

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

$$\frac{h}{d} = \frac{h}{d}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

$$y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} x$$

$$h^+ = de \Rightarrow AH^+ = BH \cdot CH$$

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۵)

محمد هاشم رستمی

اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصالات در همه ی ریاضیات اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.
در شماره های پیشین درباره ی رویکرد هندسی، رویکرد جبری مختصاتی در آموزش هندسه در
فضاهای ۲ بعدی و ۳ بعدی بحث شد، در ادامه، مثال های دیگری از هندسه در ۳ بعد را ذکر می کنیم و
آن ها را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل می کنیم.

مثال ۴. صفحه ی عمود منصف یک پاره خط

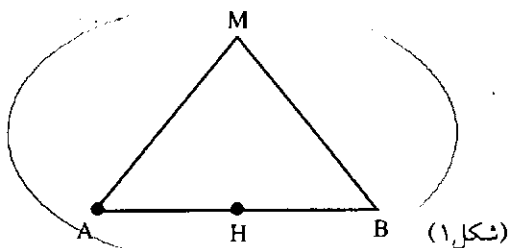
ثابت کنید، مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو نقطه ی ثابت
داده شده به یک فاصله قرار دارد، صفحه ای است که از وسط
پاره خط واصل بین این دو نقطه می گذرد و بر این پاره خط عمود
است.

اثبات:

(الف) روش هندسی

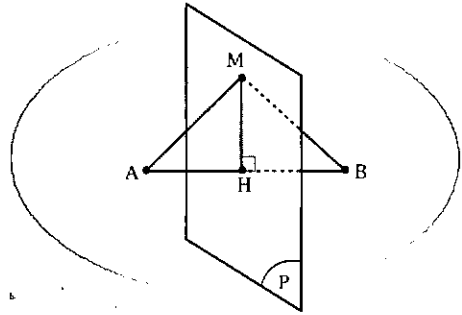
دو نقطه ی ثابت A و B را در نظر می گیریم و وسط پاره خط
AB را H می نامیم. می خواهیم ثابت کنیم، مکان هندسی نقطه ای

از فضا که از این دو نقطه به یک فاصله قرار دارد، صفحه ای است که
در نقطه ی H بر AB عمود است.



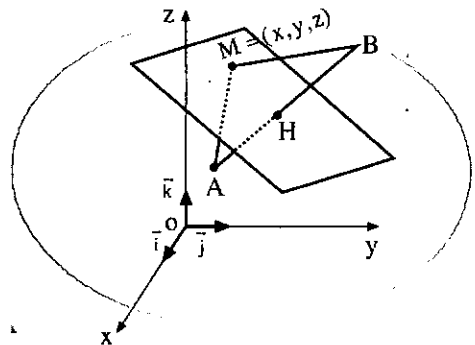
برای اثبات، فرض می‌کنیم، M یک نقطه‌ی دل‌خواه از این مکان هندسی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$MA = MB$$



از M به نقطه‌ی H وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم. در مثلث متساوی الساقین MAB ، میانه‌ی MH عمود منصف پاره خط AB است. پس نقطه‌ی M روی خطی قرار دارد که در نقطه‌ی ثابت H بر پاره خط AB عمود است. این ویژگی برای هر نقطه‌ای مانند M که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار داشته باشد، برقرار است. یعنی همه‌ی این نقطه‌ها روی خط‌هایی قرار دارند که در نقطه‌ی H بر AB عمودند. اما می‌دانیم، مکان هندسی خط‌هایی که در یک نقطه از یک خط بر آن خط عمود هستند، صفحه‌ای است که در آن نقطه بر آن خط عمود است. این صفحه را P می‌نامیم. صفحه‌ی P چون از وسط پاره خط AB نیز می‌گذرد، پس صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB است.

نکته: می‌دانیم که در هر مثلث متساوی الساقین، میانه‌ی نظیر قاعده‌ی مثلث، عمود بر قاعده و در نتیجه، عمود منصف قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین است. ما از این ویژگی برای اثبات استفاده کرده‌ایم.



ب) رویکرد جبری: دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را در نظر می‌گیریم. اگر دو نقطه‌ی ثابت، $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ باشند، می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنیم که از این دو نقطه به یک فاصله است. برای اثبات از روش مستقیم تعیین معادله‌ی مکان هندسی یک نقطه، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که فرض می‌کنیم $M = (x, y, z)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو

نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} MA = MB &\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} \\ &\Rightarrow x^2 + x_1^2 - 2x_1x + y^2 + y_1^2 - 2y_1y + z^2 + z_1^2 - 2z_1z \\ &= x^2 + x_2^2 - 2x_2x + y^2 + y_2^2 - 2y_2y + z^2 + z_2^2 - 2z_2z \\ &\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \\ &\quad (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

به طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی (۱) معادله‌ی یک صفحه است، زیرا معادله‌ای است درجه اول نسبت به x ، y و z (یعنی به

صورت $ax + by + cz + d = 0$). این صفحه بر بردار $\vec{AB}$ عمود است، زیرا بردار قائم آن عبارت است از:

$$\vec{N} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

این بردار، همان بردار $\vec{AB}$ است، چون داریم:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

از طرف دیگر، این صفحه از نقطه‌ی H وسط پاره خط AB می‌گذرد، زیرا مختصات این نقطه، یعنی:

$$H = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

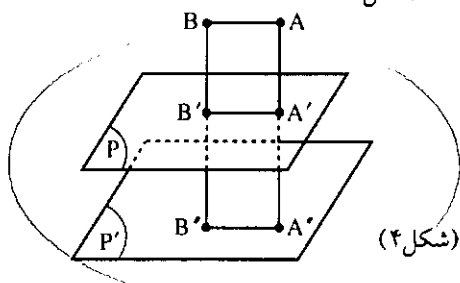
در معادله‌ی صفحه‌ی P ، یعنی در معادله‌ی (۱) صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + 2(y_2 - y_1) \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) + \\ 2(z_2 - z_1) \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0 \\ \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

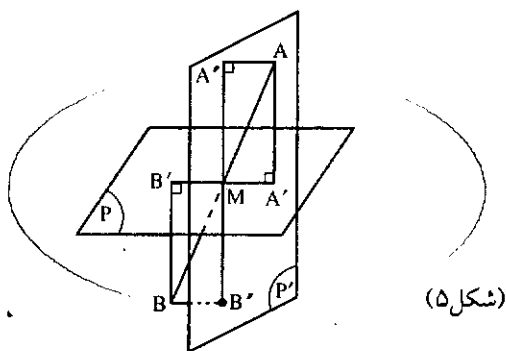
بنابراین صفحه‌ی P ، صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB است و این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار دارد.

نکته. در رویکرد تحلیلی برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی عمود منصف یک پاره خط و یا در واقع مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، می‌توانستیم دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را چنان انتخاب کنیم که مبدأ مختصات منطبق بر نقطه‌ی H ، وسط پاره خط AB و پاره خط AB روی محور $x'Ox$ قرار گیرد (شکل ۴). در این صورت، مختصات دو نقطه‌ی A و B به صورت $A = (x_1, 0, 0)$ و $B = (-x_1, 0, 0)$ خواهد بود. اکنون اگر $M = (x, y, z)$ را نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر اختیار کنیم، یعنی نقطه‌ای باشد که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است، خواهیم داشت:

متوازی الاضلاع و در واقع مستطیل است؛ زیرا AA' با BB' موازی (دو خط عمود بر یک صفحه موازی اند) و $AA' = BB'$ (بنابه فرض) است. بنابراین $AB = A'B'$ و AB موازی $A'B'$ است. در نتیجه AB با صفحه P موازی است. یعنی هر صفحه‌ای که با خط AB موازی باشد، جواب مسئله است و تمام صفحه‌هایی از فضا که با خط AB موازی اند، یک مجموعه صفحه‌ای جواب مسئله هستند (شکل ۴).



حالت دوم: در حالتی که دو نقطه A و B در دو طرف صفحه‌ی P باشند، چهارضلعی $AA'BB'$ متوازی الاضلاع است؛ زیرا $AA' = BB'$ و $AA' \parallel BB'$ است. اما در متوازی الاضلاع، قطرهای AB و $A'B'$ در وسط M تقاطع می‌کنند. پس نقطه‌ی M وسط پاره خط AB روی صفحه‌ی P است، زیرا M وسط پاره خط $A'B'$ نیز هست (شکل ۳). در نتیجه، صفحه‌ی دلخواه P که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله اند و در دو طرف این صفحه هستند، از نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد. پس تمام صفحه‌هایی که این ویژگی را دارند، یعنی از نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرند، مجموعه‌ای دیگر از صفحه‌های جواب مسئله هستند (شکل ۵).



با توجه به نکات بالا می‌توانیم بگوییم: دو مجموعه صفحه وجود دارد که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله اند:

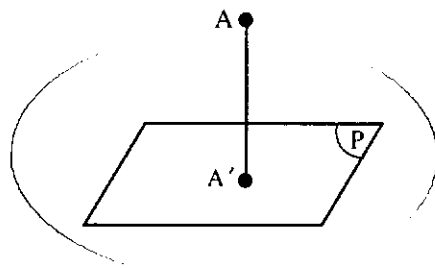
- یک دسته، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که با خط AB موازی است، یعنی خط واصل بین آن دو نقطه، موازی اند.
 - دسته‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که بر نقطه‌ی M وسط پاره خط AB ، یعنی بر نقطه‌ی وسط آن پاره خط، می‌گذرند.
- نکته‌ی مهم: این مسئله، یک مسئله‌ی کلیدی است که برای حل چند مسئله‌ی دیگر به کار می‌رود.

$$\begin{aligned} MA = MB &\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+x_1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &\Rightarrow (x-x_1)^2 + y^2 + z^2 = (x+x_1)^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 4x_1x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

معادله‌ی صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB (۱) $\vec{N} = (1, 0, 0)$ است که همان بردار یک‌ی محور x است. این صفحه روی آن قرار دارد. در ضمن این صفحه از نقطه‌ی $O = (0, 0, 0)$ که وسط پاره خط AB است نیز می‌گذرد.

پس حکم مسئله درست است. به طوری که دیده می‌شود، انتخاب مناسب دستگاه مختصات قائم، محاسبه را ساده‌تر می‌کند. مثال ۵. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنید که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

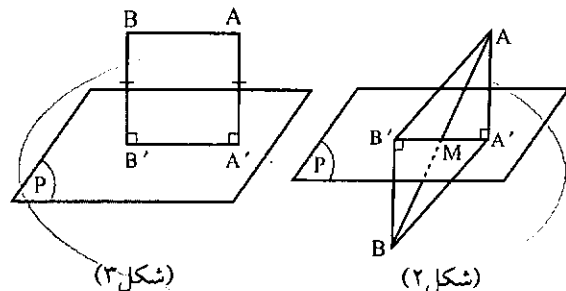
تعریف: فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه، طول عمودی است که از آن نقطه بر آن صفحه فروود می‌آید و محصور بین آن نقطه و پای عمود است. در شکل ۱، پاره خط AA' فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P است.



اثبات:

الف) روش هندسی

از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم، صفحه‌ی P یکی از صفحه‌هایی باشد که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله اند. اگر پاره خط‌های AA' و BB' به ترتیب فاصله‌های نقطه‌های A و B از صفحه‌ی P باشند و از A' به B' وصل کنیم، بنابر آن که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P (شکل ۲) و یا در دو طرف این صفحه (شکل ۳) باشند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:



حالت اول: در حالتی که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P باشند، (شکل ۱)، چهارضلعی $AA'B'B$

(ب) روش جبری - مختصات

دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات دو نقطه‌ی ثابت A و B نسبت به این دستگاه را $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ بنامیم، می‌خواهیم مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنیم که این دو نقطه از هر یک از آن صفحه‌ها به یک فاصله‌اند. فرض می‌کنیم صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ ، یکی از این صفحه‌ها باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$P: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{فاصله‌ی نقطه‌ی } A \text{ از صفحه‌ی } P = AA' = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$P: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{فاصله‌ی نقطه‌ی } B \text{ از صفحه‌ی } P = BB' = \frac{|ax_2 + by_2 + cz_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$AA' = BB' \Rightarrow \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_2 + by_2 + cz_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow |ax_1 + by_1 + cz_1 + d| = |ax_2 + by_2 + cz_2 + d|$$

$$\Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + d = ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

$$\Rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \quad (1)$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = -(ax_2 + by_2 + cz_2 + d)$$

$$\Rightarrow a(x_2 + x_1) + b(y_2 + y_1) + c(z_2 + z_1) + 2d = 0 \quad (2)$$

● با توجه به این که بردار قائم صفحه‌ی اختیاری P ، بردار

$\vec{N} = (a, b, c)$ ، و بردار $\vec{AB}$ نیز به تصاویر

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ است، رابطه‌ی (۱) حاصل

ضرب درونی دو بردار $\vec{N}$ و $\vec{AB}$ را نشان می‌دهد؛ یعنی داریم:

$$\vec{N} \cdot \vec{AB} = 0$$

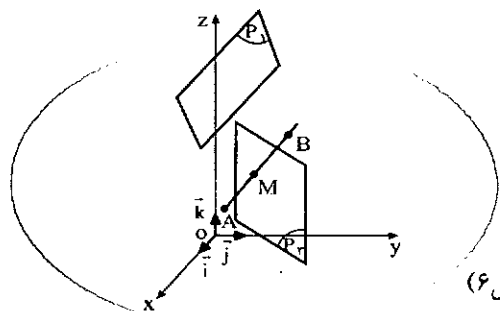
اما دو بردار $\vec{N}$ و $\vec{AB}$ هر دو مخالف صفرند، پس نتیجه می‌شود

که دو بردار $\vec{N}$ و $\vec{AB}$ بر هم عمودند و این مطلب نشان می‌دهد که

صفحه‌ی P با بردار $\vec{AB}$ موازی است. در نتیجه، یک مجموعه

صفحه‌های جواب مسئله، صفحه‌هایی هستند که با بردار $\vec{AB}$ (یا خط

AB) موازی‌اند. صفحه‌ی P یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل ۶).



(شکل ۶)

● رابطه‌ی (۲) نشان می‌دهد که صفحه‌ی اختیاری P از نقطه‌ی M وسط پاره خط AB گذشته است، زیرا داریم:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \text{وسط پاره خط } AB$$

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

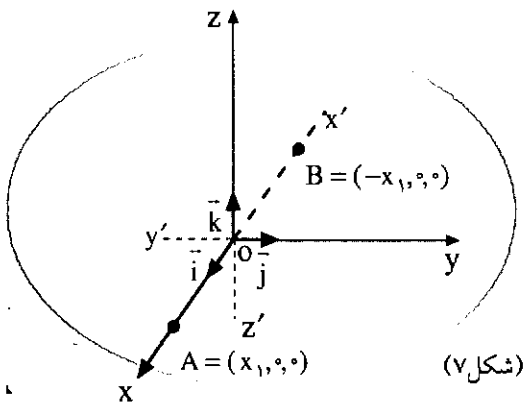
مختصات M در معادله‌ی P

$$\Rightarrow a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + d = 0$$

$$\Rightarrow a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) + 2d = 0 \quad (2)$$

که این رابطه، همان رابطه‌ی (۲) است.

بنابراین، مجموعه‌ی دیگر صفحه‌های جواب مسئله، تمام صفحه‌هایی هستند که از نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرند. به بیان دیگر، هر صفحه‌ای که از نقطه‌ی M ، وسط پاره خط AB بگذرد، دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند. صفحه‌ی P یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل ۶).



(شکل ۷)

تمرین. در رویکرد جبری-مختصاتی برای حل این مسئله، دستگاه مختصات $O-xyz$ را چنان اختیار کنید که نقطه‌ی M وسط پاره خط AB روی نقطه‌ی O ، مبدأ مختصات این دستگاه مختصات، و دو نقطه‌ی A و B روی یکی از محورهای مختصات، مثلاً روی محور x ، قرار گیرند. در این صورت، اگر $A = (x_1, 0, 0)$ باشد، $B = (-x_1, 0, 0)$ خواهد بود. حال اگر یک صفحه‌ی دل‌خواه جواب مسئله را $P: ax + by + cz + d = 0$ بگیریم، مسئله را خودتان حل کنید (شکل ۷).

این راه‌حل را با راه‌حل قبلی مقایسه کنید. کدام ساده‌تر است؟ چرا؟ سؤال: صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB جزو کدام مجموعه از صفحه‌های جواب مثال ۵ است؟



۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی تعیین معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ها، به کتاب مکان‌های هندسی (جلد اول) از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

