیرا صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد، شامل خط AB نیز می‌شود. در شکل، خط AB بر صفحه‌ی P_5 واقع است، چون بنا به قضیه‌ای داریم: «اگر خطی موازی یک صفحه و از جمله روی آن صفحه باشد و از یک نقطه روی صفحه، خطی موازی آن رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.»



شکل ۳

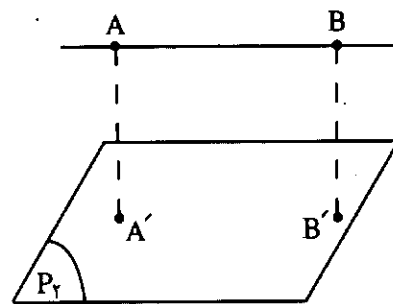
در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از صفحه‌ی گذرنده بر L و AB ، مساوی صفر است. در مورد بقیه‌ی صفحه‌ها این فاصله‌های مساوی صفر نیستند. بنابراین، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۳. اگر خط AB روی خط L باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. در واقع در این حالت تمام صفحه‌های گذرنده بر L (یا AB) جواب مسئله هستند. صفحه‌ی P_6 در شکل «ج» یکی از این بی‌شمار صفحه‌ها را نشان می‌دهد. در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از هر یک از صفحه‌های گذرنده بر L ، مساوی صفر است.



شکل ۴

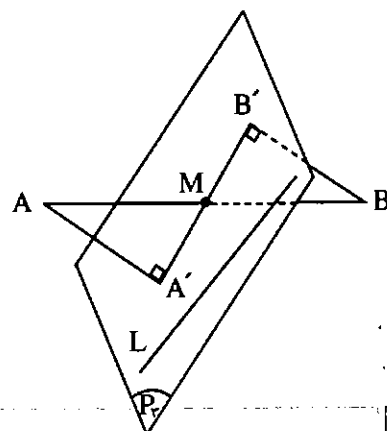
۴. اگر خط AB موازی L نباشد، اما نقطه‌ی M وسط پاره خط AB روی خط L باشد، یعنی در واقع خط AB و خط L ، در نقطه‌ی M وسط پاره خط AB متقاطع باشند، هر صفحه‌ای که بر خط L بگذرد، جواب مسئله است. یکی از این صفحه‌ها،



شکل ۵

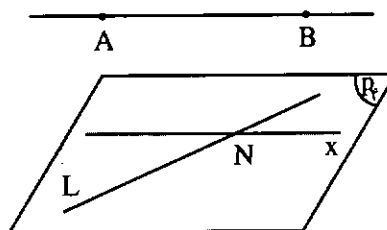
با توجه به این مطلب، در حالت کلی دو صفحه جواب مسئله هستند:

یکی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد. این صفحه را P_7 می‌نامیم. شکل پ آن را نشان می‌دهد.



شکل ۶

صفحه‌ی دیگر بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است. برای رسم این صفحه از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند N واقع بر خط L ، خط Nx را موازی AB رسم می‌کنیم. صفحه‌ی P_7 که بر دو خط متقاطع L و Nx می‌گذرد، جواب دیگر مسئله است (شکل ت).



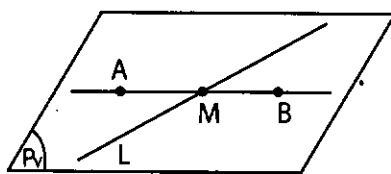
شکل ۷

بحث: با توجه به وضع خط AB و خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB این حالت‌ها را خواهیم داشت:

۱. اگر خط AB موازی خط L نباشد و نقطه‌ی M نیز روی خط L قرار نداشته باشد، مسئله دو جواب دارد

صفحه‌ای است که بر دو خط متقاطع L و AB می‌گذرد.

پس در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. صفحه‌ی P_v در شکل «ج» یکی از صفحه‌های جواب مسئله است.



شکل ج

روش جبری - مختصات

دستگاه محورهای مختصات قائم $O-xyz$ را در نظر

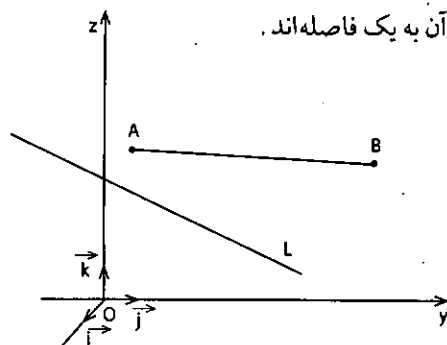
می‌گیریم. در این دستگاه مختصات فرض می‌کنیم

$A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ و خط به معادله‌ی

$L: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ باشد. می‌خواهیم معادله‌ی

صفحه‌ای را بنویسیم که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B

از آن به یک فاصله‌اند.



می‌دانیم که در حالت کلی، دو صفحه جواب مسئله

هستند:

الف) صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط

AB می‌گذرد؛ با توجه به این که:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه می‌توان از روش‌های

متفاوتی استفاده کرد. یکی از آن‌ها، تعیین دو نقطه‌ی دل‌خواه

C و D از خط L و سپس نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر

سه نقطه‌ی M ، C و D است. روش دیگر هم این است که

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L را بنویسیم و از بین

صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص کنیم که بر

نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد.

ب) صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد با خط AB موازی است.

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز روش‌های متفاوتی

وجود دارند؛ از جمله: بردار قائم صفحه را که با

بردار $\vec{L} \wedge \vec{AB}$ هم‌راستا است، تعیین و نقطه‌ای دل‌خواه

روی خط L اختیار می‌کنیم. حال با داشتن یک نقطه از صفحه

و بردار قائم آن معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

در ادامه، برای روشن‌تر شدن این روش حل (روش جبری

- مختصاتی) چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. دو نقطه‌ی $A = (2, -1, 3)$ و $B = (-2, 3, 1)$ و خط

$L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ی را

بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک

فاصله‌اند.

حل: الف) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M

وسط پاره خط AB می‌گذرد.

روش اول: دو نقطه دل‌خواه C و D از خط L را مشخص

می‌کنیم. داریم:

$$C = (-1, 2, 0) \text{ و } D = (2, 4, -1)$$

اکنون مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست

می‌آوریم. داریم:

$$M \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \Rightarrow M = (0, 1, 2) \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases}$$

حال معادله‌ی صفحه‌ی P گذرنده بر سه نقطه‌ی C ، D و

M را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز به

روش‌های متفاوتی عمل کنیم؛ از جمله:

$$\vec{CD} = (2 + 1, 4 - 2, -1 - 0) = (3, 2, -1)$$

$$\vec{CM} = (0 + 1, 1 - 2, 2 - 0) = (1, -1, 2)$$

$$\vec{CD} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow -3 + 6\lambda + \lambda + 8 = 0 \Rightarrow 7\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{7}$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{5}{7})x - 3y + 3(-\frac{5}{7})z + (-\frac{5}{7}) + 8 = 0$$

$$\frac{9}{7}x - 3y - \frac{15}{7}z + \frac{51}{7} = 0 \Rightarrow 9x - 21y - 15z + 51 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله که همان معادله‌ی صفحه‌ی به دست آمده در روش اول است.

روش سوم

می‌دانیم معادله‌ی صفحه‌ای که بر سه نقطه‌ی (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) و (x_3, y_3, z_3) می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به این مطلب و این که نقطه‌ی $M = (0, 1, 2)$ وسط پاره‌خط AB یک نقطه از این صفحه و $C = (-1, 2, 0)$ و $D = (2, 4, -1)$ دو نقطه‌ی دیگر از خط L و متعلق به این صفحه هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-0) + (-7)(y-1) + (-5)(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

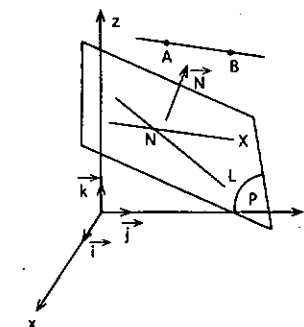
معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

ب) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است.

این صفحه را P می‌نامیم. معادله‌ی آن را به روش‌های متفاوتی می‌توان به دست آورد:

روش اول:

بردار قائم صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است، حاصل ضرب برون‌ی این



$$\Rightarrow \vec{N}_P = (2, -7, -5)$$

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+1) - 7(y-2) - 5(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

نکته: در این حالت به سادگی می‌توان نشان داد که AB موازی L نیست، زیرا پارامترهای هادی $\vec{AB}$ و خط L متناسب نیستند. هم‌چنین نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L نیست، زیرا مختصات M در معادله‌ی L صدق نمی‌کند.

روش دوم

۱. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را تعیین می‌کنیم.

$$M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}) = (0, 1, 2)$$

$$\Rightarrow M = (0, 1, 2)$$

۲. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

داریم:

$$P_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x+2 = 3y-6$$

$$\Rightarrow P_1: 2x - 3y + 8 = 0$$

$$P_2: \frac{x+1}{3} = \frac{z}{-1} \Rightarrow 3z = -x-1$$

$$\Rightarrow P_2: x + 3z + 1 = 0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda(x + 3z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda x + 3\lambda z + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

معادله‌ی دسته‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L

۳. صفحه‌ای از این دسته صفحه را مشخص می‌کنیم که از

نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. به این منظور، مختصات نقطه‌ی M باید در معادله‌ی دسته صفحه صدق کند.

داریم:

$$M = (0, 1, 2) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}} (2+\lambda)(0) - 3(1)$$

$$+ 3\lambda(2) + \lambda + 8 = 0$$

روش دوم:

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص می‌کنیم که با خط AB موازی است. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را قبلاً نوشتیم. داریم:

$$(2+\lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

از طرف دیگر داشتیم:

$$\vec{AB} = (-4, 4, -2) \text{ یا } \vec{AB} = (-2, 2, -1)$$

از آن جا:

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} = (2+\lambda, -3, 3\lambda), \vec{V}_{\vec{AB}} = (-4, 4, -2)$$

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \perp \vec{V}_{\vec{AB}} \Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \times \vec{V}_{\vec{AB}} = 0$$

$$(2+\lambda)(-2) + (-3)(2) + (3\lambda)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 2\lambda - 6 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\lambda = -2 \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}} (-3+2)x - 3y + 3(-2)z - 2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow -3y - 6z + 6 = 0 \Rightarrow y + 2z - 2 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و موازی AB؛ یعنی جواب دیگر مسئله، که در روش اول نیز همین جواب به دست آمد.

مثال ۲. دو نقطه‌ی $A = (1, 0, 2)$ و $B = (-3, -4, 0)$ و خط $L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: بردار هادی راستای AB و بردار هادی خط L را به دست می‌آوریم تا وضع آن‌ها را نسبت به هم مشخص کنیم. داریم:

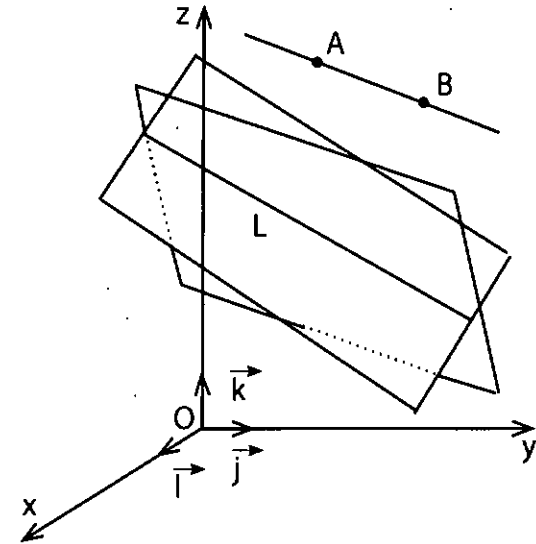
$$A(1, 0, 2), B = (-3, -4, 0) \Rightarrow \vec{AB} = (-3-1, -4-0, 0-2)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, -4, -2), L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (2, 2, 1), \frac{p}{2} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$\frac{q}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \frac{r}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

دو بردار یعنی $\vec{V}_P = \vec{V}_L \times \vec{V}_{AB}$ است. این بردار را مشخص می‌کنیم. داریم:



$$A = (3, -1, 3), B = (-2, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-2-3, 2+1, 1-3)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, 4, -2), L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (3, 2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (0)\vec{i} + (-10)\vec{j} + (-20)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_P = (0, -10, -20) \text{ یا } \vec{N}_P = (0, 1, 2)$$

اکنون یک نقطه از خط L را نیز مشخص می‌کنیم. داریم:
 $E = (-1, 2, 0) \in L$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی E و عمود بر بردار $\vec{N}$

را می‌نویسیم. داریم:

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 0(x+1) + 1(y-2) + 2(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow P: y + 2z - 2 = 0 \quad \text{معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله}$$

مثال ۳. خط $L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ و دو نقطه‌ی $A = (2, -1, 4)$ و $B = (0, 1, -2)$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را مشخص کنید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: وضع خط AB و خط L و هم‌چنین وضع نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را نسبت به خط L مشخص می‌کنیم. داریم:

$$A = (2, -1, 4), B = (0, 1, -2) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, -6)$$

$$\vec{V}_L = (4, 2, 3), \frac{-2}{4} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{3} \Rightarrow AB \text{ موازی } L \text{ نیست}$$

در معادله‌ی L

$$M = (1, 0, 1) \xrightarrow{\frac{1-1}{4} = \frac{0}{2} = \frac{1-1}{3} \Rightarrow 0=0=0}$$

پس نقطه‌ی M وسط پاره خط AB روی خط L قرار دارد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد و این بی‌شمار جواب دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد (یکی از صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ی گذرنده بر دو خط متقاطع L و AB است). معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم.

$$L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$\Rightarrow P_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} \text{ یا } \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow x-1=2y \Rightarrow P_1: x-2y-1=0$$

$$P_2: \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow P_2: 3y-2z+2=0$$

$$\Rightarrow \alpha(x-2y-1) + \beta(3y-2z+2) = 0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی جواب مسئله (دسته صفحه‌ی گذرنده بر L).

نکته: دو صفحه‌ی P_1 و P_2 ، دو صفحه‌ی جواب مسئله‌اند که به ازای $\alpha=0$ و $\beta=0$ به دست می‌آیند. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AB در این حالت، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه AB (غیر از نقطه‌ی M) را در معادله‌ی دسته صفحه قرار دهیم.

به ازای مقادیر دیگری که به جای عدددهای حقیقی α و β قرار می‌دهیم، معادله‌ی صفحه‌های دیگر جواب مسئله به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = -2 \Rightarrow AB \parallel L$$

$$A = (1, 0, 2) \xrightarrow{\frac{1}{4} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{2-1}{3}} A \notin L$$

پس خط AB موازی با L و متمایز از آن است. بنابراین آنچه در رویکرد هندسی بحث شد، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد. مجموعه این جواب‌ها، دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد. معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم. داریم:

$$L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow P_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = y-1 \Rightarrow P_1: x-y+1=0$$

$$P_2: \frac{x}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 2z \Rightarrow P_2: x-2z=0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow x-y+1+\lambda(x-2z)=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L و جواب مسئله

$$\Rightarrow (1+\lambda)x - y - 2\lambda z + 1 = 0$$

نکته: یکی از این صفحه‌ها بر L و AB می‌گذرد. فاصله‌های دو نقطه‌ی A و B از این صفحه مساوی صفر است، چون این دو نقطه روی صفحه قرار دارند. در مورد بقیه‌ی صفحه‌های جواب مسئله، فاصله‌های مساوی A و B از هر یک از صفحه‌ها مخالف صفر است. به ازای مقادیر گوناگون λ می‌توان معادله‌ی این صفحه‌ها را مشخص کرد. لازم به ذکر است، دو صفحه‌ی صفحه‌های جواب مسئله، همان صفحه‌های $P_1: x-y+1=0$ و $P_2: x-2z=0$ هستند که به ازای $\lambda=0$ و $\lambda \rightarrow \infty$ به دست می‌آیند.

نکته: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را به صورت $\alpha P_1 + \beta P_2 = 0$ که α و β عدددهای حقیقی‌اند نیز می‌توان نشان داد؛ یعنی به صورت: $\alpha(x-y+1) + \beta(x-2z) = 0$. در این حالت به ازای $\alpha=0$ ، $P_2: x-2z=0$ ، و به ازای $\beta=0$ ، صفحه‌ی $P_1: x-y+1=0$ به دست می‌آید و به ازای بقیه‌ی مقدارهایی که به α و β نسبت می‌دهیم، صفحه‌های دیگر جواب مسئله حاصل می‌شود. صفحه‌ی گذرنده بر L و AB را نیز می‌توان مشخص کرد که یکی از جواب‌های مسئله است.