

محمد هاشم رستمی

دوره‌ی هفدهم / شماره‌ی ۲ زمستان ۱۳۸۶

بنابراین هندسه ی اقلیدسی، جبری را که تا آن زمان شناخته شده بود، نیز دربرمی گرفت؛ مثلاً حل معادله ی درجه ی دوم یک مجهولی به روش هندسی انجام می شد.

پس از ویرانی تمدن یونان به وسیله ی اسکندر مقدونی و انتقال آن به اسکندریه در مصر، دانشمندان اسکندریه، حساب و جبر را به هندسه ی اقلیدسی اضافه کردند تا به این وسیله بتوانند نتایج کمی به دست آورند.

بعد از ریاضی دانان اسکندریه، ریاضی دانان اسلامی و ایرانی در پیشرفت و تکامل ریاضیات نقش عمده ای داشته اند. محمدبن موسی خوارزمی بنیان گذار جبر و مقابله است که کلمه ی جبر یا الجبر^۱ از نام کتاب وی گرفته شده و واژه ی «الگوریت» نیز شکل لاتینی شده ی نام الخوارزمی است. کتاب جبر و مقابله ی خوارزمی سال ها در مدارس اروپا و کشورهای اسلامی به عنوان کتاب درسی تدریس می شد؛ در واقع کتاب اصول اقلیدس، کتاب درسی هندسه و کتاب جبر و مقابله ی خوارزمی، کتاب درسی جبر در مدارس این کشورها بود.

در استاندارد ۸ مربوط به استانداردهای موضوعی NCTM که «هندسه از دیدگاه جبری» است، آمده است: «یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات، اتصال و ارتباط بین هندسه و جبر است.»

در تکامل هندسه که به پیدایش هندسه های جدید از جمله هندسه ی تحلیلی منجر شده است، ریاضی دانان ایرانی نقش مهمی داشته اند. حکیم عمر خیام (۴۳۹-۵۲۶ هـ.ق) اولین کسی است که در جبر و مقابله، معادلات را برحسب درجه ی مجهول مرتب و با روشی تحلیلی گونه حل و بحث کرد. خیام نخستین ریاضی دانی است که ریشه های معادله ی درجه ی سوم را به روش هندسی به دست آورد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه، یعنی هندسه ی تحلیلی را طرح ریزی کرد. اما هندسه ی تحلیلی به طور رسمی توسط رنه دکارت^۲ (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰) در سال ۱۶۱۹ به دنیا معرفی شد و بی یو فرما^۳ (۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵) نیز تقریباً هم زمان با دکارت، این هندسه را کشف کرد.

با پیدایش هندسه ی تحلیلی در قرن هفدهم میلادی، ریاضیات گام بزرگی به جلو برداشت، زیرا این امکان به وجود آمد که ایده های هندسی ریاضی دانان باستان، به زبان هندسه ی مختصاتی بیان شود و بسط و گسترش یابد و در نتیجه ابزار جدیدی برای حل دامنه ی وسیعی از مسأله ها فراهم شود.

در واقع، تناظری مستقیم بین مفاهیم و ایده های پایه ای هندسه در دو دیدگاه هندسی و جبری وجود دارد. نقطه، خط و صفحه، از مفاهیم اساسی و تعریف نشده ی هندسه هستند. اگرچه این موضوع ها تعریف نشده اند، ولی به وسیله ی اصول موضوعه ی معینی تبیین و توصیف شده اند. این مفهوم ها در دیدگاه جبری ارائه می شوند.

اینک ارتباط بین دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری در صفحه (دو بعد) را بررسی می کنیم. اگر صفحه ی E به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی [متعامد] متشکل از دو محور مختصات عمود بر هم و مجهز کنیم، یک تناظر یک به یک بین صفحه ی E و حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [ضرب دکارتی روی اعداد حقیقی] برقرار می شود. به این ترتیب که به هر نقطه ی P از صفحه ی E، یک زوج مرتب (x و y) از اعداد حقیقی نظیر می شود و برای هر زوج مرتب (x و y)، نقطه ای نظیر، در صفحه ی مختصات وجود خواهد داشت. در حقیقت، دستگاه مختصات دکارتی، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه و جبر است و تحت این شرایط:

$$\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \text{نقطه ی P از صفحه ی E}$$

و این صفحه به مفهوم جبری است.

$$\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longleftrightarrow \text{صفحه ی E به مفهوم هندسی}$$

تناظر

$$\{L: ax + by + c = 0 | (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \text{خط L از صفحه ی E}$$

تناظر

$$\{y = f(x) | (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \text{منحنی (C) از صفحه ی E}$$

تناظر

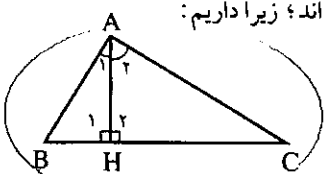
نکته ی ۱. به جای دستگاه مختصات دکارتی در صفحه، می توان از دستگاه مختصات قطبی در صفحه و یا هر دستگاه مختصات تعریف شده ی دیگری استفاده کرد.

نکته ی ۲. چگونگی نصب دستگاه مختصات در صفحه، برای ساده تر شدن و یا طولانی تر شدن محاسبات، از اهمیت زیادی برخوردار است؛ یعنی ما می توانیم با انتخاب دستگاه مختصات در صفحه، به نحوی مناسب، محاسبات را به حداقل برسانیم.

اکنون به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل شده اند، توجه کنید.

مثال ۱. قضیه: ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه ی هندسی بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر است.

اثبات با رویکرد هندسی: مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر می گیریم و ارتفاع AH را رسم می کنیم (شکل ۱). دو مثلث قائم الزاویه ی ABH و ACH به دلیل برابری زاویه های متناظرشان، متشابه اند؛ زیرا داریم:



(شکل ۱)

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \text{ و } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B} = 90^\circ \quad (۲)$$

بر حسب مختصات نقطه های A، B و C به دست آوریم و در این رابطه قرار دهیم و ثابت کنیم که این رابطه به ازای مقادیرهای قرار داده شده به جای AH، BH و CH همواره برقرار است.

اما نخست لازم است مختصات نقطه ی H، پای ارتفاع AH را بر حسب مختصات رأس های A، B و C محاسبه کنیم. برای این کار باید معادله ی خط AH و معادله ی خط BC را به دست آوریم و آن گاه، مختصات نقطه ی برخورد آن ها را تعیین کنیم. داریم:

$$B \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad C \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow BC: y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} (x - b_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} x - b_2 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$m_{BC} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}, AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}$$

$$\Rightarrow AH: y - a_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} (x - a_1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2, \text{ AH ارتفاع است}$$

$$BC: \begin{cases} y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} x - b_2 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 \\ AH: \begin{cases} y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} x - b_2 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} \right) x = a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + a_2 - b_2$$

$$\frac{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2}{(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)} x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2}{(c_2 - b_2)(c_1 - b_1)} + a_2 - b_2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2} = \alpha$$

طول نقطه ی H را α می گیریم. برای محاسبه ی عرض نقطه ی H داریم:

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \alpha - b_2 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

از متشابه بودن این دو مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

و این، حکم مسئله است.

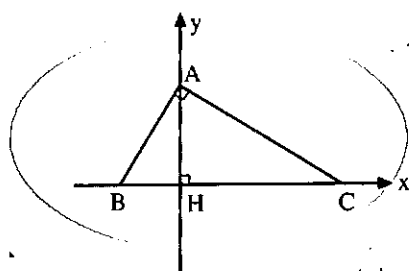
اثبات بارویکرد جبری: مثلث قائم الزاویه ی $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می گیریم و ارتفاع AH را رسم می کنیم. محور x ها را منطبق بر BC و محور y ها را منطبق بر AH اختیار می کنیم. اگر $AH = h$ ، $BH = d$ و $CH = e$ فرض شود، خواهیم داشت:

$$A = (0, h) \text{ و } B = (-d, 0) \text{ و } C = (e, 0) \quad AB \perp AC$$

$$m_{AB} = \frac{0 - h}{-d - 0} = \frac{h}{d} \text{ و } m_{AC} = \frac{0 - h}{e - 0} = -\frac{h}{e}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{h}{d} \times \frac{-h}{e} = -1$$

$$\Rightarrow h^2 = de \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$



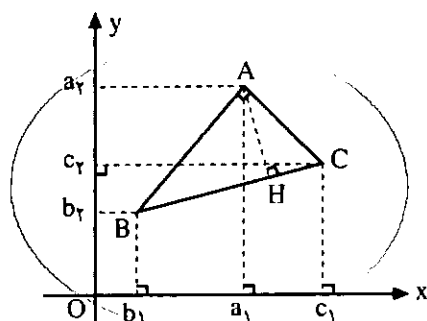
(شکل ۲)

و این حکم مسئله است.

توجه کنید:

اگر دستگاه محورهای مختصات را به طور دل خواه در نظر

گیریم (شکل ۳)، رأس های مثلث قائم الزاویه ی $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ از این قرار خواهد بود: $A = (a_1, a_2)$ ، $B = (b_1, b_2)$ و $C = (c_1, c_2)$.



(شکل ۳)

ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم می کنیم. اکنون برای اثبات رابطه ی $AH^2 = HB \cdot HC$ ، لازم است طول پاره خط های AH، BH و CH را بر حسب مختصات رأس های مثلث، یعنی

است، زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند ($AM = MA'$) و ($BM = MC$).

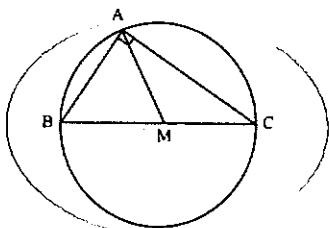
از طرف دیگر، زاویه‌ی A از این متوازی الاضلاع 90° است، پس این متوازی الاضلاع مستطیل است. اما می‌دانیم که قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند، بنابراین: $AA' = 2AM = BC$ و از آن‌جا: $AM = \frac{BC}{2}$. پس حکم مسئله ثابت شد.

نکته: در این اثبات از قضیه‌های زیر استفاده شده است:

۱. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۲. متوازی الاضلاعی که یک زاویه‌ی 90° داشته باشد، مستطیل است.

۳. قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند.
راه دوم:



(شکل ۵)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AM = \frac{BC}{2}$$

برای اثبات، دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره از رأس A می‌گذرد، زیرا کمان درخور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به یک پاره خط، دایره‌ای است که به قطر آن پاره خط رسم می‌شود. پس AM مساوی شعاع این دایره است؛ یعنی داریم:

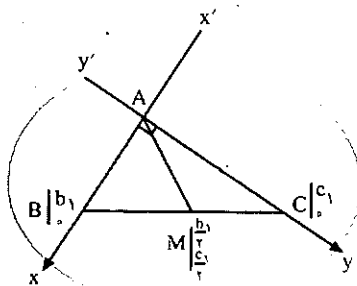
$$AM = MB = MC \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

(ب) راه حل جبری

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AM = \frac{BC}{2}$$



(شکل ۶)

$$\Rightarrow H \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{c_1 - b_1}{c_1 - b_1} \alpha - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 = \beta \end{cases}$$

از آن خواهیم داشت:

$$AH = \sqrt{(\alpha - a_1)^2 + (\beta - a_2)^2}, BH = \sqrt{(\alpha - b_1)^2 + (\beta - b_2)^2}$$

$$CH = \sqrt{(\alpha - c_1)^2 + (\beta - c_2)^2}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$\Rightarrow (\alpha - a_1)^2 + (\beta - a_2)^2 = \sqrt{(\alpha - b_1)^2 + (\beta - b_2)^2}$$

$$\times \sqrt{(\alpha - c_1)^2 + (\beta - c_2)^2}$$

$$\Rightarrow [(\alpha - a_1)^2 + (\beta - a_2)^2]^2 = [(\alpha - b_1)^2 + (\beta - b_2)^2]$$

$$\times [(\alpha - c_1)^2 + (\beta - c_2)^2]$$

با قرار دادن مقدار به جای α و β برحسب (a_1, a_2) ، (b_1, b_2) و (c_1, c_2) ، دو طرف این رابطه با هم برابر خواهند شد و این مطلب درستی رابطه‌ی $AH^2 = BH \cdot CH$ را نشان می‌دهد.

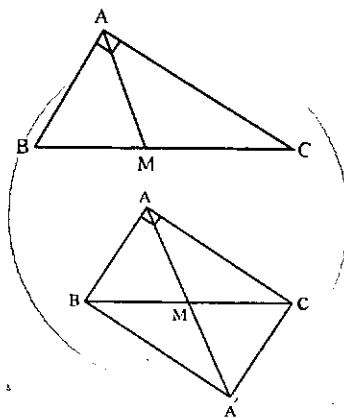
می‌بینید که با انتخاب دستگاه محورهای مختصات به این صورت، چه قدر محاسبات پیچیده و مشکل می‌شود. بنابراین اهمیت انتخاب مناسب دستگاه محورهای مختصات هرچه بیشتر نمایان می‌گردد.

اینک به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

اثبات

(الف) روش هندسی
راه اول:



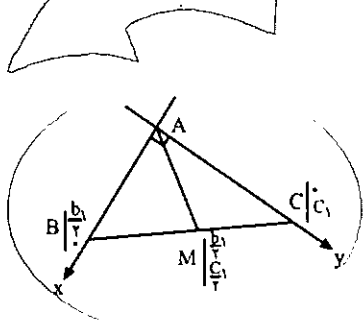
(شکل ۷)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$AM = \frac{BC}{2}$$

است. برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A' امتداد می‌دهیم؛ یعنی $AM = MA'$. سپس از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی الاضلاع

(شکل ۸)



دستگاه محورهای مختصات قائم را چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ مختصات، AB روی محور x و AC روی محور y باشد (شکل ۶).
در این صورت، با فرض $AB = b_1$ و $AC = c_1$ خواهیم داشت:
 $A = (0, 0), B = (b_1, 0), C = (0, c_1)$.

$$M \text{ وسط } BC \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{b_1 + 0}{2} = \frac{b_1}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \end{cases}$$

از آن جا:

$$BC = \sqrt{(0 - b_1)^2 + (c_1 - 0)^2} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \quad (1)$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{c_1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4}} \quad (2)$$

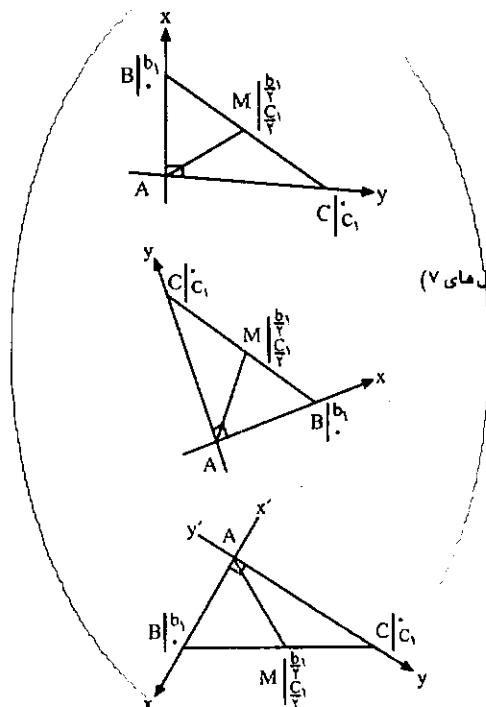
$$= \sqrt{\frac{b_1^2 + c_1^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 + c_1^2}$$

از رابطه های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$AM = \frac{1}{2} BC$$

و حکم مسئله ثابت شد.

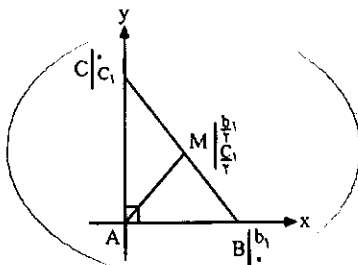
نکته ۱. راستای محورهای Ax و Ay در این دستگاه مختصات قائم و حالت این دستگاه مختصات قائم، کمی غیر معمول به نظر می‌رسد. زیرا به طور معمول محور x ها حالت افقی و محور y ها حالت عمودی دارند. باید توجه داشته باشیم که این مطلب هیچ اشکالی ندارد، زیرا محورهای Ax و Ay از دستگاه محورهای مختصات قائم xAy هر حالتی می‌توانند داشته باشند؛ حالت افقی، حالت عمودی و یا حالت مایل، مانند شکل های ۷ و شکل ۸:



(شکل های ۷)

در واقع، علت به وجود آمدن این حالت برای دستگاه مختصات

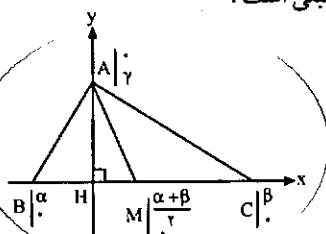
xAy آن است که ما مثلث قائم الزاویه $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل روبه‌رو در نظر گرفتیم. حال اگر مثلث قائم الزاویه $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل ۹ در نظر بگیریم، دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، دارای حالت معمول خود خواهد بود. یعنی محور Ax حالت افقی و محور Ay حالت عمودی خواهد داشت. اما همان طوری که قبلاً هم گفتیم، هیچ ضرورتی وجود ندارد که دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، حالت معمول خود را داشته باشد.



(شکل ۹)

نکته ۲. در همین مسئله، برای حالتی که وتر BC حالت افقی دارد، می‌توانیم BC را روی محور x و AH را روی محور y در نظر بگیریم؛ یعنی نقطه H پای ارتفاع AH را مبدأ مختصات بگیریم. در این صورت، دستگاه محورهای مختصات xHy، حالت معمول خود را خواهد داشت و با فرض $C = (\beta, 0)$ ، $B = (\alpha, 0)$ و $A = (0, \gamma)$ ، نقطه M وسط وتر BC به مختصات $M = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, 0\right)$ خواهد بود و با محاسبه طول پاره خط های AM

و BC بر حسب α ، β و γ ، رابطه ی $AM = \frac{1}{2} BC$ ثابت می‌شود. بدیهی است که محاسبه در این دستگاه مختصات، قدری مفصل تر از حالت قبلی است.



(شکل ۱۰)

زیر نویس