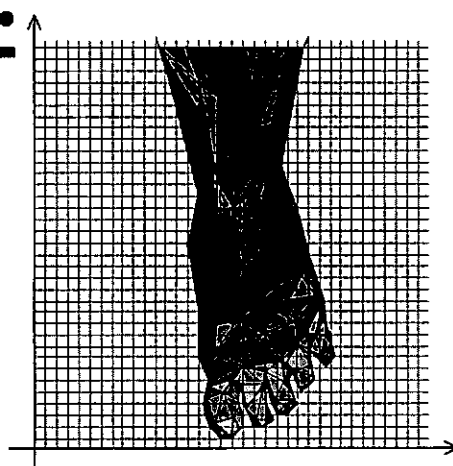




رویکرد هندسی و جبری - مختصات در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله های هندسه مانند «تحدید یا کوچک تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان های هندسی و استفاده از روش های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه های جدیدی برای حل مسئله های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب های درسی هندسه ی (۱) و هندسه ی (۲) انتخاب شده اند تا دانش آموزان بتوانند مسأله های دیگر این کتاب ها، هم چنین مسأله های دیگر از کتاب های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

حل:

الف) روش هندسی

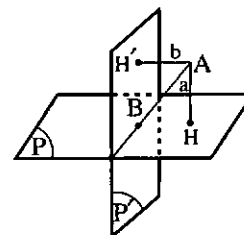
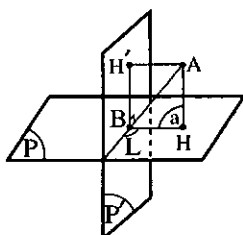
فصل مشترک دو صفحه ی P و P' را L، پای عمود وارد از

A بر صفحه ی P را H و پای عمود وارد از A بر صفحه ی P' را

مسئله ی ۱۳. اگر دو صفحه ی P و P' برهم عمود باشند و

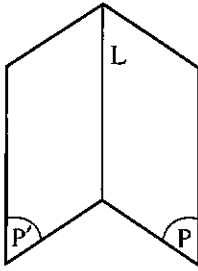
نقطه ی A از دو صفحه ی P و P' به ترتیب به فاصله های a و b باشد، ثابت کنید فاصله ی نقطه ی A تا فصل مشترک این دو

صفحه برابر است با $\sqrt{a^2 + b^2}$.

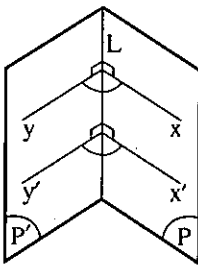


نکته: اگر نقطه‌ی A روی خط L باشد، فاصله‌ی A از L را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی مسطحه‌ی یک فرجه، هرگاه دو صفحه‌ی P و P' در خط L یکدیگر را قطع کنند، چهار فرجه پدید می‌آید که دو به دو متقابل به رأس اند. در واقع، هر دو نیم صفحه با مرز مشترک L یک فرجه پدید می‌آورند که شکل، یکی از این فرجه‌ها را نشان می‌دهد.



این فرجه را به صورت $P-L-P'$ نمایش می‌دهند. L را یال فرجه و P و P' را دو وجه فرجه می‌نامند. به همین دلیل، فرجه را زاویه‌ی دو وجهی نیز می‌نامند. اکنون اگر از نقطه‌ی O واقع بر L دو خط Ox و Oy را به ترتیب در دو صفحه‌ی P و P' عمود بر L رسم کنیم، یعنی $Oy \perp L$ و $Oy \subset P'$ ، $Ox \perp L$ و $Ox \subset P$ ، زاویه‌ی xoy را زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ می‌توانیم از یک نقطه‌ی اختیاری مانند O واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا صفحه‌های P و P' را به ترتیب در فصل مشترک Ox و Oy قطع کند. زاویه‌ی xoy زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ است. بدیهی است که اندازه‌ی این زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه، به جای نقطه‌ی O روی یال L بستگی ندارد. یعنی اگر از نقطه‌ی دیگری مانند O' واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا در صفحه‌ی P و P' را در O'x' و O'y' قطع کند، زاویه‌ی x'o'y' نیز زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ است. یعنی $x'o'y' = xoy$ است.

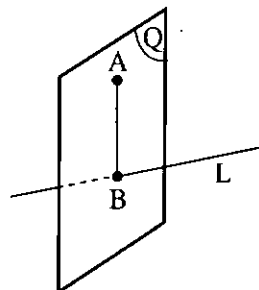


نکته: از تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر فرجه‌ی $P-L-P'$ و نقطه‌ی A درون این فرجه و غیر واقع بر

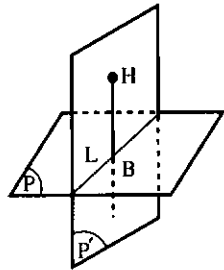
H' می‌نامیم. بر دو خط متقاطع AH و AH' یک صفحه می‌گذرد که آن را صفحه‌ی Q می‌نامیم. این صفحه بر خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' عمود است، زیرا L بر AH عمود است. چون خط AH که بر صفحه‌ی P عمود است، بر تمام خط‌های صفحه‌ی P و از جمله بر خط L عمود می‌باشد، هم چنین L بر خط AH' نیز عمود است. زیرا به دلیل این که AH' بر صفحه‌ی P' عمود است، بر تمام خط‌های این صفحه و از جمله بر خط L که یک خط از صفحه‌ی P' می‌باشد نیز عمود است. در نتیجه، خط L بر صفحه‌ی Q عمود است. اکنون نقطه‌ی برخورد صفحه‌ی Q با خط L را B می‌نامیم و از B به H و H' وصل می‌کنیم. چون خط L بر صفحه‌ی Q عمود است، پس بر تمام خط‌های این صفحه و در نتیجه بر AB عمود است. در نتیجه، پاره خط AB فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است. یعنی پاره خطی است که می‌خواهیم ثابت کنیم اندازه‌ی آن $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ است.

از عمود بودن صفحه‌ی Q بر خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' نتیجه می‌شود که زاویه‌ی $\widehat{HBH'}$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی حاصل از دو صفحه‌ی P و P' است. چون این دو صفحه بر هم عمودند، پس $\widehat{HBH'} = 90^\circ$ است. از طرف دیگر، در چهارضلعی $AH\widehat{BH'}H'$ ، $\widehat{H} = 90^\circ$ و $\widehat{H'} = 90^\circ$ است. پس زاویه‌ی چهارم این چهارضلعی یعنی $\widehat{HAH'} = 90^\circ$ و چنین معنی می‌دهد که چهارضلعی مورد نظر مستطیل است. در این مستطیل، بنا به فرض مسئله، دو ضلع $AH = a$ و $AH' = b$ هستند. بنابراین، اندازه‌ی قطر آن $AH = \sqrt{a^2 + b^2}$ و حکم مسئله درست است.

تعریف فاصله‌ی نقطه از خط. نقطه‌ی A و خط L را که بر A نمی‌گذرد، در نظر می‌گیریم. اگر از A صفحه‌ی Q را که منحصر به فرد است، بر خط L عمود کنیم تا این خط را در نقطه‌ی ثابت B قطع کند، اندازه‌ی پاره خط AB را فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L می‌نامند.

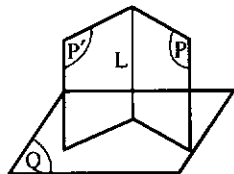


از نقطه ی A عمود AH را بر صفحه ی P و عمود AH' را بر صفحه ی P' رسم می کنیم. می دانیم که بنا به فرض $AH=a$ و $AH'=b$ است (شکل الف). در صفحه ی Q قرار دارند، زیرا می دانیم اگر دو صفحه ی برهم عمود باشند و از یک نقطه واقع در یک صفحه، عمودی بر صفحه ی دیگر رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می گیرد (شکل ب).



(شکل ب)

فصل مشترک دو صفحه ی Q و P' خط $H'b$ است که بر صفحه ی P عمود است، زیرا P، Q و سه صفحه ی دو به دوی عمود بر هم هستند و می دانیم که اگر دو صفحه بر یک صفحه عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است (شکل پ).



(شکل پ)

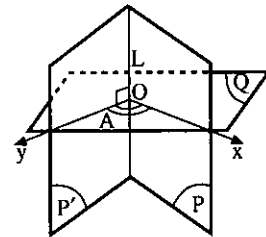
از عمود بودن $H'b$ بر صفحه ی P نتیجه می شود که $H'BH = 90^\circ$ است. چهارضلعی AHBH' که در صفحه ی Q است، سه زاویه ی قائمه دارد که عبارت اند از $H'BH = \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$. پس این چهارضلعی مستطیل است. ضلع های مجاور این مستطیل $AH=a$ و $AH'=b$ هستند. پس اندازه ی قطر آن $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ است که همان فاصله ی نقطه ی A از خط L فصل مشترک دو صفحه ی P و P' است و حکم مسئله درست است.

مثال ۱. دو صفحه ی عمود بر هم P و P' و نقطه ی A به فاصله ی ۸ از صفحه ی P و به فاصله ی ۶ از صفحه ی P' قرار دارد. فاصله ی نقطه ی A از فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

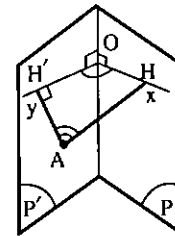
حل: با توجه به مسئله ی حل شده، $a=8$ و $b=6$ است. پس فاصله ی خواسته شده برابر است با:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

دو صفحه ی P و P' داده شده باشد و از این نقطه صفحه ای مانند Q بر L رسم کنیم تا یال L را در O و صفحه های P و P' را در Ox و Oy قطع کند، زاویه ی xOy همان زاویه ی مسطحه ی فرجه ی $P-L-P'$ است.



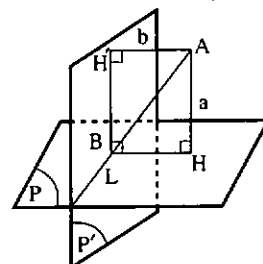
نتیجه: اگر از A عمود AH را بر صفحه ی P و عمود AH' را بر صفحه ی P' فرود آوریم، صفحه ی HAH' همان صفحه ای است که از A عمود بر یال L رسم می شود و اگر فصل مشترک این صفحه با صفحه های P و P' را به ترتیب Ox و Oy بنامیم، زاویه ی مسطحه ی فرجه ی $P-L-P'$ است.



به علاوه، به دلیل محاطی بودن چهارضلعی HAH'B، چون $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{H} + \hat{H}' = 180^\circ$ است، پس $\hat{H}AH' + \hat{H}OH' = 180^\circ$ ، یعنی دو زاویه ی $H'AH$ و $H'OH$ مکمل یکدیگرند.

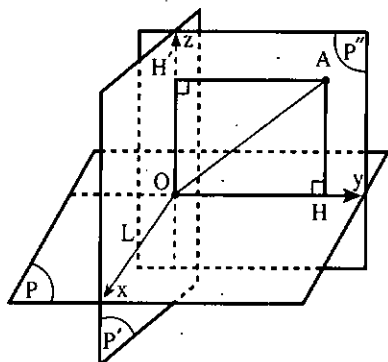
اثبات هندسی با روشی دیگر

فصل مشترک دو صفحه ی P و P' را L می نامیم. از نقطه ی A صفحه ی Q را عمود بر خط L رسم می کنیم و محل تلاقی Q با L را B می نامیم. طول پاره خط AB همان فاصله ی نقطه ی A از L، فصل مشترک دو صفحه ی P و P' است. خط L در دو صفحه ی P و P' است، پس صفحه ی Q هم بر صفحه ی P و هم بر صفحه ی P' عمود است.



(شکل الف)

از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی b از صفحه‌ی P' داده شده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' که آن را L می‌نامیم، مساوی $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.



برای حل مسئله یا رویکرد جبری - مختصاتی، نخست باید یک دستگاه مختصات مناسب در فضا انتخاب کنیم. برای این کار، صفحه‌ی گذرنده بر AH (خطی که از A بر P عمود شده است) و AH' (خطی که از A بر صفحه‌ی P عمود شده است) را P'' می‌نامیم. این صفحه، بر دو صفحه‌ی P و P' عمود است. در واقع P، P' و P'' سه صفحه‌ی دوبه‌دوی عمود برهم عمود هستند. نقطه‌ی برخورد P'' با خط L را O می‌نامیم و خط‌های OH و OH' را رسم می‌کنیم. سه خط L، OH' و OH'' را روی این سه خط در نظر می‌گیریم. برای مثال OH' را Ox، Oy را روی خط L، و Oz را روی OH' می‌گیریم. در این صورت، نقطه‌ی A به مختصات $A = (0, b, a)$ است. با توجه به این که پاره‌خط AO همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است، پس داریم:

$$A = (0, b, a), O = (0, 0, 0) \Rightarrow AO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ = \sqrt{0 + b^2 + a^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2 + b^2}$$

پس حکم مسئله درست است.

نکته‌ی ۱. اگر در روش اثبات جبری - مختصاتی، صفحه‌های P و P' را به ترتیب صفحه‌ی xoy و xoz اختیار کنیم، اما صفحه‌ی yoz را صفحه‌ای غیر از HAH' اختیار کنیم، یعنی صفحه‌ای مانند P'' بگیریم (شکل ۱) نقطه‌ی A به مختصات زیر خواهند بود:

$$A = (x, b, a)$$

در این صورت، اگر پای عمود رسم شده از A را که روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است XB

مثال ۲. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P' داده شده‌اند. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲۵ از خط L، فصل مشترک این دو صفحه محسوب می‌شود و به فاصله‌ی ۲۴ از صفحه‌ی P واقع است. فاصله‌ی این نقطه از صفحه‌ی P' را تعیین کنید.

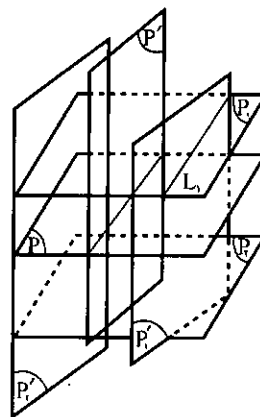
حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده (مسئله‌ی ۱۳)، $a = 24$ و $\sqrt{a^2 + b^2} = 25$ است.

بنابراین داریم:

$$\sqrt{24^2 + b^2} = 25 \Rightarrow 576 + b^2 = 625 \Rightarrow b^2 = 49 \Rightarrow b = 7$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P' ۷

مثال ۳. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P' با فصل مشترک L داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a و از صفحه‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b باشد.



حل: می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از یک صفحه‌ی داده شده مانند P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی a از آن است. که در دو طرف این صفحه قرار دارند. این دو صفحه را P1 و P2 می‌نامیم. هم‌چنین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از صفحه‌ی داده شده‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b واقع است، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P' به فاصله‌ی b از آن و در دو طرف آن است. این دو صفحه را P3 و P4 می‌نامیم. فصل مشترک‌های این چهار صفحه را که دو به دو عمود برهم نیز هستند، L1، L2، L3 و L4 می‌نامیم. این چهار خط جواب مسئله‌اند که با خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' نیز موازی هستند.

(ب) اثبات به روش جبری - مختصاتی

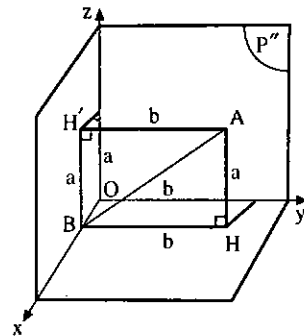
دو صفحه‌ی عمود برهم P و P' و نقطه‌ی A به فاصله‌ی a

بنامیم، نقطه‌ی B به مختصات زیر خواهد بود:

$$B = (x, 0, 0)$$

و از آنجا، طول پاره خط AB برابر است با:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (b - 0)^2 + (a - 0)^2} \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{0 + b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$



(شکل ۱)

به طوری که دیده می شود، محاسبه کمی طولانی تر و مشکل تر می شود.

در این حالت، فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = a$$

$$AH' = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = b \quad \text{از صفحه‌ی } P'$$

خواهد بود.

از طرف دیگر، مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد صفحه‌ی HAH' (یا همان صفحه‌ی Q که در راه حل هندسی دیدیم) باید محاسبه شود و سپس طول پاره خط AB به دست آید و ثابت شود که $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ است. اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی Q، باید نمودار نرمال این صفحه را به دست آوریم. این بردار قائم، از دستور زیر محاسبه‌ی بار $\vec{V}_P \wedge \vec{V}_{P'}$ است.

یعنی داریم:

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_P \wedge \vec{V}_{P'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

البته شرط $aa' + bb' + cc' = 0$ را نیز همواره باید در نظر داشته باشیم.

به طوری که دیده می شود، حل مسئله با انتخاب این دستگاه مختصات قائم در فضا، خیلی طولانی تر و مشکل تر از اولین راه حل جبری مختصاتی است که در آن صفحه‌های P و P' و صفحه‌ی Q (صفحه‌ای که از A بر دو صفحه‌ی P و P' عمود می شود) را به عنوان صفحه‌های مختصات اختیار کرده بودیم.

نکته‌ی ۲. اگر دستگاه مختصات قائم را در حالت کلی

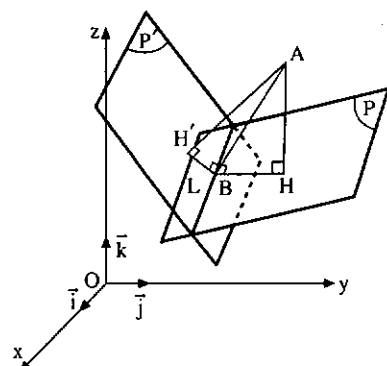
در نظر بگیریم، یعنی هیچ یک از صفحه‌های مختصات بر صفحه‌های P و P' منطبق نباشند، محاسبه طولانی تر و مشکل تر خواهد بود. در این حالت، $A(x_1, y_1, z_1)$ دو صفحه‌ی P و P' به معادله‌های:

$$P: ax + by + cz + d = 0, \quad P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

با شرط $aa' + bb' + cc' = 0$ خواهند بود.

با این فرض خط d فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' به معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ aa' + bb' + cc' = 0 \end{cases}$$



به طوری که دیده می شود، انتخاب دستگاه مختصات در راه حل جبری - مختصاتی، از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای هر یک از روش‌های ذکر شده‌ی جبری - مختصاتی، مثال‌هایی می توان مطرح کرد. ما برای آخرین حالت، یعنی حالتی که دستگاه مختصات را در حالت کلی گرفته ایم، مثالی ذکر می کنیم.

مثال: دو صفحه‌ی

$$P': x - 2y + 4z = 0, \quad P: 2x + y - 2z - 2 = 0$$

داده شده اند، اگر نقطه‌ی $A = (2, -1, 4)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با a و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P' را با b نمایش دهیم، ثابت کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی A از

خط L ، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

حل: شرط عمود بودن دو صفحه برقرار است، زیرا داریم:

$$\vec{V}_P = (2, 1, -2), \quad \vec{V}_{P'} = (1, -2, 0) \Rightarrow \vec{V}_P \cdot \vec{V}_{P'} = (2)(1) + (1)(-2) + (-2)(0) = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P \perp \vec{V}_{P'} \Rightarrow P \perp P'$$

اکنون معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' را به دست می‌آوریم. داریم:

$$P: \begin{cases} 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow L: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{5}$$

برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L ، از دستور

$$AB = \frac{|\vec{AM} \wedge \vec{L}|}{|\vec{L}|}$$

استفاده می‌کنیم که در آن بردار $\vec{L}$ بردار

هادی خط L و M نقطه‌ای دل‌خواه متعلق به L است. داریم:

$$M = (0, 2, 0) \in L, \quad A = (2, -1, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = (2, -3, 4), \quad \vec{L} = (4, 2, 5)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -23\vec{i} - 6\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{L} = (-23, -6, 16)$$

$$\Rightarrow |\vec{AM} \wedge \vec{L}| = \sqrt{(-23)^2 + (-6)^2 + (16)^2} = \sqrt{821}$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{821}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{821}{45}}$$

اکنون فاصله‌های نقطه‌ی A از صفحه‌های P و P' را به دست می‌آوریم:

$$AH = a = \frac{|4 - 1 - 8 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{7}{3}, \quad AH' = b = \frac{|2 + 2 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{64}{5}} = \sqrt{\frac{821}{45}} = AB$$

پس حکم درست است.

۱. در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

تشریح اندیشه

۲. اسماعیل قصاب، رئیس کمیته‌ی مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگار فروش نیز هست، می‌باشد. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.
- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.
 - اصغر سمت چپ بقال نشسته است.
 - اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.
 - اصغر چه دکانی دارد؟

۱. اکنون اسماعیل و اصغر و اصلان و سیگار فروش و نانوا دور میز نشسته‌اند. اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است. اسماعیل سمت چپ بقال نشسته است. اسمال سمت چپ اصغر نشسته است. اصغر سمت چپ اصلان نشسته است. اصلان سمت چپ سیگار فروش نشسته است. سیگار فروش سمت چپ نانوا نشسته است. نانوا سمت چپ اسماعیل نشسته است.

