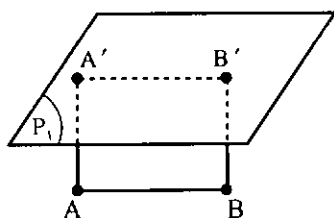




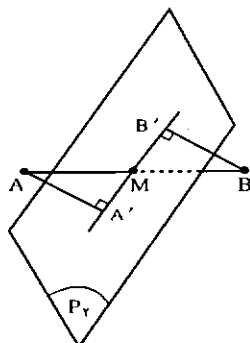
اشاره

دو نقطه‌ی ثابت A و B از هریک از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این مسئله را قبلاً بررسی کرده‌ایم (مثال ۵، مقاله‌ی شماره‌ی قبل).



(شکل ۱)

دیدیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یک مجموعه صفحه‌های موازی خط AB و مجموعه‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M ، وسط پاره خط AB می‌گذرند. P_1 یک نمونه از این صفحه‌هاست.



(شکل ۲)

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در سه بعد (فضا) بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

راهبرد تحدید یا کوچک کردن مسئله

یکی از راهبردهای مهم و کارا برای حل مسئله‌ها، راهبرد تحدید یا کوچک کردن مسئله‌ی داده شده است. درباره‌ی این راهبرد بیشتر صحبت خواهیم کرد. اکنون به مثال زیر توجه کنید.

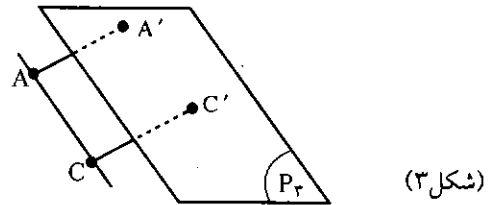
مثال ۶. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را تعیین کنید که سه نقطه‌ی ثابت A ، B و C از هریک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

حل:

الف) روش هندسی

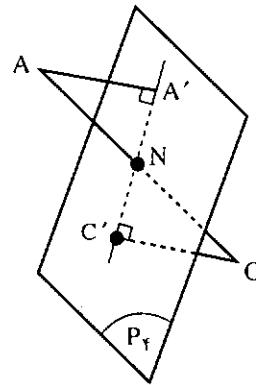
برای حل این مسئله از روش تحدید یا کوچک کردن مسئله استفاده می‌کنیم. برای این کار، یکی از نقطه‌ها، مثلاً نقطه‌ی C را کنار می‌گذاریم. اکنون مجموعه‌ی صفحه‌هایی را باید مشخص کنیم که

اکنون نقطه ای دیگر، مثلاً نقطه ی B را کنار می گذاریم و مجموعه ی صفحه هایی را تعیین می کنیم که دو نقطه ی A و C از هریک از آن ها به یک فاصله اند.



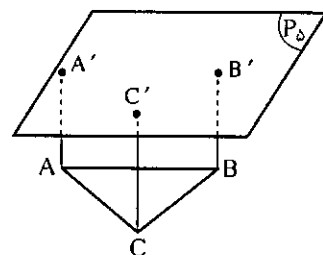
(شکل ۳)

این مسئله را قبلاً حل کرده ایم و می دانیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یکی مجموعه ی صفحه هایی که با خط AC موازی اند و P_3 یک نمونه از آن هاست. مجموعه ی دیگر، مجموعه ی صفحه هایی است که از نقطه ی N وسط پاره خط AC می گذرند و P_4 یک نمونه از این صفحه هاست.



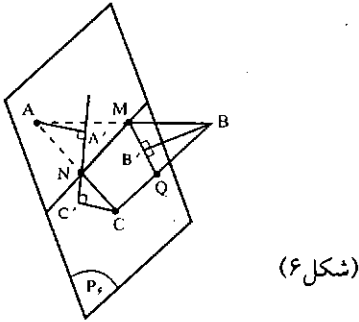
(شکل ۴)

پس مجموعه ی صفحه هایی که سه نقطه ی A ، B و C از آن ها به یک فاصله اند، چند دسته اند: یکی دسته ای که با خط های AB و AC در نتیجه با صفحه ی گذرنده بر سه نقطه ی A ، B و C موازی است که صفحه ی P_5 در شکل ۵، یک نمونه از آن هاست.



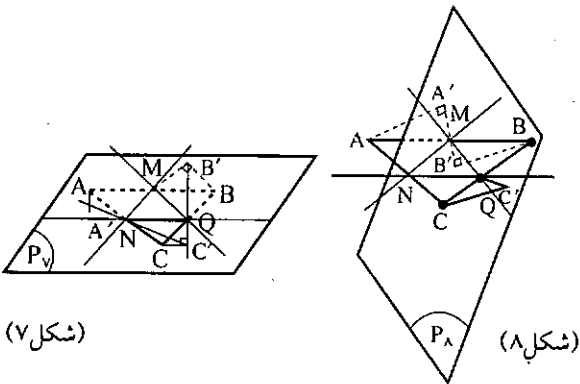
(شکل ۵)

دسته صفحه های دیگر جواب مسئله، سه دسته صفحه است که از خط های واصل بین وسط های پاره خط های AB ، AC و BC می گذرند. اگر وسط پاره خط BC را نقطه ی Q بنامیم، این سه دسته صفحه، یکی دسته صفحه ای است که بر دو نقطه ی M و N و یا در واقع بر خط MN می گذرد. صفحه ی P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است (شکل ۶).

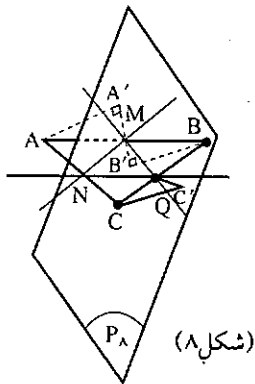


(شکل ۶)

دسته صفحه ی دیگر، دسته صفحه ای است که بر دو نقطه ی N و Q و یا در واقع بر خط NQ می گذرد. P_7 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۷). و دسته ی آخر جواب مسئله، دسته صفحه ای است که بر خط MQ می گذرد. صفحه ی P_8 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۸).



(شکل ۷)



(شکل ۸)

پس به طور کلی می توان گفت که چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه ی ثابت A ، B و C از هریک صفحه های این دسته ها به یک فاصله اند. با فرض این که نقطه های M ، N و Q را به ترتیب وسط پاره خط های AB ، AC و BC بگیریم، این چهار دسته صفحه عبارت اند از:

- دسته ی اول، دسته صفحه ای است که صفحه های آن با صفحه ی ABC موازی هستند. P_5 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته ی دوم، دسته صفحه ای است که بر خط MN می گذرد. P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته ی سوم، دسته صفحه ای است که بر خط NQ می گذرد. P_7 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته ی چهارم، دسته صفحه ای است که بر خط MQ می گذرد. P_8 یک صفحه از این دسته صفحه است.

نکته ی ۱. واضح است، صفحه ای که با AB و AC موازی باشد، با خط BC نیز موازی است (مانند صفحه ی P_5). و در این صورت، چون $AA' = CC'$ و $AA' = BB'$ است پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه ی A ، B و C از صفحه ی P_5 و در نتیجه از هر صفحه ی موازی صفحه ی P_5 به یک فاصله اند.

نکته ی ۲. صفحه ی P_6 که بر خط MN می گذرد، یک صفحه از دسته صفحه ای است که سه نقطه ی A ، B و C از آن به یک فاصله اند. زیرا چون صفحه ی P_6 بر M ، وسط AB گذشته،

$$\begin{cases} (x - \frac{x_1}{2}) \frac{y_2}{2} - (\frac{x_2 - x_1}{2}) y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \quad \text{یا}$$

این دسته صفحه به معادله‌ی زیر است:

$$\alpha \left[(x - \frac{x_1}{2}) \frac{y_2}{2} - (\frac{x_2 - x_1}{2}) y \right] + \beta Z = 0$$

● دسته‌ی سوم: دسته صفحه‌ای است که بر خط NQ می‌گذرد.

● دسته‌ی چهارم: دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد.

معادله‌ی دسته صفحه‌های سوم و چهارم مشابه معادله‌ی دسته صفحه‌ی دوم به دست می‌آید. محاسبه را خودتان انجام دهید.

نکته: می‌توانیم دستگاه مختصات O-xyz را در حالت عمومی و به صورتی در نظر بگیریم که نقطه‌های ثابت A، B و C روی هیچ یک از محورهای مختصات نباشند. در این صورت،

$A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ و $C = (x_3, y_3, z_3)$

خواهد بود. و اگر ما صفحه‌ی P به معادله‌ی

$ax + by + cz + d = 0$ را یکی از صفحه‌های جواب مسئله،

یعنی صفحه‌ای اختیار کنیم که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک

فاصله باشند، یعنی $AA' = BB' = CC'$ باشد، با توجه به این که:

$$AA' = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$BB' = \frac{|ax_2 + by_2 + cz_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$CC' = \frac{|ax_3 + by_3 + cz_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

خواهیم داشت:

$$|ax_1 + by_1 + cz_1 + d| = |ax_2 + by_2 + cz_2 + d| \\ = |ax_3 + by_3 + cz_3 + d|$$

از این رابطه مشابه آن چه در مثال ۵ دیدیم، می‌توانیم ثابت کنیم چهار دسته صفحه جواب مسئله است. برای مثال ثابت می‌کنیم که

صفحه‌ی P با AB و هم چنین با AC موازی است. پس این صفحه موازی صفحه‌ی ABC است و در نتیجه، یک دسته صفحه‌ی جواب مسئله، دسته صفحه‌ای است که صفحه‌های آن با صفحه‌ی ABC، یعنی صفحه‌ی شامل سه نقطه‌ی ثابت داده شده، موازی است.

مثال ۷. چهار نقطه‌ی ثابت A، B، C و D غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. صفحه یا صفحه‌هایی را مشخص کنید که این چهار نقطه از هر یک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

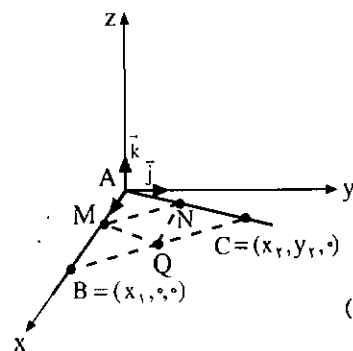
حل

(الف) روش هندسی

اگر مثال‌های ۵ و ۶ را حل نکرده بودیم، ابتدا مسئله را برای دو نقطه و سپس برای سه نقطه حل می‌کردیم. یعنی از راهبرد تحدید (کوچک کردن مسئله) استفاده می‌کردیم و آن‌گاه به حل مسئله برای

$AA' = BB'$ است. و چون صفحه‌ی P_6 بر نقطه‌ی N وسط AC گذشته، $AA' = BB' = CC'$ است. پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه‌ی A، B و C از صفحه‌ی P_6 به یک فاصله‌اند. همین مطلب برای صفحه‌های P_7 و P_8 نیز برقرار است.

(ب) روش جبری- مختصاتی



(شکل ۹)

دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی O منطبق بر نقطه‌ی ثابت A، نقطه‌ی B روی محور x ها و نقطه‌ی C در صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، $A = (0,0,0)$ ، $B = (x_1,0,0)$ و $C = (x_2,y_2,0)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax + by + cz + d = 0$ یکی از صفحه‌هایی باشد که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله باشند، با توجه به این که:

$$AA' = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{و} \quad BB' = \frac{|ax_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$CC' = \frac{|ax_2 + by_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{و} \quad AA' = BB' = CC' \quad \text{خواهیم}$$

داشت:

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_2 + by_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$|d| = |ax_1 + d| = |ax_2 + by_2 + d|$$

از این رابطه، مشابه آن چه درباره‌ی دو نقطه‌ی ثابت (مثال ۵) دیدیم، دیده می‌شود که چهار دسته صفحه جواب مسئله است:

● دسته‌ی اول: دسته صفحه‌ای که صفحه‌های آن موازی صفحه‌ی ABC و معادله‌ی آن به صورت $Z = k$ است ($k \in \mathbb{R}$).

● دسته‌ی دوم: دسته صفحه‌ای است که بر خط MN، یعنی خط واصل بین نقطه‌های M و N وسط پاره‌خط‌های AB و AC می‌گذرد و با توجه به این که:

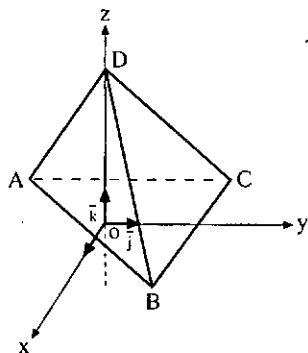
$$M = (\frac{x_1}{2}, 0, 0) \quad , \quad N = (\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}, 0)$$

$$MN: \frac{x - \frac{x_1}{2}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = \frac{y - 0}{\frac{y_2}{2} - 0} \quad , \quad Z = 0$$

● دسته‌ی صفحه‌ی دیگری که سه نقطه‌ی A ، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است که بر نقطه‌های M وسط AB و N وسط AC (یا بر خط MN) می‌گذرد. حال از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را مشخص کنیم که دو نقطه‌ی D و A از آن نیز به یک فاصله باشند. اما می‌دانیم، مجموعه‌ی صفحه‌هایی که دو نقطه‌ی D و A از آن به یک فاصله‌اند، بر نقطه‌ی T وسط پاره خط DA می‌گذرد. پس از بین صفحه‌های دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط MN ، صفحه‌ای که بر نقطه‌ی T می‌گذرد، یعنی صفحه‌ی MNT ، یک صفحه‌ی جواب این مسئله است و همان صفحه‌ای است که چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن به یک فاصله‌اند (شکل ۱۲). صفحه‌های MNE و MNF نیز صفحه‌های دیگری از این دسته صفحه (دسته صفحه‌ی گذرنده بر MN) هستند که چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند.

تمرین. با توجه به شکل ۱۲، صفحه‌های دیگری از دسته صفحه‌های گذرنده بر NQ و MQ را که جواب مسئله هستند، یعنی چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند، تعیین کنید.

ب) روش جبری- مختصاتی



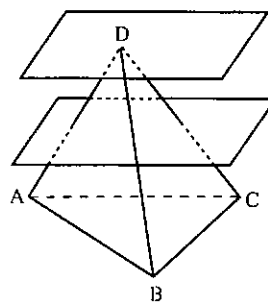
(شکل ۱۳)

دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را چنان در نظر بگیرید که نقطه‌ی D روی محور Z و صفحه‌ی ABC روی صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، نقطه‌ی برخورد عمودی که از D بر صفحه‌ی ABC رسم می‌شود، نقطه‌ی O مبدأ این دستگاه مختصات است. در این دستگاه مختصات $A = (x_1, y_1, 0)$ ، $B = (x_2, y_2, 0)$ ، $C = (x_3, y_3, 0)$ و $D = (0, 0, z_1)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ یکی از صفحه‌های جواب مسئله، یعنی صفحه‌ای باشد که چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن به یک فاصله‌اند، با محاسبه‌ی AA' ، BB' ، CC' و DD' این که $AA' = BB' = CC' = DD'$ است، صفحه‌های جواب مسئله را مشخص کنید.

نکته: می‌توانید با روشی دیگر، مختصات نقطه‌های M ، N ، Q ، T ، E و F ، وسط‌یال‌های چهاروجهی $ABCD$ را بر حسب مختصات نقطه‌های A ، B ، C و D به دست آورید. معادله‌ی صفحه‌های گذرنده بر هر سه نقطه از این شش نقطه، مثلاً معادله‌ی صفحه MNT را بنویسید و ثابت کنید که چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از این صفحه به یک فاصله‌اند.

ادامه دارد...

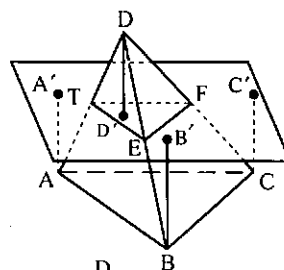
چهار نقطه‌ی غیر واقع در یک صفحه می‌پردازیم. اما ما قبلاً در مثال ۵ مسئله را برای دو نقطه‌ی ثابت و در مثال ۶ مسئله را برای سه نقطه‌ی ثابت حل کرده‌ایم. بنابراین از این مثال، یعنی مثال ۶ برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. با حل مثال ۶ ثابت کردیم، چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه‌ی ثابت A ، B و C از صفحه‌های آن‌ها به یک فاصله‌اند. اکنون باید ببینیم که در هر کدام از این دسته صفحه‌ها، چند صفحه وجود دارد که چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این چهار نقطه‌ی ثابت چهاروجهی $ABCD$ را می‌سازند (شکل ۱۰).



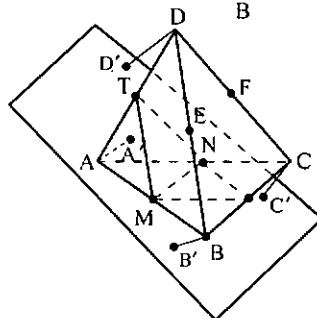
(شکل ۱۰)

● یک دسته صفحه‌ای که سه نقطه‌ی A ، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است موازی صفحه‌ی ABC . از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را اختیار کنیم که نقطه‌ی A و D نیز از آن به یک فاصله باشند.

این صفحه از نقطه‌ی T وسط پاره خط DA می‌گذرد. بدیهی است، صفحه‌ای که موازی صفحه‌ی ABC باشد و از وسط پاره خط DA بگذرد، از نقطه‌های E و F ، وسط پاره خط‌های DB و DC نیز می‌گذرد. یعنی صفحه‌ی TEF که موازی صفحه‌ی ABC است و بر وسط‌یال‌های DA ، DB و DC از چهاروجهی $DABC$ می‌گذرد، صفحه‌ای از دسته صفحه‌ی موازی صفحه‌ی ABC است که هر چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D از آن به یک فاصله هستند. پس داریم: $DD' = AA' = BB' = CC'$ (شکل ۱۱).



(شکل ۱۱)



(شکل ۱۲)

تمرین. مشابه این صفحه، سه صفحه‌ی دیگر نیز جواب مسئله است که هر کدام با یک وجه دیگر چهاروجهی موازی است، آن‌ها را مشخص کنید.