

روش یافتن جمله ی عمومی یک

دنباله ی خاص با استفاده از

«تفاضلات تقسیم شده»

«تفاضلات پیشرو»

اشاره

به نام خدایی که مجموعه ی نعمت هایش ناشمار است و آن چه نصیب آفریده هایش می کند، دنباله ای است صعودی و بی پایان. در این مقاله بیان شده است که با در دست داشتن چند جمله از جملات یک دنباله و با فرض آن که ضابطه ی دنباله یک چند جمله ای باشد، می توانیم جمله ی عمومی دنباله را بیابیم. به این منظور دو روش بیان شده است:

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو. این روش هنگامی قابل استفاده است که چند جمله ی دنباله را به ترتیب، یک در میان، دو در میان و... و در میان داشته باشیم.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده. این روش همیشه و به خصوص هنگامی قابل استفاده است که فاصله ی بین اندیس جملات داده شده برابر نباشد.

● گردآورنده: سیمین اکبری زاده، دبیر ریاضی اراک

تعریف: اگر $\{a_n\}_{n \geq j}$ دنباله ای باشد که فاصله ی هر دو اندیس متوالی آن h باشد، یعنی: $\{a_n\}_{n \geq j}: a_j, a_{j+h}, a_{j+2h}, \dots$ آن گاه:

$$\begin{cases} \Delta^1 a_i = a_i & \text{تفاضل پیشرو مرتبه ی صفرم} \\ \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+h} - \Delta^{n-1} a_i, & i = j, j+h, j+2h, \dots \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n \geq j}$ یک دنباله باشد با جملات $a., a_1, a_2, \dots$ ($j=0, h=1$)، آن گاه:

$$\begin{cases} \Delta^1 a_i = a_i & \text{تفاضل پیشرو مرتبه ی صفرم} \\ \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+1} - \Delta^{n-1} a_i, & i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

مثال ۱. جدول ۱، جدول تفاضلات پیشروی دنباله $a., a_1, a_2, \dots$ و $10, 5, 2, 1, 2$ است، با فرض آن که جملات با $a., a_1, a_2, \dots$ نام گذاری شده باشند.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$	$\Delta^3 a_i$
۰	۲	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۲	۰
۲	۲	۳	۲	
۳	۵	۵		
۴	۱۰			

جدول ۱

نتیجه: در مثال ۱، تفاضلات پیشروی مرتبه ی دوم دنباله، ثابت و تفاضلات مرتبه ی سوم به بعد آن صفر است.

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ، (برای $k > p$)
 $\Delta^k a_j \neq 0, \Delta^p a_j = 0$ (به عبارت دیگر تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی p دنباله ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله $\{a_n\}$ ، یک جمله‌ای درجه‌ی p به صورت زیر است:

فرمول (۱)

$$a_n = a_j + \Delta a_j \binom{\theta}{1} + \Delta^2 a_j \binom{\theta}{2} + \dots + \Delta^p a_j \binom{\theta}{p} \quad \theta = \frac{n-j}{h}$$

$$\binom{\theta}{p} = \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-p+1)}{p!} \quad \text{در این فرمول}$$

است. در ضمن فرض بر این است که فاصله‌ی اندیس‌های هر دو جمله‌ی متوالی دنباله برابر h باشد و اندیس جمله‌ی اول دنباله j باشد.

در حالت خاص، اگر جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نمایش دهیم، داریم: $j=0, h=1$. لذا:
 $\theta = n$

پس:

$$a_n = a_0 + \Delta a_0 \binom{n}{1} + \Delta^2 a_0 \binom{n}{2} + \dots + \Delta^p a_0 \binom{n}{p} \quad \text{فرمول (۲)}$$

مثال ۲. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات $1, 5, 11, 19, 29, \dots$ با توجه به جدول ۲ و ثابت بودن تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی اول آن
 $a_n = a_0 + \Delta a_0 \binom{n}{1} = 2 + 3n \quad (n \geq 0)$ خواهد بود.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$
۰	۲	۳	۰
۱	۵	۳	۰
۲	۸	۳	۰
۳	۱۱		

جدول ۲

مثال ۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات $1, 5, 11, 19, 29, \dots$ با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۱ و فرمول ۲ به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$a_0 = 2, \Delta a_0 = -1, \Delta^2 a_0 = 2 \Rightarrow a_n = 2 - \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} \Rightarrow$$

$$a_n = n^2 - 2n + 2 \quad (n \geq 0)$$

طبق ضابطه به دست آمده:

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 10$$

مثال ۴. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات $1, 5, 11, 19, 29, \dots$ با فرض آن‌که جملات با $a_1, a_2, \dots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۱ و فرمول ۱ به شکل زیر به دست خواهد آمد. داریم: $j=1, h=1$. لذا در فرمول ۱ به جای θ ، $n-1$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + \Delta a_1 \binom{n-1}{1} + \Delta^2 a_1 \binom{n-1}{2} \Rightarrow a_n = 2 - 1 \binom{n-1}{1} +$$

$$2 \binom{n-1}{2} = n^2 - 4n + 5 \quad (n \geq 1)$$

مثال ۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی

$1, 5, 11, 19, 29, \dots$ را به دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ای را به دست آوریم که جملات آن را دو در میان می‌دانیم و:
 $a_2 = 2, a_4 = 1, a_6 = 2, a_8 = 5, a_{10} = 10, \dots$

پس جملات دنباله‌ی $1, 5, 11, 19, 29, \dots$ را با $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر بخواهیم مستقیماً از فرمول ۱ استفاده می‌کنیم، با توجه به آن‌که $h=3$ و $j=2$ ،
 داریم: $\theta = \frac{n-2}{3}$. لذا:

$$a_n = a_2 + \Delta a_2 \binom{\frac{n-2}{3}}{1} + \Delta^2 a_2 \binom{\frac{n-2}{3}}{2} \Rightarrow$$

$$a_n = 2 - \frac{n-2}{3} + 2 \times \frac{\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}-1\right)}{2!} =$$

$$a_n = \frac{n^2}{9} - \frac{10}{9}n + \frac{34}{9}$$

در غیر این صورت، با توجه به قاعده‌ی لغزاندن حدود کافی

است، در فرمول به دست آمده در مثال ۳، به جای n ، $\frac{n-2}{3}$ قرار دهیم.

اینک ببینیم اگر فاصله‌ی اندیس‌های جملات دنباله برابر نباشد، چگونه می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را یافت.

تعریف: اگر $\{a(l_n)\}: a(l_1), a(l_2), \dots, a(l_n), \dots$ یک دنباله باشد،

نتیجه: در مثال ۷ هیچ یک از تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی اول و دوم ثابت نیست، ولی می‌توان جملات بعد را چنان انتخاب کرد که تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی سوم ثابت باشد.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی

$$R_i^p \neq 0, R_i^K = 0 (K > P), a(L_0), a(L_1), a(L_2), \dots$$

(به عبارت دیگر، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی p ام دنباله‌ی ثابت باشد)، آن گاه جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$ ، یک چند جمله‌ای درجه‌ی p به صورت زیر است:

فرمول ۳

$$a_n = a(L_0) + R_1^1(n-L_0) + R_2^2(n-L_0)(n-L_1) + \dots + R_p^p(n-L_0)(n-L_1)\dots(n-L_{p-1})$$

مثال ۸. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $1, 5, 2, 10, 2, 1$ ، با فرض آن که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۳ به شکل زیر است:

داریم:

$$L_0 = 0, L_1 = 1, L_2 = 2, a(L_0) = 2, R_1^1 = -1, R_2^2 = 1$$

پس:

$$a_n = 2 - 1(n-0) + 1(n-0)(n-1) = n^2 - 2n + 2 \quad n \geq 0$$

که همان جواب به دست آمده در مثال ۳ است.

مثال ۹. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $1, 5, 2, 10, 2, 1$ و $1, 5, 2, 10, 2, 1$

و ۲ را به دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم ضابطه‌ی دنباله‌ای را به دست آوریم که: $a_1 = 2, a_5 = 1, a_7 = 2, a_8 = 5$. در این مثال، چون اندیس‌ها هم فاصله نیستند، نمی‌توان از فرمول ۱ استفاده کرد و باید از فرمول ۳ بهره گرفت. با توجه به جدول ۴ و با فرض ثابت بودن تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی سوم دنباله، a_n یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است که:

$$L_0 = 1, L_1 = 5, L_2 = 7, L_3 = 8, a(L_0) = 2,$$

$$R_1^1 = \frac{-1}{4}, R_2^2 = \frac{1}{8}, R_3^3 = \frac{17}{168}$$

پس:

$$a_n = 2 - \frac{1}{4}(n-1) + \frac{1}{8}(n-1)(n-5) + \frac{17}{168}(n-1)(n-5)(n-7)$$

نتیجه: با فرض آن که ضابطه‌ی یک دنباله چند جمله‌ای باشد و

$$\begin{cases} a(L_i) = R_i^1: \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه‌ی صفرم} \\ a(L_i) = R_i^n: \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه‌ی } n \text{ام} \end{cases} \quad R_i^n = \frac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{L_{i+n} - L_i}$$

نکته‌ی قابل توجه آن است که چون امکان دارد اندیس‌های جملات هم فاصله نباشند، به جای آن که آن‌ها را با i نمایش دهیم، با L_i نمایش داده‌ایم.

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n \geq 0}$ یک دنباله باشد، با جملات $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\begin{cases} a_i = R_i^1: \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه صفرم} \\ a_i = R_i^n: \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه } n \text{ام} \end{cases} \quad R_i^n = \frac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{n}$$

مثال ۶. جدول ۳، جدول تفاضلات تقسیم دنباله $1, 5, 2, 10, 2, 1$ است، با فرض آن که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = a_i = R_i^1$	R_i^1	R_i^2	R_i^3
0	0	2	$(1-2)/1=-1$	$(1-(-1))/2=1$	0
1	1	1	$(2-1)/1=1$	$(3-1)/2=1$	0
2	2	2	$(5-2)/1=3$	$(5-3)/2=1$	
3	3	5	$(10-5)/1=5$		
4	4	10			

جدول ۳

در این مثال، اندیس L_i همان i است، زیرا طبق نام گذاری: $L_0 = 0, L_1 = 1, L_2 = 2, \dots$

نتیجه: در مثال ۶، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی دوم دنباله ثابت است.

مثال ۷. جدول ۴، جدول تفاضلات تقسیم شده دنباله‌ی $1, 5, 2, 10, 2, 1$ است، با فرض آن که جملات با $a_1, a_5, a_7, a_8, \dots$ نام گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = R_i^1$	$R_i^1 = \frac{R_{i+1}^0 - R_i^0}{L_{i+1} - L_i}$	$R_i^2 = \frac{R_{i+2}^0 - R_i^0}{L_{i+2} - L_i}$	$R_i^3 = \frac{R_{i+3}^0 - R_i^0}{L_{i+3} - L_i}$
0	1	2	$\frac{1-2}{5-1} = -\frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{5}-(-\frac{1}{4})}{7-1} = \frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-\frac{1}{8}}{8-1} = \frac{17}{168}$
1	5	1	$\frac{2-1}{7-5} = \frac{1}{2}$	$\frac{3-1}{8-5} = \frac{2}{3}$	
2	7	2	$\frac{5-2}{8-7} = 3$		
3	8	5			

جدول ۴



اعداد جالب ریاضی

درست به این اعمال ضرب توجه کنید.

$$21 \times 24 = 504$$

$$12 \times 42 = 504$$

$$63 \times 12 = 756$$

$$36 \times 21 = 756$$

$$13 \times 13 = 169$$

$$31 \times 31 = 961$$

$$62 \times 13 = 806$$

$$26 \times 31 = 806$$

$$96 \times 23 = 2208$$

$$69 \times 32 = 2208$$

$$84 \times 12 = 1008$$

$$48 \times 21 = 1008$$

$$36 \times 84 = 3024$$

$$63 \times 48 = 3024$$

$$42 \times 36 = 1512$$

$$24 \times 63 = 1512$$

$$84 \times 24 = 2016$$

$$48 \times 42 = 2016$$

$$93 \times 26 = 2418$$

$$39 \times 62 = 2418$$

$$96 \times 46 = 4416$$

$$69 \times 64 = 4416$$

با در دست داشتن r تا از جملات، می توان جمله ی عمومی دنباله را بر حسب n با حداکثر درجه ی $r-1$ به دست آورد. بدین منظور، در صورتی که فاصله ی اندیس جملات برابر باشد، از روش تفاضلات پیشرو و در غیر این صورت، از روش تفاضلات تقسیم شده استفاده می کنیم و حداکثر تا تفاضل مرتبه ی $r-1$ پیش می رویم. اگر تفاضل مرتبه ی p ام $(1 \leq p \leq r-2)$ ثابت باشد، آن گاه جمله ی عمومی دنباله، چند جمله ای درجه ی p است. و در غیر این صورت، با فرض ثابت بودن تفاضل مرتبه ی $r-1$ ام، جمله ی عمومی دنباله، چند جمله ای درجه ی $r-1$ خواهد بود.

تمرین

۱. ضابطه ی دنباله ای را بیابید که به ترتیب، جمله ی اول، دوم، سوم و چهارم آن $2, 10, 48, 8$ باشد.
حل: Δ^2 ثابت است و:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \Delta a_1 = 8, \Delta^2 a_1 = -10 \Rightarrow a_n \\ &= 2 + 8 \binom{n-1}{1} - 10 \binom{n-1}{2} \Rightarrow a_n \\ &= -5n^2 + 23n - 16 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

۲. ضابطه ی دنباله ای را بیابید که به ترتیب، جمله ی سوم، پنجم، هفتم و نهم آن $2, 10, 48, 8$ باشد.

$$\begin{aligned} j=3, h=2 \Rightarrow \theta &= \frac{n-3}{2} \\ a_n &= 2 + 8 \binom{\frac{n-3}{2}}{1} - 10 \binom{\frac{n-3}{2}}{2} \\ &= 2 + 8 \left(\frac{n-3}{2} \right) - 5 \left(\frac{n-3}{2} \right) \left(\frac{n-5}{2} \right) \end{aligned}$$

۳. ضابطه ی دنباله ای را بیابید که به ترتیب جمله ی سوم، پنجم، ششم و دهم آن $2, 10, 48, 8$ باشد.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} L_1 &= 3, L_2 = 5, L_3 = 6, L_4 = 10, a(L_4) = 2, \\ R_1^1 &= 4, R_2^1 = -2, R_3^1 = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

و با فرض ثابت بودن R^3 داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 - 4(n-3) - 2(n-3)(n-5) \\ &\quad + \frac{9}{25}(n-3)(n-5)(n-6) \end{aligned}$$