

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه

$$MA^2 = \left(-\frac{a}{2} - x\right)^2 + (-y)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

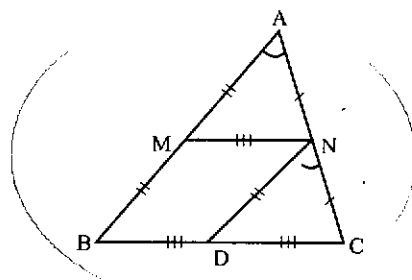
(قسمت ۲)

محمد هاشم رستنی

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد حل شد. اینک در پی به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم مثلث موازی و مساوی نصف آن ضلع است.



اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و وسط ضلع‌های AB و AC را به ترتیب M و N می‌گیریم. می‌خواهیم

ثابت کنیم که MN موازی BC است و: $MN = \frac{1}{2} BC$

می‌دانیم که: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی

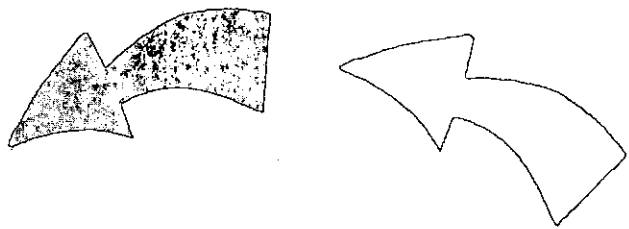
تالس، MN موازی ضلع BC است. برای این که ثابت کنیم:

$MN = \frac{1}{2} BC$ ، از نقطه‌ی N خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم

تا ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند. چهارضلعی MNDB

متوازی الاضلاع است، زیرا ضلع‌هایش دوه‌دو موازی‌اند؛ پس:

ND = MB. اما MA = MB (نقطه‌ی M وسط ضلع AB



$$m/MN = \frac{\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}}{\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2}} = \frac{0}{c_1 - b_1} = 0 = m/BC$$

پس MN موازی ضلع BC است.
از طرف دیگر داریم:

$$BC = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (0 - 0)^2} = |c_1 - b_1|$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{c_1 - b_1}{2}\right)^2} = \left|\frac{c_1 - b_1}{2}\right| = \frac{|c_1 - b_1|}{2}$$

$$MN = \frac{1}{2}|c_1 - b_1| \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$$

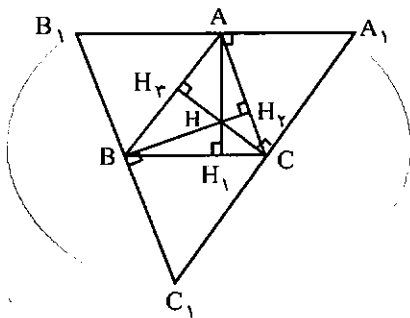
پس حکم مسئله ثابت شد.

نکته: به طوری که دیده می شود، راه حل جبری برای این مسئله، ساده تر از راه حل هندسی است.

مثال ۲. ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می گیریم و ارتفاع‌های AH_1 ، BH_2 و CH_3 را رسم می کنیم (شکل زیر). می خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع هم‌رس‌اند.



ارتفاع‌های مثلث ویژگی خاصی ندارند و مانند نیمسازهای زاویه‌های مثلث و یا عمود منصف ضلع‌های مثلث، مکان هندسی نیستند. پس به نظر می رسد که برای اثبات این قضیه باید تغییری در شکل مسئله ایجاد کنیم تا ارتفاع‌های AH_1 ، BH_2 و CH_3 به یکی از مکان‌های هندسی قبلی، مثلاً ارتفاعات یک مثلث و یا نیمسازهای زاویه‌های یک مثلث و یا عمود منصف‌های ضلع‌های یک مثلث تبدیل شوند. به این منظور، از رأس‌های A، B و C به ترتیب خط‌هایی موازی ضلع‌های BC، AC و AB از مثلث ABC رسم می کنیم تا مثلث $A_1B_1C_1$ حاصل شود. چهارضلعی $ABCA_1$ متوازی الاضلاع است ($AA_1 \parallel BC$ و $AB \parallel CA_1$)، پس:

$$AA_1 = BC \quad (1)$$

از طرف دیگر، چهارضلعی $ACBB_1$ نیز متوازی الاضلاع است

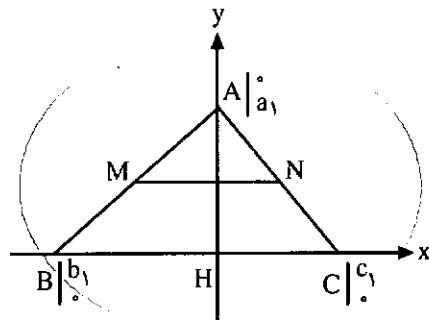
است)، بنابراین: $ND = AM$. از طرفی، $AN = NC$ و $\hat{A} = \hat{DNC}$ ، لذا دو مثلث AMN و NDC به حالت برابری دو ضلع و زاویه بین، همنهشت هستند. ($AM = ND$ ، $AN = NC$ و $\hat{A} = \hat{DNC}$). در نتیجه: $MN = DC$. از طرف دیگر: $MN = DB$ ($MNDB$ متوازی الاضلاع است)، پس: $MN = DC = DB$ و در نتیجه: $MN = \frac{1}{2}BC$.

نکته: پس از آن که ثابت کردیم MN موازی BC است، می توانیم برای اثبات این که: $MN = \frac{1}{2}BC$ ، از نتیجه ی ۲ صفحه ی ۷۴ کتاب هندسه ی (۱) استفاده کنیم. این نتیجه می گوید: اگر MN موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اما در این مسئله، چون M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC است، پس: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. و بنابراین: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ یا: $MN = \frac{1}{2}BC$.

ب) راه جبری: ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می کنیم. را مبدأ مختصات، محور x ها را روی BC و محور y ها را روی HA در نظر می گیریم (شکل زیر).



فرض می کنیم: $A = (0, a_1)$ ، $B = (b_1, 0)$ و $C = (c_1, 0)$. در این صورت، مختصات نقطه های M و N که به ترتیب وسط ضلع های AB و AC هستند، برابرند با:

$$M = \left(\frac{b_1}{2}, \frac{a_1}{2}\right) \text{ و } N = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{a_1}{2}\right)$$

از آن جا داریم:

$$\Rightarrow CH_7: y - 0 = \frac{b_1}{a_1}(x - c_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} CH_7 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$x = 0: AH_1 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$AH_1: \begin{cases} x = 0 \\ BH_7: y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \\ CH_7: y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$AH_1: \begin{cases} x = 0 \\ BH_7: y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = (0, \frac{-b_1 c_1}{a_1}) \text{ مختصات نقطه‌ی برخورد } AH_1 \text{ و } BH_7$$

$$H = (0, \frac{-b_1 c_1}{a_1}) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } CH_7} \frac{-b_1 c_1}{a_1} = \frac{-b_1}{a_1}(0) - \frac{-b_1 c_1}{a_1}$$

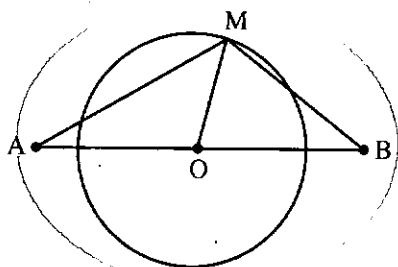
$$\Rightarrow \frac{-b_1 c_1}{a_1} = \frac{-b_1 c_1}{a_1}$$

پس مختصات نقطه‌ی H که محل برخورد دو ارتفاع AH_1 و BH_7 است، در معادله‌ی ارتفاع CH_7 صدق می‌کند. بنابراین، سه ارتفاع AH_1 ، BH_7 و CH_7 از یک نقطه می‌گذرند (همرس‌اند).

مثال ۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

اثبات

الف) روش هندسی: دو نقطه‌ی ثابت A و B واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ی M از این صفحه را تعیین کنیم به قسمتی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$ (K مقدار ثابتی است).



از A به B وصل می‌کنیم و وسط پاره خط AB را O می‌نامیم و از

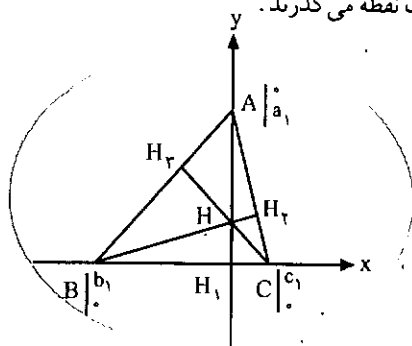
($AC \parallel BB_1$ و $AB_1 \parallel BC$). بنابراین:

$$AB_7 = BC \quad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که: $AB_1 = AA_1$ ؛ یعنی ارتفاع AH_1 از وسط A_1B_1 می‌گذرد. از طرفی، چون AH_1 عمود بر BC و A_1B_1 موازی BC است، پس AH_1 بر A_1B_1 عمود نیز هست. در نتیجه ارتفاع AH_1 ، عمود منصف ضلع A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است. با همین روش ثابت می‌شود که BH_7 عمود منصف ضلع B_1C_1 و CH_7 عمود منصف ضلع A_1C_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است.

اما می‌دانیم که سه عمود منصف ضلع‌های هر مثلث همرس‌اند. در نتیجه، ارتفاع‌های AH_1 ، BH_7 و CH_7 از مثلث ABC که عمود منصف‌های ضلع‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند، همرس خواهند بود. نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های هر مثلث را که در شکل H نامیده‌ایم، مرکز ارتفاعی مثلث می‌نامند. این نقطه ویژگی‌هایی دارد که در دایرةالمعارف هندسه به آن‌ها پرداخته‌ایم.

ب) راه حل جبری: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ارتفاع‌های AH_1 ، BH_7 و CH_7 را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطه‌ی H_1 را مبدأ مختصات، محور x ها را روی BC و محور y ها را روی AH_1 اختیار می‌کنیم (شکل بالا). فرض می‌کنیم: $A = (0, a_1)$ ، $B = (b_1, 0)$ و $C = (c_1, 0)$. برای این که ثابت کنیم سه ارتفاع AH_1 ، BH_7 و CH_7 همرس‌اند، معادله‌ی این سه ارتفاع را می‌نویسیم. آن‌گاه نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع از این سه ارتفاع را به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که این نقطه‌ی برخورد روی ارتفاع سوم قرار دارد. داریم:

$$m_{AC} = \frac{0 - a_1}{c_1 - 0} = -\frac{a_1}{c_1} \Rightarrow m_{BH_7} = \frac{c_1}{a_1} \text{ و } B = (b_1, 0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{c_1}{a_1}(x - b_1)$$

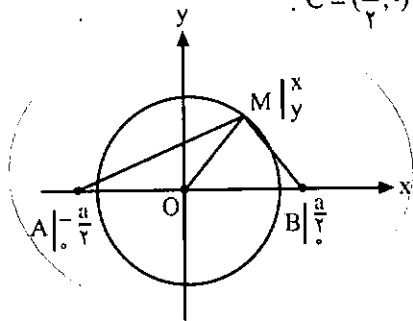
$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} BH_7 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$m_{AB} = \frac{0 - a_1}{b_1 - 0} = -\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow m_{CH_7} = \frac{b_1}{a_1} \text{ و } C = (c_1, 0)$$



عمود منصف پاره خط AB محور y ها و AB روی محور x ها باشد. در این صورت، با فرض $AB = a$ ، خواهیم داشت:

$$B = (-\frac{a}{2}, 0) \text{ و } C = (\frac{a}{2}, 0)$$



اکنون برای تعیین مکان هندسی نقطه ی M فرض می کنیم:
 $M = (x, y)$ ، بنابر فرض مسئله داریم:

$$MA^2 + MB^2 = K^2$$

اما با توجه به این که: $A = (-\frac{a}{2}, 0)$ ، $B = (\frac{a}{2}, 0)$ و $M = (x, y)$ داریم:

$$MA^2 = (-\frac{a}{2} - x)^2 + (0 - y)^2 = (\frac{a}{2} + x)^2 + y^2$$

$$MB^2 = (\frac{a}{2} - x)^2 + (0 - y)^2 = (\frac{a}{2} - x)^2 + y^2$$

از آن جا، از رابطه ی $MA^2 + MB^2 = K^2$ خواهیم داشت:

$$(\frac{a}{2} + x)^2 + y^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 + y^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 + ax + 2y^2 + \frac{a^2}{4} + x^2 - ax = K^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = K^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2K^2 - a^2}{4} = \text{مقدار ثابت}$$

این معادله، معادله ی دایره ای به مرکز O، وسط پاره خط AB

به شعاع مقدار ثابت $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است. بنابر این، مکان هندسی

نقطه ی M دایره ای است که مرکزش نقطه ی ثابت O، وسط پاره خط

AB و شعاعش $R = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: به نظر شما، کدام راه حل برای این مسئله ساده تر است:

راه حل هندسی یا راه حل جبری؟ نظر خود را با دلیل به نشانی مجله ی ریاضی برهان دبیرستان ارسال کنید.

ادامه دارد...

زیرنویس

M به O وصل می کنیم. بنابر رابطه ی میانه ها در هر مثلث، در مثلث MAB داریم:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \quad (1)$$

اما بنا به فرض: $MA^2 + MB^2 = K^2$ پس از رابطه ی ۱ نتیجه می شود:

$$K^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow MO^2 = \frac{K^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2K^2 - AB^2}{4}$$

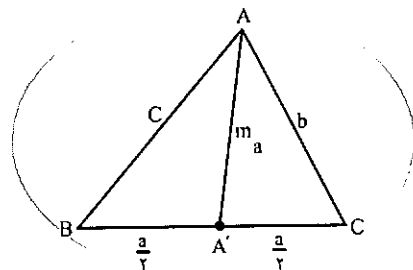
$$AB = a \Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - AB^2}$$

چون پاره خط $AB = a$ مقدار ثابتی است، پس MO نیز مقدار ثابتی است. اما نقطه ی ثابتی می باشد، بنابر این مکان هندسی نقطه ی M دایره ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: در چه صورت دایره ی مکان هندسی نقطه ی M، از دو نقطه ی A و B می گذرد؟ در چه صورت این دو نقطه درون دایره اند و در چه صورت بیرون دایره؟ پاسخ خود را به نشانی مجله ی برهان ارسال کنید.

نکته: برای اثبات این مسئله از قضیه ی زیر استفاده کرده ایم.
 قضیه: مجموع مربعات دو ضلع هر مثلث، برابر است با دو برابر مربع طول میانه ی وارد بر ضلع سوم، به اضافه ی نصف مربع ضلع سوم. یعنی در مثلث ABC، اگر میانه ی AA' را رسم کنیم، داریم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{یا:}$$

اثبات این قضیه را می توانید در جلد پنجم دایره المعارف هندسه

پیمینید.

(ب) اثبات به روش جبری: دو نقطه ی ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می گیریم. می خواهیم مکان هندسی نقطه ی M از این

صفحه را تعیین کنیم، به قسمی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$.

برای اثبات، دستگاه مختصات xOy را چنان در نظر می گیریم که O وسط پاره خط AB مبدأ مختصات،