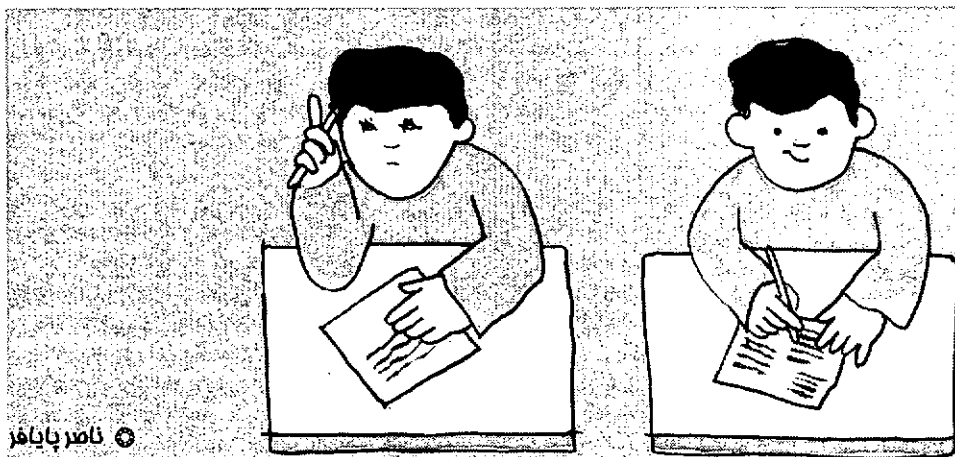




نامر پایافر

روش های محاسبه سریع

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

ضرب خارجی دو بردار - دترمینان ماتریس های 3×3 - ماتریس الحاقی و ماتریس وارون یک ماتریس 3×3

پس برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار، در سه مرحله به صورت زیر عمل می کنیم:

مرحله اول - مؤلفه های اول دو بردار را رها کرده و با مؤلفه های باقیمانده به صورت دترمینان 2×2 عمل می کنیم؛ عدد حاصل، مؤلفه اول بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ است:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \hline \hline \hline \end{vmatrix}$$

مرحله دوم: این بار مؤلفه های دوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه های باقیمانده به صورت دترمینان 2×2 عمل می کنیم، با این تفاوت که جواب حاصل، در این مرحله را باید قرینه کنیم تا مؤلفه دوم بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ به دست آید:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hline \hline \hline \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

مرحله سوم: در این مرحله، مؤلفه های سوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه های باقیمانده به صورت دترمینان 2×2 عمل می کنیم.

روش ساده برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار

ابتدا دترمینان ماتریس های 2×2 را یادآوری می کنیم، اگر $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ آنگاه دترمینان A را با نماد $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-2) \times 5 = 12 + 10 = 22$$

محاسبه ضرب خارجی دو بردار

دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ را در نظر می گیریم، برای محاسبه ضرب خارجی دو برداری که آن را با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ نشان می دهیم، ابتدا دو بردار را در دو ستون یا دو سطر به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

محاسبه دترمینان ماتریس های ۳×۳ به روشی ساده

با این روش مقدار دترمینان هر ماتریس ۳×۳ را در چند ثانیه می توان محاسبه کرد.

دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ را در نظر می گیریم.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

برای محاسبه آن به صورت زیر عمل می کنیم.

۱- دو سطر (یا دو ستون) اول و دوم دترمینان را انتخاب

کرده و مؤلفه های اول این دو را حذف می کنیم، سپس جواب دترمینان 2×2 حاصل را در اولین مؤلفه سطر (یا ستون) سوم ضرب می کنیم.

۲- دو درایه دوم سطرها (یا ستون های) انتخاب شده

حذف کرده و جواب دترمینان 2×2 را در مؤلفه دوم سطر سوم

(یا ستون سوم) ضرب کرده و سپس حاصل را قرینه می کنیم.

۳- در این مرحله دو درایه سوم سطرها (ستون ها) در نظر

گرفته شده را حذف کرده و جواب دترمینان حاصل را در سوم

درایه سطر (ستون) سوم ضرب می کنیم.

۴- مجموع عددهای حاصل در سه مرحله بالا، جواب

دترمینان 3×3 است.

مثال: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

حل:

مرحله اول:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\times (2 \times 5 - (-3)(-1)) = 2(10 - 3) = 14$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\times (3 \times 5 - 4(-1)) = 19$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\vec{a} = (2, 3, +1)$ و $\vec{b} = (3, 2, 4)$ حاصل $\vec{a} \times \vec{b}$

را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \times 4 - 1 \times 2 = 10 \end{vmatrix}$$

مرحله اول

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(2 \times 4 - 3 \times 1) = -5 \end{vmatrix}$$

مرحله دوم

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 \end{vmatrix}$$

مرحله سوم

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{vmatrix}$$

نتیجه

مثال: اگر $\vec{p} = (1, 0, -2)$ و $\vec{q} = (4, -1, 3)$ حاصل $\vec{p} \times \vec{q}$

را محاسبه کنید.

حل: در این روش مؤلفه های دو بردار را به صورت سطری

نوشته و $\vec{p} \times \vec{q}$ را محاسبه می کنیم.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1)(-2) = -2$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \times 3 - (-2) \times 4) = -(3 + 8) = -11$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1) - 4 \times 0 = -1$$

نتیجه: $\vec{p} \times \vec{q} = (-2, -11, -1)$

که در آن A^* را ماتریس الحاقی می‌گوئیم و برای محاسبه آن از دستور بالا استفاده می‌کنیم.

مرحله اول - محاسبه درآیه‌های ستون اول A^*

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow \text{سطر دوم } A & 0 & 4 & 1 \\ \leftarrow 1 & -3 & -2 & \\ \hline & -5 & 1 & -4 \end{array}$$

س

از روش محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده می‌کنیم تا درآیه‌های ستون اول ماتریس الحاقی به دست آید.

مرحله دوم: در این مرحله عناصر ستون دوم ماتریس الحاقی محاسبه می‌شود.

$$\begin{array}{ccc} \text{سطر اول } A & -3 & 1 & -2 \\ \leftarrow 1 & -3 & -2 & \\ \hline & -8 & 4 & -10 \end{array} \xrightarrow{10} \begin{array}{ccc} 8 & -4 & 10 \end{array}$$

درآیه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی

مرحله سوم: برای محاسبه درآیه‌های ستون سوم A^* از دو سطر اول و دوم A استفاده می‌کنیم

درآیه‌های ستون سوم ماتریس A^* سطر اول

$$\begin{array}{ccc} A & -3 & 1 & -2 \\ \leftarrow 0 & 4 & 1 & \\ \hline & 9 & -3 & 12 \end{array}$$

سطر دوم

در نتیجه ماتریس الحاقی، ماتریس 3×3 ، A به صورت زیر است:

$$A^* = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 9 \\ 1 & 4 & -3 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون ماتریس A به کمک روشی که ارائه شد دترمینان A را محاسبه می‌کنیم $-6 = 9 \times 1 - 2(-3) + 12(-2)$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-2 \times (3(-3) - 4 \times 2) = -2 \times (-9 - 8) = 34$$

در نتیجه:

$$|A| = 14 - 19 + 34 = 29$$

روشی ساده برای محاسبه ماتریس الحاقی و وارون یک ماتریس 3×3

در این روش بدون استفاده از کهاد و همسازه در زمانی بسیار کوتاه می‌توان ماتریس الحاقی یک ماتریس 3×3 را محاسبه کرد.

برای محاسبه ماتریس الحاقی مانند محاسبه ضرب خارجی و بردار عمل می‌کنیم، به این ترتیب که:

مرحله ۱- سطر اول را حذف می‌کنیم و هریک از دو سطر دوم و سوم را یک بردار در نظر گرفته و آنها را در هم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درآیه‌های اولین ستون ماتریس الحاقی است.

مرحله ۲- سطر دوم دترمینان را حذف کرده و با این فرض که دو سطر اول و سوم، دو بردار است آنها را در هم ضرب خارجی می‌کنیم سپس جواب‌های بدست آمده را قرینه می‌کنیم. به این ترتیب درآیه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی به دست می‌آید.

مرحله ۳- مرحله آخر سطر سوم را حذف کرده و سطرهای اول و دوم دترمینان را مانند دو بردار در نظر گرفته و آنها را در هم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درآیه‌های ستون سوم ماتریس الحاقی است.

$$\text{مثال. وارون ماتریس } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ را محاسبه کنید.}$$

حل: می‌دانیم وارون ماتریس A از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$