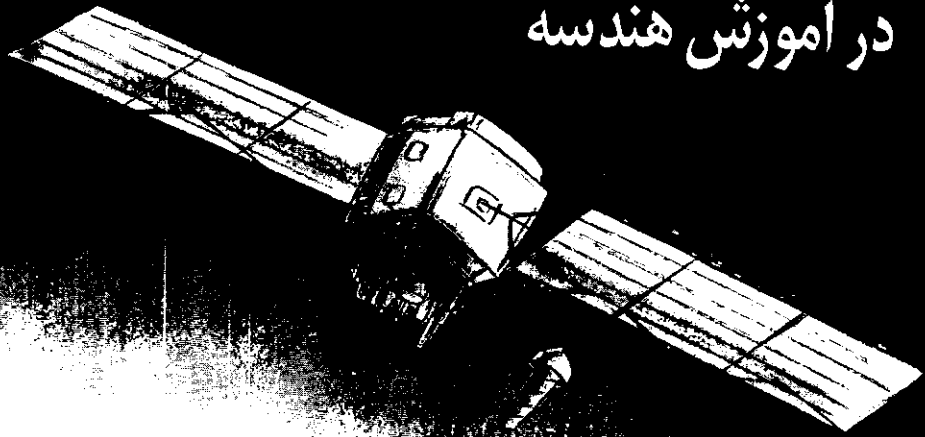


رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه



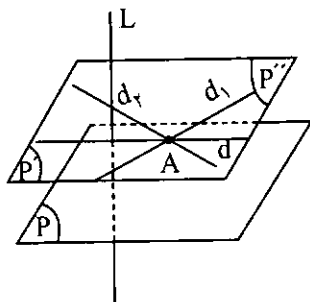
اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات ، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است .
از استانداردهای موضوعی NCTM

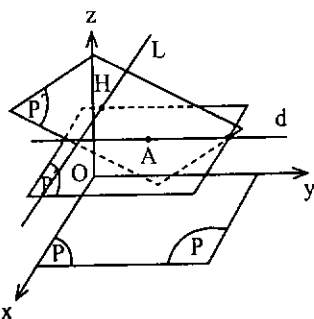
در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم .

نکته ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی ، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه ، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله های هندسه مانند «تحدید یا کوچک کردن مسئله ، مسئله را حل شده فرض می کنیم ، چگونگی به کارگیری مکان های هندسی ، انواع روش های حل یک مسئله ، ...» را مطرح می کنیم . در ضمن لازم است گفته شود ، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی حل می کنیم ، کلیدی هستند و از کتاب های هندسه ی ۱ و هندسه ی ۲ انتخاب شده اند تا دانش آموزان بتوانند مسئله های دیگر این کتاب ها را به راحتی با این دو رویکرد حل کنند .

بحث: جواب مسئله فصل مشترک دو صفحه ی P' و P'' است که از نقطه ی A می گذرد. پس وضعیت این دو صفحه، معین کننده ی وجود جواب و تعداد جواب است. چون صفحه های P' و P'' هر دو از نقطه ی A می گذرند، یعنی حداقل یک نقطه ی مشترک دارند، پس دو حالت منطبق یا متقاطع می توانند داشته باشند. در حالت انطباق، تعداد جواب های مسئله بی شمار است، یعنی بی شمار خط وجود دارد که از نقطه ی A می گذرد، با صفحه ی P موازی است و بر خط L عمود است (شکل الف) و در حالت متقاطع، مسئله جواب یکتایی دارد که همان خط d است (شکل ب).



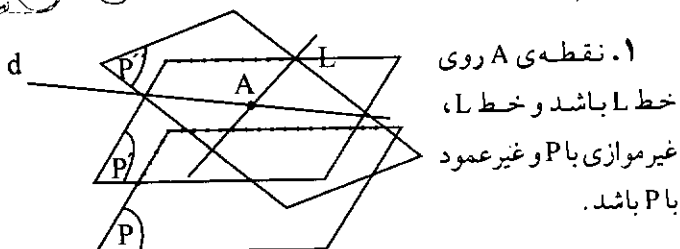
(الف)



(ب)

P' و P'' وقتی برهم منطبق اند که L و P بر هم عمود باشند. در غیر این صورت، P' و P'' متقاطع خواهند بود.

نکته: بحث در وجود جواب تعداد جواب های مسئله را می توان به روش دیگری نیز انجام داد. بدین ترتیب که حالت های متفاوتی را که نقطه ی A ، خط L و صفحه ی P نسبت به هم می توانند داشته باشند، در نظر بگیریم. این حالت ها عبارت اند از:



۱. نقطه ی A روی خط L باشد و خط L ، غیر موازی با P و غیر عمود با P باشد.

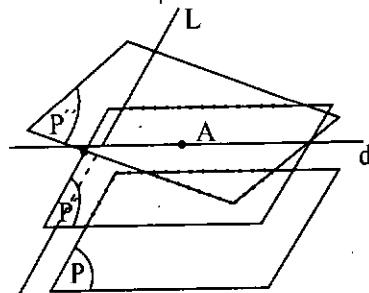
در این حالت دو صفحه ی P' و P'' متمایزاند و در یک خط که همان خط d (جواب مسأله) است، متقاطع هستند.

مسئله ۱۱. برای یک خط دل خواه L و صفحه ی دل خواه P و نقطه ی دل خواه A ، آیا خطی وجود دارد که از A بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنابر وضعیت های متفاوت بین A ، L و P ، چند جواب وجود دارد؟ مسئله را در حالتی کلی حل می کنیم که نقطه ی A روی خط L و صفحه ی P نباشد و خط L هم غیر موازی با صفحه ی P و غیر عمود بر این صفحه باشد.

الف) حل با روش هندسی

برای حل این مسئله از راهبرد «مسئله را حل شده فرض می کنیم»، استفاده می کنیم؛ راهبردی بسیار مهم و کارآمد برای حل مسئله ها، به ویژه مسئله های هندسه. در این راهبرد، با حل شده در نظر گرفتن مسئله، ویژگی هایی از آن را استخراج و از آن ها برای حل مسئله استفاده می کنیم. اینک به این راه حل توجه کنید:

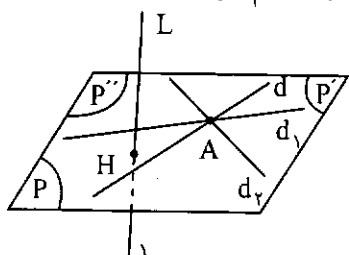
فرض می کنیم مسئله حل شده و خط d جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه ی A می گذرد، با صفحه ی P موازی و بر خط L عمود است. چون خط d از نقطه ی A می گذرد و با صفحه ی P موازی است، پس در صفحه ای مانند P' قرار دارد که از نقطه ی A به موازات صفحه ی P رسم می شود. زیرا می دانیم، مکان هندسی خط هایی که از یک نقطه به موازات یک صفحه رسم می شوند، یک صفحه است که از آن نقطه به موازات آن صفحه رسم می شود.



از طرفی خط d از نقطه ی A می گذرد و بر خط L عمود است، پس در صفحه ای مانند P'' قرار دارد که از نقطه ی A عمود بر خط L رسم می شود. زیرا می دانیم، مکان هندسی خط هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می شوند، یک صفحه است که از آن نقطه عمود بر آن خط رسم می شود.

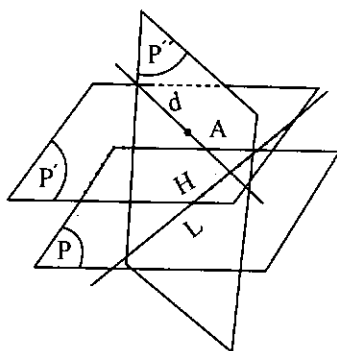
بنابراین، برای حل مسئله، از نقطه ی A صفحه ی P' را موازی صفحه ی P و سپس از همین نقطه ی A صفحه ی P'' را عمود بر خط L رسم می کنیم. فصل مشترک این دو صفحه خط d ، جواب مسئله است که از نقطه ی A نیز می گذرد.

۶. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، دو صفحه‌ی P' و P'' بر صفحه‌ی P منطبق‌اند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. یعنی هر خطی که از A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است.

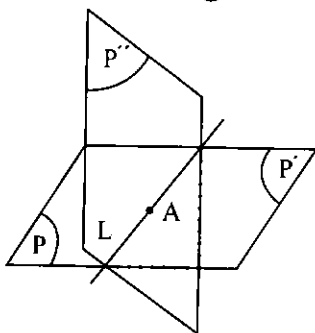


۷. نقطه‌ی A و خط L هر دو روی صفحه‌ی P قرار داشته باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایزند. این حالت شبیه حالت ۵ است.

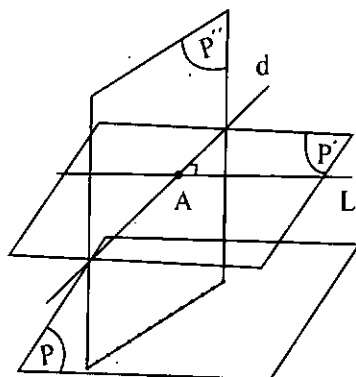
۸. نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P و خط L روی صفحه‌ی P واقع باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند.



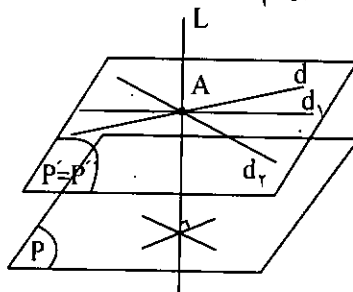
۹. نقطه‌ی A روی خط L و هر دو روی صفحه‌ی P باشند. در این حالت نیز مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P' روی صفحه‌ی P قرار دارد).



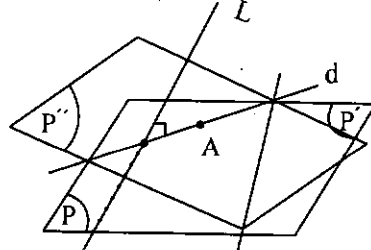
۲. نقطه‌ی A روی خط L و خط L موازی با صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند.



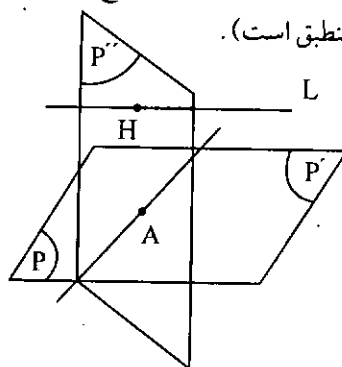
۳. نقطه‌ی A روی خط L و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق‌اند.



۴. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L غیر عمود بر P موازی با P باشد. در این حالت، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است و دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند. پس تنها یک خط جواب مسئله است.



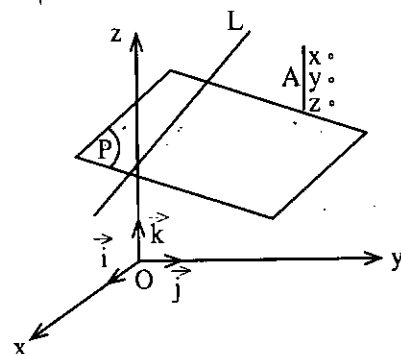
۵. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L موازی صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است).



نکته: اگر حالت دیگری نیز وجود دارد، آن را مشخص کنید و برای مجله‌ی برهان متوسطه بفرستید. در کدام حالت ممکن است خط d که تنها جواب مسئله است، بر خط L که در فرض مسئله داده شده است، منطبق باشد؟ اگر چنین حالتی وجود دارد، با ذکر دلیل، آن را بنویسید.

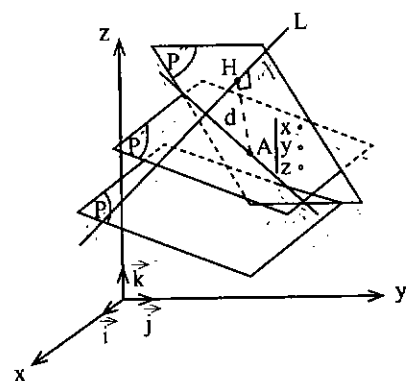
ب) حل باروش جبری - مختصات

دستگاه مختصات دکارتی قائم $O-xyz$ با بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در این دستگاه، نقطه‌ی A به مختصات $A = (x_0, y_0, z_0)$ ، خط L به معادله‌ی $L: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax + by + cz + d = 0$ باشد. می‌خواهیم از نقطه‌ی A خطی رسم کنیم که با صفحه‌ی P موازی و بر خط L هم عمود باشد.



می‌دانیم مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه، موازی آن صفحه رسم می‌شود. این صفحه را P' می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌های موازی صفحه‌ی P به صورت کلی $ax + by + cz + d' = 0$ (۱) است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A می‌گذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی بالا صدق کند. یعنی داشته باشیم:

$$A = (x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{(1)} ax_0 + by_0 + cz_0 + d' = 0 \\ \Rightarrow d' = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$



بنابراین، معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت $P': ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$ (۲) است. از طرفی، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن

خط عمود می‌شود. این صفحه را P'' می‌نامیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌هایی که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ عمود می‌شوند، به صورت $px + qy + rz + d'' = 0$ (۳) است، زیرا بردار نرمال این صفحه‌ها، همان بردار هادی خط L یعنی $\vec{V}_{P''} = \vec{V}_L = (p, q, r)$ است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ای از این مجموعه صفحه که از نقطه‌ی $A = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد، باید مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی (۳) صدق کند. داریم:

$$A = (x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{(3)} px_0 + qy_0 + rz_0 + d'' = 0 \\ \Rightarrow d'' = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

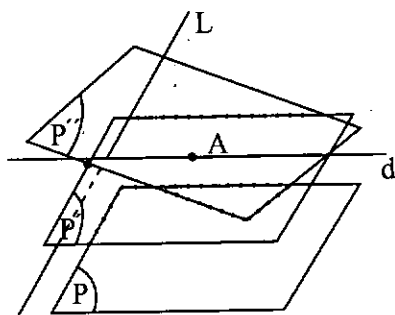
$$\Rightarrow P'': px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0 \quad (4)$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که آن را خط d می‌نامیم و از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، جواب مسئله است که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$d: \begin{cases} ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \\ px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0 \end{cases}$$

نکته: در صورت لزوم می‌توان معادله‌ی خط d را به صورت کانونیک درآورد.

نکته‌ی بسیار مهم: در قسمت‌های قبل رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی گفتیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات، در ساده‌تر شدن یا مشکل‌تر شدن حل مسئله نقش بسزایی دارد و این مطلب را با ذکر نمونه‌هایی نشان دادیم. در مورد این مسئله نیز روش حل بیان شده‌ی جبری - مختصاتی را در حالت کلی در نظر گرفتیم. حال اگر دستگاه مختصات دکارتی را چنان در نظر بگیریم که صفحه‌ی P به عنوان صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات باشد (شکل). با فرض



در صورتی که بخواهیم معادله‌ی کانونیک خط d را به دست آوریم، باید معادله‌ی دو صفحه‌ی مصور این خط روی دو صفحه‌ی مختصات را به دست آوریم.

(صفحه‌های مصور یک خط، سه صفحه هستند که بر آن خط می‌گذرند و بر صفحه‌های مختصات عمودند). خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P': x - 2y + z + 4 &= 0 \\ P'': 3x - y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x + 3y - 7 = 0 \quad (1)$$

$$-P' + 2P'' = 0 \Rightarrow 5x + 3z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow x = -3y + 7 \quad (3), (2) \Rightarrow x = \frac{-3z + 2}{5} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow x = -\frac{3y - 7}{1} = \frac{-3z + 2}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - \frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{-1}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-5}$$

معادله‌ی کانونیک خط d ، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که جواب مسئله است.

مثال ۲. نقطه‌ی $A = (0, -2, 1)$ و خط

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: به طوری که دیده می‌شود، در این مسئله، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xy از دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ در فضا منطبق است: بنابراین، محاسبه‌ها و به طور کلی راه حل مسئله ساده‌تر خواهد بود. برای حل این مسئله، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$$A = (0, -2, 1) \in P' \Rightarrow P': z = z_0 \Rightarrow z = 1$$

$$\vec{V}_L(2, 3, 4) = \vec{V}_{P''} \Rightarrow P'': 2(x - 0) + 3(y + 2) + 4(z - 1) = 0 \Rightarrow P'': 2x + 3y + 4z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} z = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x + 3y = -6$$

$$\Rightarrow 2x = -3(y + 2) \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{2}} = \frac{y + 2}{-1}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} \frac{x}{-\frac{3}{2}} = \frac{y + 2}{-1} \\ z = 1 \end{cases}$$

معادله‌ی کانونیک خط d ، که جواب مسئله است

$$L: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \quad A = (x_1, y_1, z_1)$$

صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت (۱) $z = z_0$ و معادله‌ی صفحه‌ی P'' که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، به همان صورت (۲) $px + qy + rz - (px_1 + qy_1 + rz_1) = 0$ خواهد بود. در نتیجه، معادله‌ی خط d ، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} P': z &= z_0 \\ P'': px + qy + rz - (px_1 + qy_1 + rz_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} \frac{x - x_1}{-q} = \frac{y - \frac{px_1 + qy_1}{r}}{p} \\ z = z_0 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی کانونیک } d$$

اینک مثال‌هایی از روش جبری - مختصاتی را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نقطه‌ی $A = (1, 2, -1)$ ، خط

$$P: x - 2y + z - 3 = 0 \quad L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

داده شده‌اند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: از معادله‌ی خط L و صفحه‌ی P مشخص است که دستگاه مختصات قائم در نظر گرفته شده در این مسئله، حالت کلی دارد. بنابراین، محاسبات برای حل مسئله، حالت کلی دارد، کم و ساده نیست. بنابراین، برای حل مسئله، معادله‌های صفحه‌ی P' (که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود) و P'' (که از A عمود بر L رسم می‌شود) را می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را که جواب مسئله است، پیدا می‌کنیم. داریم:

$$P: x - 2y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{V}_P = (1, -2, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{P'} = \vec{V}_P = (1, -2, 1)$$

$$A = (1, 2, -1) \in P'$$

$$\Rightarrow P': a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 1(x - 1) - 2(y - 2) + 1(z + 1) = 0 \Rightarrow P': x - 2y + z + 4 = 0$$

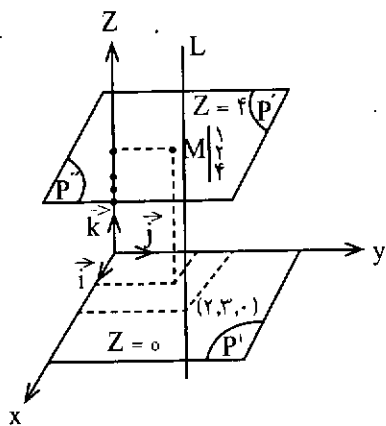
$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{V}_L = (3, -1, 2) = \vec{V}_{P''}$$

$$A = (1, 2, -1) \in P''$$

$$\Rightarrow P'': 3(x - 1) - 1(y - 2) + 2(z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow P'': 3x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی خط خواسته شده}$$



برای حل، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و خط d ، فصل مشترک آن‌ها را، به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} P' \parallel P, A = (1, 2, 4) \in P' &\Rightarrow P': z = 4 \quad (1) \\ \vec{L} \parallel P: \vec{V}_L = (0, 0, 1), \vec{V}_P = (0, 0, 1) &\Rightarrow \vec{V}_L \parallel \vec{V}_P \\ \Rightarrow \vec{L} \parallel P &\Rightarrow P'': 0(x-1) + 0(y-2) + 1(z-4) = 0 \\ \Rightarrow P'': z - 4 = 0 &\Rightarrow P'': z = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

به‌طوری‌که دیده می‌شود، دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق هستند. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A در این دو صفحه‌ی منطبق برهم می‌گذرد، جواب مسئله است. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد.

برای تعیین معادله‌ی یک خط دل‌خواه از این مجموعه خط، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از صفحه‌ی مشترک P' و P'' را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} B = (0, 0, 4) \in P' = P'' \text{ و } A = (1, 2, 4) \\ \Rightarrow AB: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-4}{4-4} &\Rightarrow AB = d_1: \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} \\ z-4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow d_1: \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

و اینک یک جواب دیگر:

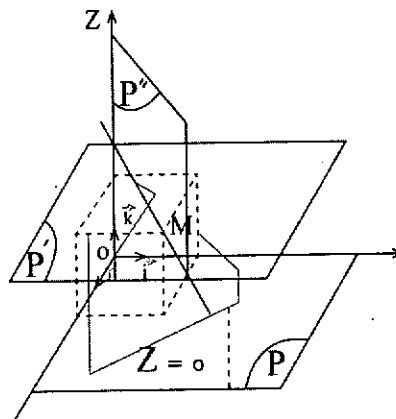
$$\begin{aligned} C = (3, 1, 4) \in P' = P'' \text{ و } A = (1, 2, 4) \\ \Rightarrow AC: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-4}{4-4} &\Rightarrow AC: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ z-4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow AC = d_2: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

با همین روش، معادله‌ی خط‌های دیگر جواب مسئله را می‌توان به دست آورد.

مثال ۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $M = (2, 2, 2)$ به موازات صفحه‌ی $P: z = 0$ رسم می‌شود و بر

$$\text{خط } L: \begin{cases} x = y - 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ عمود است.}$$

حل: به‌طوری‌که دیده می‌شود، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xoy منطبق است ($z = 0$ معادله‌ی صفحه‌ی xoy است) و خط L نیز موازی صفحه‌ی P است، زیرا داریم:



$$\vec{V}_P = (0, 0, 1), \vec{V}_L = (1, 1, 0) \Rightarrow \vec{V}_P \cdot \vec{V}_L = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P - \vec{V}_L \Rightarrow \vec{L} \parallel P$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی M موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از M عمود بر خط L رسم می‌شود می‌نویسیم و معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' را که خط d جواب مسئله است، به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} P': z = z_0 \Rightarrow P': z = 2 \text{ و } \vec{V}_{P'} = \vec{V}_L = (1, 1, 0) \\ P'': 1(x-2) + 1(y-2) + 0(z-2) = 0 \Rightarrow P'': x + y - 4 = 0 \\ \Rightarrow d: \begin{cases} z = 2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{y-4}{-1} \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A = (1, 2, 4)$ موازی صفحه‌ی $P: z = 0$ و عمود بر خط $L: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ باشد.

حل: در این مسئله، صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات $O-xyz$ و خط L عمود بر صفحه‌ی P یا در این مسئله، عمود بر صفحه‌ی xoy است.