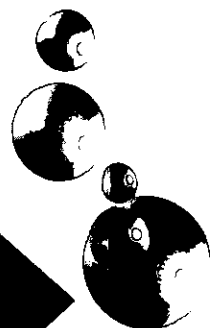


رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه



$$\begin{aligned} x &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A + 0}{2} = \frac{x_A}{2} \\ y &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z &= \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_A + 0}{2} = \frac{z_A}{2} \end{aligned}$$



اشاره

در شماره‌های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضای دوبعدی اقلیدوسی حل شد. اینک به معرفی فضای سه بعدی اقلیدوسی پرداخته و مسائلی را در این فضا با هر دو رویکرد حل و بحث خواهیم کرد.

شرایط:

$x, y, z \in \mathbb{R}$ و $(x, y, z) \xrightarrow{\text{تناظر}} \text{نقطه‌ی } P \text{ از فضای سه بعدی اقلیدسی}$

$\{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\text{تناظر}} \text{فضای سه بعدی اقلیدسی}$

$ax + by + cz + d = 0 \xrightarrow{\text{تناظر}} \text{صفحه‌ی } P \text{ از فضای سه بعدی اقلیدسی}$

اگر فضای سه بعدی اقلیدسی به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی $O-xyz$ متشکل از سه محور دوه‌دوی عمود بر هم Ox, Oy, Oz مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین فضای سه بعدی اقلیدسی و حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ برپا می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از فضای سه بعدی اقلیدسی، یک سه‌تایی مرتب (x, y, z) از غدهای حقیقی نظیر می‌شود. در حقیقت، دستگاه مختصات دکارتی $O-xyz$ ، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه‌ی فضایی و جبر است؛ تحت این

ب) راه جبری: سه صفحه ی

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

$$P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$P'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

را در دستگاه مختصات قائم O-xyz در نظر می گیریم. با استفاده از شرط موازی بودن دو صفحه داریم:

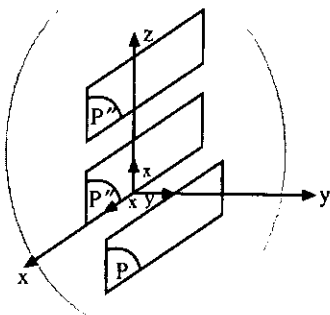
$$P \parallel P' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (1)$$

$$P \parallel P'' \Rightarrow \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} \quad (2)$$

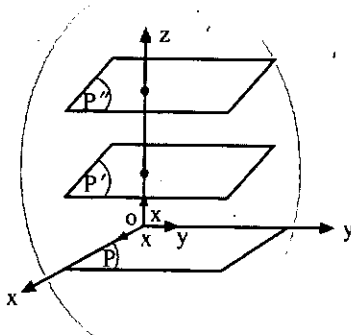
از تقسیم عضوهای نظیر دورابطه ی ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{a}{a'}}{\frac{a}{a''}} = \frac{\frac{b}{b'}}{\frac{b}{b''}} = \frac{\frac{c}{c'}}{\frac{c}{c''}} \Rightarrow \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} \Rightarrow P' \parallel P''$$

پس دو صفحه ی P' و P'' با هم موازی اند.



نکته. در همین مسئله می توانیم دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه ی P بر صفحه xoy منطبق باشد. در این صورت، $P': z = k$ و $P'': z = k'$ خواهد بود، اما می دانیم که دو صفحه به معادله ی $z = k$ و $z = k'$ با هم موازی اند (دو صفحه ی عمود بر یک خط با هم موازی اند)، پس حکم مسئله درست است.



مثال ۲. ثابت کنید که در یک هرم، وسط یال های آن، در یک صفحه ی موازی صفحه ی قاعده قرار دارند.

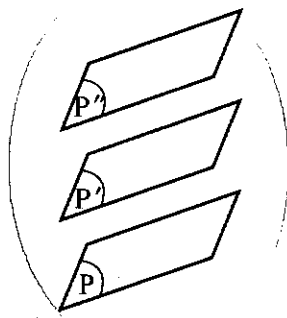
$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تناظر}} \text{خط D از فضای سه بعدی اقلیدسی}$$

$$f(x, y, z) = 0 \xrightarrow{\text{تناظر}} \text{رویه ی (C) از فضای سه بعدی اقلیدسی}$$

نکته ی ۱. به جای دستگاه مختصات دکارتی O-xyz در فضا، می توان از دیگر دستگاه های مختصات در فضا، مانند دستگاه مختصات قطبی در فضا، دستگاه مختصات استوانی در فضا و دستگاه مختصات کروی در فضا استفاده کرد. این مطلب به نوع مسئله ای بستگی دارد که می خواهیم به روش تحلیل حل کنیم.

نکته ی ۲. چگونگی انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا، اهمیت زیادی دارد. همواره باید سعی کنیم، دستگاه مختصات دکارتی و یا هر دستگاه مختصات دیگری که می خواهیم انتخاب کنیم، حداقل محاسبه را داشته باشد. در مثال هایی، این مطلب را خواهیم دید. اینک به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل می شوند، توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید اگر دو صفحه با صفحه ی سوم موازی باشند، خودشان با هم موازی اند.



اثبات

الف) روش هندسی: سه صفحه ی P ، P' و P'' را در نظر می گیریم. فرض می کنیم صفحه ی P موازی صفحه ی P' و هم چنین صفحه ی P موازی صفحه ی P'' باشد، می خواهیم ثابت کنیم که دو صفحه ی P' و P'' با هم موازی اند.

برای اثبات می گوئیم، اگر دو صفحه ی P' و P'' موازی نباشند، در خط راستی مانند Δ متقاطع خواهند بود و در این صورت، از هر نقطه ی خط Δ ، دو صفحه ی موازی صفحه ی P رسم شده است که این خلاف قضیه ی * است. بنابراین، دو صفحه ی P' و P'' متقاطع نیستند، پس با هم موازی اند.

قضیه *. از هر نقطه ی واقع در خارج یک صفحه، یک و تنها یک صفحه ی موازی آن صفحه می توان رسم کرد.

نکته: این قضیه قبلاً ثابت شده است.

برای اثبات، دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را چنان اختیار می‌کنیم که BCD منطبق بر صفحه‌ی xoy و BD روی محور y ها باشد. در این صورت، مختصات رأس‌های هرم عبارت‌اند از:

$$A = (x_1, y_1, z_1) \text{ و } B = (0, y_2, 0)$$

$$C = (x_3, y_3, 0) \text{ و } D = (0, y_4, 0)$$

اکنون مختصات نقطه‌های B' ، C' و D' را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 + 0}{2} = \frac{x_1}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_1 + 0}{2} = \frac{z_1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_1 + x_3}{2} \\ y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_1 + y_3}{2} \\ z = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_1 + 0}{2} = \frac{z_1}{2} \end{cases}$$

اما پارامترهای هادی BC عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{BC} = (x_3, y_3 - y_2, 0)$$

و پارامترهای هادی $B'C'$ عبارت‌اند از:

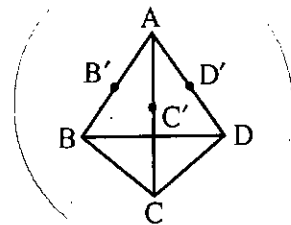
$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'C'} &= \left(\frac{x_1 + x_3 - x_1}{2}, \frac{y_1 + y_3 - y_1 - y_2}{2}, \frac{z_1 - z_1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3 - y_2}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

به طوری که دیده می‌شود، پارامترهای هادی $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{B'C'}$ با

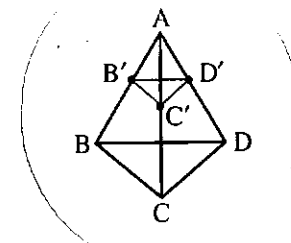
هم متناسب‌اند ($\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{B'C'}$)، پس $B'C'$ موازی BC است. به روش مشابه ثابت می‌شود که $C'D'$ موازی CD است. در نتیجه، صفحه‌ی $A'B'C'$ با صفحه‌ی ABC موازی است و حکم ثابت می‌شود.

نکته: اگر دستگاه مختصات دکارتی $O-xyz$ را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های هرم، $A = (x_1, y_1, z_1)$ ، $B = (x_2, y_2, z_2)$ ، $C = (x_3, y_3, z_3)$ و $D = (x_4, y_4, z_4)$ خواهند بود و محاسبه‌ها قدری دشوارتر می‌شود.

الف) روش هندسی: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل) و وسط‌یال‌های AB، AC و AD را به ترتیب B' ، C' و D' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی $B'C'D'$ با صفحه‌ی BCD، یعنی قاعده‌ی این هرم، موازی است. در مثلث ABC، پاره‌خط $B'C'$ وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده است، پس با ضلع سوم مثلث موازی است. یعنی $B'C' \parallel BC$ است. به روش مشابه، $C'D'$ که وسط‌های دو ضلع AC و AD از مثلث ACD را به هم وصل کرده، با ضلع سوم مثلث، یعنی CD، موازی است؛ بنابراین $C'D' \parallel CD$ است.



در نتیجه، صفحه‌ی $A'B'C'$ با صفحه‌ی ABC موازی است، زیرا دو خط متقاطع $B'C'$ و $C'D'$ از صفحه‌ی $A'B'C'$ با دو خط متقاطع BC و CD از صفحه‌ی ABC موازی هستند. پس حکم مسئله درست است.



نکته: این مسئله را برای یک هرم سه پهلوی (مثلث القاعده) ثابت کردیم. اثبات مسئله برای هرم‌های چندپهلوی نیز به روش مشابه انجام می‌شود.

ب) راه حل جبری: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم و وسط‌یال‌های AB، AC و AD را به ترتیب B' ، C' و D' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی $B'C'D'$ با صفحه‌ی BCD (قاعده‌ی هرم) موازی است.

