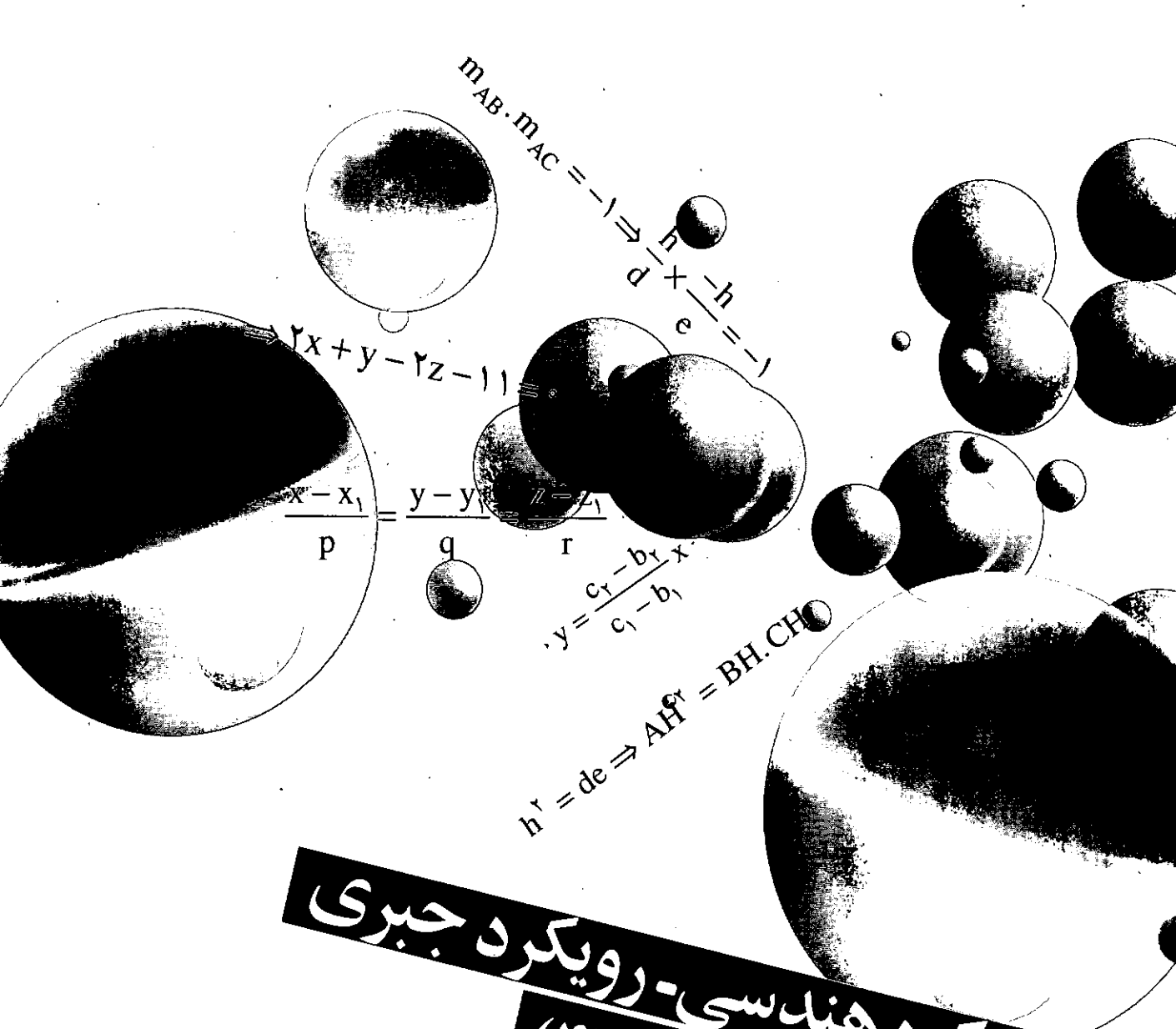




رویکرد هندسی - رویکرد جبری

در آموزش هندسه (۴)

● محمد هاشم رستمی

اشاره

حالت های متفاوتی می تواند داشته باشد. ما مسئله را در حالت کلی حل می کنیم؛ یعنی حالتی را در نظر می گیریم که نقطه ی A روی خط Δ و صفحه ی P قرار نداشته باشد و خط Δ موازی صفحه ی P نباشد.

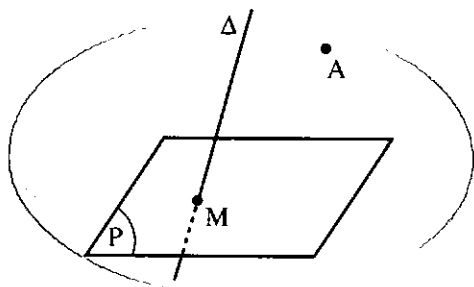
در شماره های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضاهای دو بعدی و سه بعدی اقلیدوس حل شده، اینک در ادامه به حل مسائلی در فضای سه بعدی با هر دو رویکرد خواهیم پرداخت.

مثال ۳. نقطه ی A، خط Δ و صفحه ی P داده شده اند. از نقطه ی A خطی رسم کنید که با صفحه ی P موازی باشد و خط Δ را قطع کند.

حل:

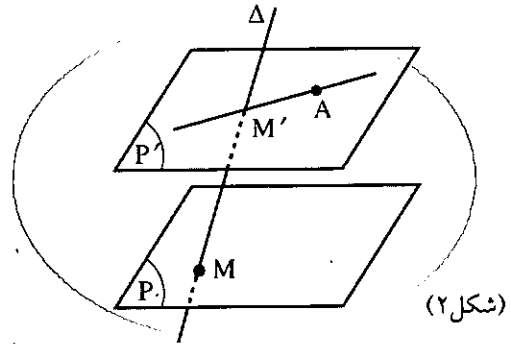
الف) روش هندسی

چون در صورت مسئله برای وضع نقطه ی A، خط Δ و صفحه ی P نسبت به هم، شرطی در نظر گرفته نشده است، پس مسئله



(شکل ۱)

در این صورت، خط Δ صفحه‌ی P را در نقطه‌ای مانند M قطع خواهد کرد (شکل ۱).
برای حل مسئله در این حالت، از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم.



(شکل ۲)

فرض می‌کنیم، مسئله حل شده و خط AM' جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A گذشته، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را در نقطه‌ی M' قطع کرده است. چون تمام خط‌هایی که از یک نقطه مانند A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، در یک صفحه مانند P' قرار دارند که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، پس خط AM' نیز خطی متعلق به این صفحه است. از طرف دیگر، نقطه‌ی M' که محل برخورد خط Δ با خط AM' است، روی صفحه‌ی P' قرار دارد. یعنی در واقع نقطه‌ی M' محل برخورد صفحه‌ی P' با خط Δ است. بنابراین برای حل مسئله چنین عمل می‌کنیم:

- صفحه‌ی P' ، یعنی مکان هندسی خط‌هایی را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، رسم می‌کنیم.
- نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P' را M' می‌نامیم (در این حالت که در نظر گرفته‌ایم، خط Δ حتماً صفحه‌ی P' را قطع می‌کند. زیرا می‌دانیم که اگر دو صفحه موازی باشند و خطی یکی از این دو صفحه را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد).
- از نقطه‌ی A به نقطه‌ی M' وصل می‌کنیم. خط منحصر به فرد AM' جواب مسئله است. زیرا خطی است که از نقطه‌ی A گذشته است، خط Δ را در نقطه‌ی M' قطع کرده است و موازی صفحه‌ی P نیز می‌باشد (اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع در یک صفحه با صفحه‌ی دیگر موازی است).

بحث:

۱. اگر نقطه‌ی A روی خط Δ باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل ۳)، صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، خط Δ را در همان نقطه‌ی A قطع می‌کند. در این حالت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P' رسم شود، جواب مسئله است؛ یعنی بی‌شمار خط جواب مسئله است (شکل ۴).

(شکل ۳)

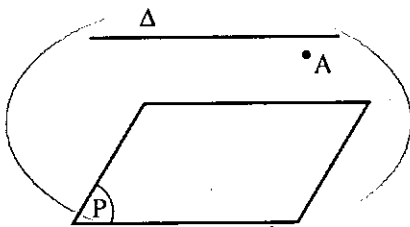
(شکل ۴)

۲. اگر نقطه‌ی A فقط روی صفحه‌ی P باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل ۵)، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق خواهد شد. پس اگر نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P را M بنامیم، خط AM جواب مسئله است، زیرا: از نقطه‌ی A می‌گذرد، خط Δ را در نقطه‌ی M قطع کرده و موازی صفحه‌ی P است؛ چون روی این صفحه است. این جواب منحصر به فرد است (شکل ۶).

(شکل ۵)

(شکل ۶)

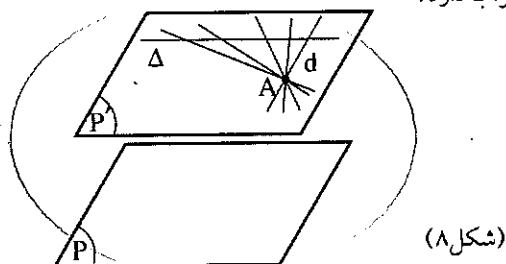
۳. اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط Δ نباشد، اما خط Δ موازی صفحه‌ی P باشد (شکل ۷)، در این حالت صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، نسبت به خط Δ دو حالت می‌تواند پیدا کند:



(شکل ۷)

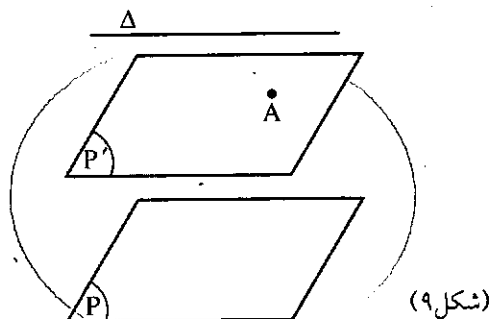
الف) خط Δ روی صفحه‌ی P' قرار گیرد (شکل ۸).
در این صورت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P'

رسم شود و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله بی شمار جواب دارد.



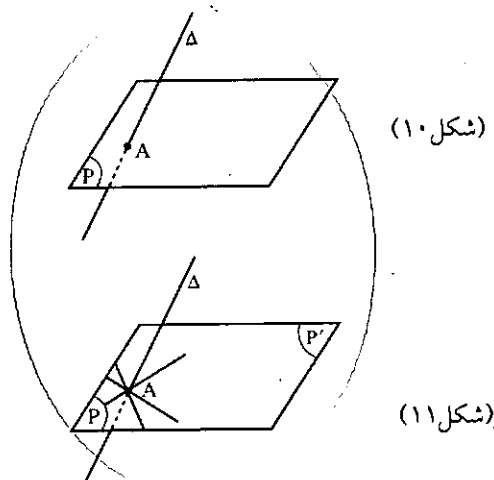
(شکل ۸)

ب) خط Δ روی صفحه P' قرار نگیرد. در این صورت، خط Δ موازی صفحه P' خواهد بود و در این حالت مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ خطی وجود ندارد که از نقطه A بگذرد، موازی صفحه P باشد و خط Δ را قطع کند (شکل ۹).



(شکل ۹)

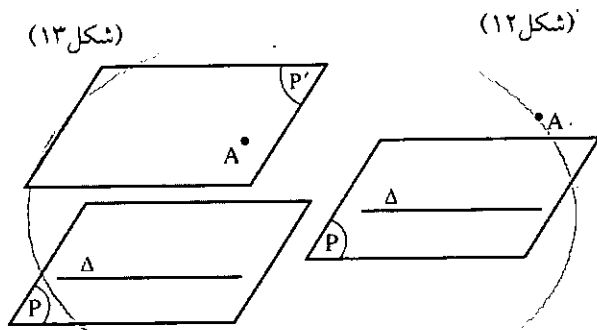
۴. اگر خط Δ با صفحه P متقاطع باشد و نقطه A برخورد آن‌ها همان نقطه A باشد (شکل ۱۰)، صفحه P' که از نقطه A موازی صفحه P رسم می‌شود، بر صفحه P منطبق است و در این حالت هر خطی که از نقطه A در صفحه P رسم شود، جواب مسئله است و مسئله بی شمار جواب دارد (شکل ۱۱).



(شکل ۱۰)

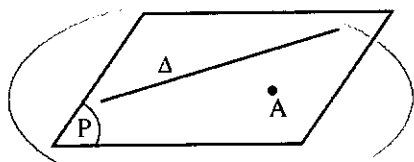
۵. اگر خط Δ روی صفحه P باشد و نقطه A روی صفحه P نباشد (شکل ۱۲)، در این صورت صفحه P' که از نقطه A موازی صفحه P رسم شده است، با خط Δ موازی خواهد بود و هر خطی که از این نقطه در صفحه P' رسم شود،

خط Δ را قطع نخواهد کرد. پس مسئله دارای جواب نیست.



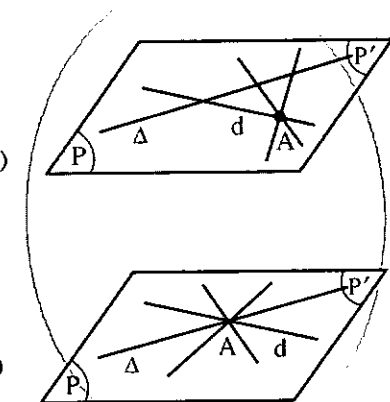
(شکل ۱۲)

۶. اگر خط Δ و نقطه A هر دو روی صفحه P باشند (شکل ۱۴)، صفحه P' بر صفحه P منطبق خواهد بود. در این حالت هر خطی مانند d از صفحه P که از نقطه A بگذرد و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله در این حالت بی شمار جواب دارد.



(شکل ۱۴)

در این حالت نقطه A می‌تواند روی خط Δ باشد که در این صورت، همه‌ی خط‌هایی از صفحه P که از نقطه A متقاطع با خط Δ رسم می‌شوند، جواب مسئله هستند.



(شکل ۱۵)

(شکل ۱۶)

بدیهی است که مسئله بی شمار جواب دارد (شکل ۱۶). سؤال: آیا مسئله حالت دیگری نیز می‌تواند داشته باشد؟

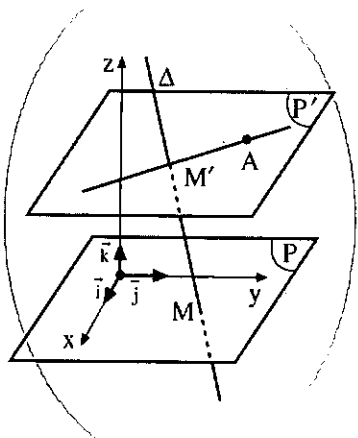
ب) روش جبری

دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را که از سه محور دو به دو عمود برهم ox', oy', oz' به ترتیب با بردارهای یک‌ه ی $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

می‌نویسیم:

$$AM': \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

نکته‌ی مهم ۱. بحث در وجود جواب برای مسئله و تعداد جواب‌های مسئله (در صورت وجود) در رویکرد جبری برای حل مسئله، همانند راه‌حل هندسی آن است. شما خود می‌توانید آن‌ها را بررسی کنید.



(شکل ۱۸)

نکته‌ی مهم ۲. برای حل مسئله به روش جبری-مختصاتی، ما می‌توانیم دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی xoy همان صفحه‌ی P باشد. در این صورت خواهیم داشت:

- صفحه‌ی P به معادله‌ی $z = 0$
- نقطه‌ی A به مختصات $A = (x_1, y_1, z_1)$
- خط Δ به معادله‌ی $\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$

در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P' به معادله‌ی $z = z_1$ خواهد بود و مختصات نقطه‌ی M' از دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی:

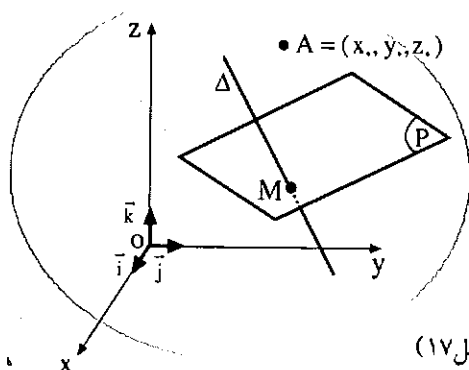
$$P': \begin{cases} z = z_1 \\ \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r} \end{cases}$$

به صورت:

$$M' : \begin{cases} x = p \left(\frac{z_1 - z_1}{r} \right) + x_1 \\ y = q \left(\frac{z_1 - z_1}{r} \right) + y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

محاسبه می‌شود که پس از آن، با داشتن مختصات دو نقطه‌ی A

$\vec{k}$ تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت:



(شکل ۱۷)

- نقطه‌ی A به مختصات $A = (x_1, y_1, z_1)$
- صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax + by + cz + d = 0$
- خط Δ به معادله‌ی $\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$

خواهند بود.

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد، یا صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ موازی است و خط

$$D: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r} \text{ را قطع می‌کند.}$$

با توجه به این که مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه موازی آن صفحه رسم می‌شود، باید معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، بنویسیم. می‌دانیم معادله‌ی تمامی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ هستند، به صورت $ax + by + cz + d' = 0$ است. برای این که این صفحه از نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ بگذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی آن صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d' = 0 \Rightarrow d' = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$$

پس صفحه‌ی P' به معادله‌ی زیر است:

$$P': ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

اکنون مختصات نقطه‌ی M' ، محل برخورد صفحه‌ی P' با خط Δ را، با حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی زیر به دست می‌آوریم:

$$P': \begin{cases} ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0 \\ \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r} = t \end{cases} \Rightarrow M' = (x_2, y_2, z_2)$$

با داشتن مختصات دو نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $M' = (x_2, y_2, z_2)$ ، معادله‌ی خط AM' را به این صورت

و M' ، معادله‌ی خط AM' را می‌توان نوشت.

نکته‌ی مهم ۳. همان‌طور که قبلاً هم ذکر شد، هر مسئله یا قضیه‌ی هندسه را می‌توان با رویکردهای هندسی و جبری-مختصاتی حل کرد، اما باید توجه کنیم که کدام روش ساده‌تر است. در انتخاب رویکرد جبری-مختصاتی، نکته‌ی مهمی که حتماً باید به آن توجه داشته باشیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات است. اینک چند مثال از رویکرد جبری-مختصاتی مسئله‌ی داده شده را می‌بینیم:

مثال اول. نقطه‌ی $A = (2, 5, -1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $2x + y - 2z - 3 = 0$ داده شده است. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را قطع می‌کند.

حل: نخست می‌توانیم وضع نقطه‌ی A ، خط Δ و صفحه‌ی P را نسبت به هم مشخص کنیم، اما نیازی به این کار نیست. ما راه حل کلی را که برای روش جبری-مختصاتی بیان کردیم، به کار می‌بریم. به این ترتیب که نخست معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس نقطه‌ی برخورد P' با خط Δ را به دست می‌آوریم و M' می‌نامیم. آنگاه معادله‌ی خط AM' ، یعنی خط خواسته شده را می‌نویسیم.

معادله‌ی کلی صفحه‌های موازی صفحه‌ی P $2x + y - 2z + d = 0$

$$A = (2, 5, -1) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}} 2(2) + (5) - 2(-1) + d = 0 \Rightarrow d = -11$$

$$\Rightarrow 2x + y - 2z - 11 = 0 \quad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$P': \begin{cases} 2x + y - 2z - 11 = 0 \\ \Delta: \frac{x}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3} = t \Rightarrow x = 4t, y = -t-1, z = 3t+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(4t) + (-t-1) - 2(3t+2) - 11 = 0 \Rightarrow t = 8$$

$$\Rightarrow M' = (32, -9, 22), \quad A = (2, 5, -1)$$

$$\Rightarrow AM': \frac{x-2}{32-2} = \frac{y-5}{-9-5} = \frac{y+1}{22+1} \Rightarrow \frac{x-2}{30} = \frac{y-5}{-14} = \frac{y+1}{23}$$

معادله‌ی خط AM'

نکته: معادله‌ی صفحه‌ی P' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست. زیرا اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P قرار داشت، معادله‌ی صفحه‌ی P' همان معادله‌ی صفحه‌ی P به دست می‌آمد. به علاوه، نقطه‌ی A روی خط Δ نیست. زیرا اگر چنین بود، مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A به دست می‌آمد. و این نشان می‌دهد که نیازی به بررسی وضع نقطه‌ی A ، خط Δ و

صفحه‌ی P نسبت به هم نیست.

مثال دوم. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی

$$A = (2, -1, 1) \text{ می‌گذرد، با صفحه‌ی } P: x + y + 2z + 1 = 0$$

موازی است و خط $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ را قطع می‌کند.

حل: داریم:

معادله‌ی کلی صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P

$$x + y + 2z + d = 0$$

$$A = (2, -1, 1) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}} 2 - 1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1} = t \Rightarrow x = 3t-1, y = 2t-3, z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t-1 + 2t-3 + 2t-3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow M' = (2, -1, 1) = A$$

معادله‌ی صفحه‌ی P' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست، اما مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A است. پس نقطه‌ی A بر خط Δ قرار دارد. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A یا همان M' در صفحه‌ی P' رسم شود، جواب مسئله است. برای نوشتن معادله‌ی هر یک از این خط‌ها کافی است، یک نقطه‌ی دل‌خواه از P' را به دست آوریم و معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. مثلاً داریم:

$$x = 0, y = 0 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'} 0 + 0 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$$

$$B = (0, 0, \frac{3}{2}) \in P'$$

$$\Rightarrow AB: \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{-1-0} = \frac{z-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

معادله‌ی یکی از خط‌های جواب مسئله

$$x = 0, z = 0 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'} 0 + y + 0 - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow C = (0, 3, 0) \quad \text{نقطه‌ی دیگری از صفحه‌ی } P'$$

$$AC: \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z-0}{1-0} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{1}$$

یک خط دیگر جواب مسئله