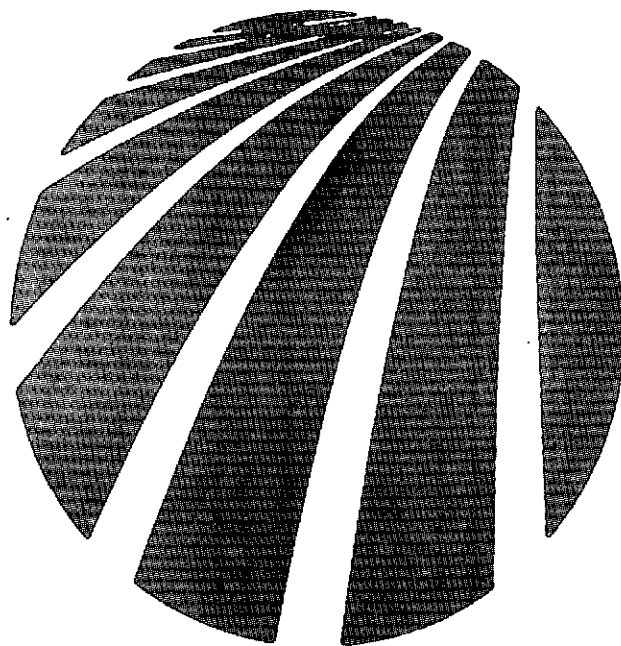


روشهای عددی برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرالهای معین



حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
دوره پیش دانشگاهی رشته علوم ریاضی

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

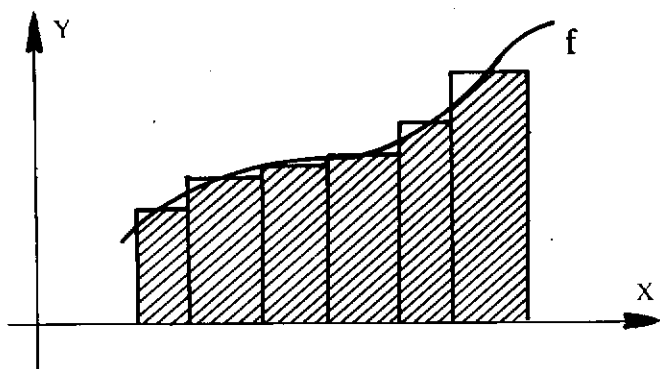
مقدار $I_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$ را تقریب مناسبی برای مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ دانست.

روش نقطه میانی (مستطیلی)

دیدیم که مقدار $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$ با انتخاب نقطه c_k تغییر می کند. در این روش نقطه c_k وسط x_{k-1} و x_k در نظر گرفته می شود:

$$c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند f رسم شده است، توجه کنید:



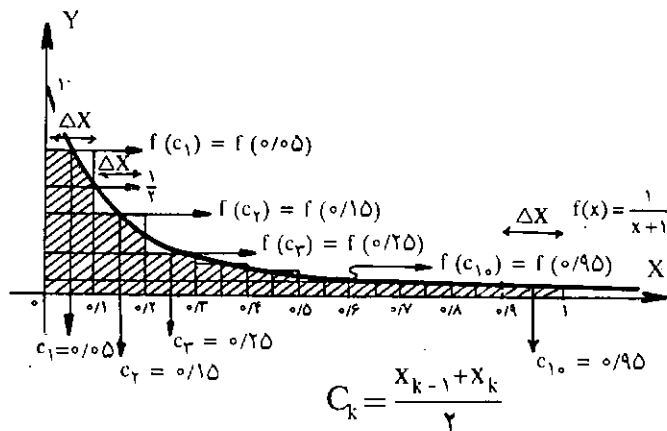
با روشهای متداول محاسبه $\int_a^b f(x) dx$ آشنا هستید. در این مقاله سعی می شود برخی از روشهای عددی برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرالهای معینی که با روشهای متداول و معمول قابل محاسبه نیستند، ارائه شود. به طور مثال، می دانیم تابع f با ضابطه $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ روی فاصله $[1, 2]$ پیوسته و در نتیجه انتگرال پذیر است، ولی مقدار انتگرال معین $\int_1^2 \sin(\frac{1}{x}) dx$ چیست؟ و چگونه می توان آن را محاسبه کرد؟

در اینجا راههایی برای محاسبه مقدار تقریبی این گونه انتگرالهای معین ارائه خواهد شد. مجموعه این روشها به نام روشهای عددی انتگرالگیری موسوم است. در تعریف انتگرال دیدیم که اگر بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

که در این رابطه $k \in \mathbb{N}$ ، $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$ و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ است.

بنابراین اگر n به اندازه کافی بزرگ اختیار شود، می توان



مثال: با استفاده از روش نقطه میانی مقدار انتگرالهای

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx \quad \text{و} \quad I_2 = \int_0^1 \sin(x^2) dx \quad \text{و} \quad I_3 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

تخمین بزنید.

حل: اگر برای هر سه انتگرال بازه $[0, 1]$ را به ۱۰ قسمت

مساوی تقسیم کنیم $(n=10)$ ، آنگاه $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1$

$$\text{و} \quad x_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_k = \frac{k}{10} = 0.1k \quad (1 \leq k \leq 10)$$

و به ازای هر $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ، مقدار نقاط میانی

$c_k = 0.1k - 0.05$ را به ترتیب از ضابطه های $f(x) = x^2$ و

$f(x) = \sin(x^2)$ و $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، محاسبه می کنیم:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{10} f(c_k) \Delta x \Rightarrow I_1 = 0.1 \sum_{k=1}^{10} (0.1k - 0.05)^2 \Rightarrow$$

$$I_1 = 0.1 \left(\sum_{k=1}^{10} 0.01k^2 - \sum_{k=1}^{10} 0.01k + \sum_{k=1}^{10} 0.0025 \right)$$

$$= 0.1 \left[0.01 \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right) - 0.01 \left(\frac{10 \times 11}{2} \right) + 0.0025(10) \right]$$

$$= 0.2325 \Rightarrow \boxed{I_1 \approx 0.2325}$$

می دانیم مقدار واقعی $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$ برابر $\frac{1}{3}$ است، بنابراین با

مقدار I_1 حدود ۰.۰۰۱ اختلاف دارد.

در جدول زیر مقدار انتگرال I_1 را برای تعداد تقسیمات

متفاوت نمایش داده ایم:

n	۱۰	۵۰	۱۰۰	۲۰۰
I_n	۰/۲۳۲۵	۰/۲۳۲۳	۰/۲۳۲۳۲۵	۰/۲۳۲۳۳۱

مشاهده می شود که با افزایش n، مقدار I_n به مقدار واقعی

انتگرال نزدیکتر می شود. به همین ترتیب I_2 و I_3 را می توان

مثال: با استفاده از روش نقطه میانی، مقدار انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

حل: اگر بازه $[0, 1]$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم
آنگاه $(n=10)$ ،

$$\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$\text{و} \quad x_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_k = \frac{k}{10} = 0.1k \quad (1 \leq k \leq 10)$$

و به ازای هر $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ، مقدار نقاط میانی

$$c_k = 0.1k = 0.05$$

محاسبه می کنیم:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{10} f(c_k) \Delta x = 0.1 \sum_{k=1}^{10} f(c_k) =$$

$$0.1 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{0.1k - 0.05 + 1} \right)$$

بنابراین:

$$I_1 = 0.1 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{0.1k + 0.95} \right)$$

$$= 0.1 \left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \frac{1}{1.25} + \dots + \frac{1}{1.95} \right)$$

$$I_1 \approx 0.1 \times 6.32223 \Rightarrow \boxed{I_1 \approx 0.632223 \text{ (مقدار تقریبی)}}$$

در اینجا مقدار واقعی انتگرال را محاسبه می کنیم، و سپس با

I_1 مقایسه می کنیم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 \approx 0.69314718 \text{ (مقدار واقعی)}}$$

بنابراین I_1 با تقریب نقصانی کمتر از ۰.۰۶۱ با مقدار

واقعی اختلاف دارد. واضح است که با افزایش n، جواب

به دست آمده برای I_n ، به مقدار واقعی نزدیکتر می شود. یعنی

اگر n به عددی بسیار بزرگ میل کند؛ مقدار I_n به $\ln 2$

می گراید. برای درک بیشتر این روش، تعبیر هندسی محاسبه

I_1 را در شکل زیر مشاهده کنید. مقدار I_1 برابر مجموع

مساحت مستطیلهایی به ابعاد Δx و $f(c_k)$ (مستطیلهای

سایه خورده) است.

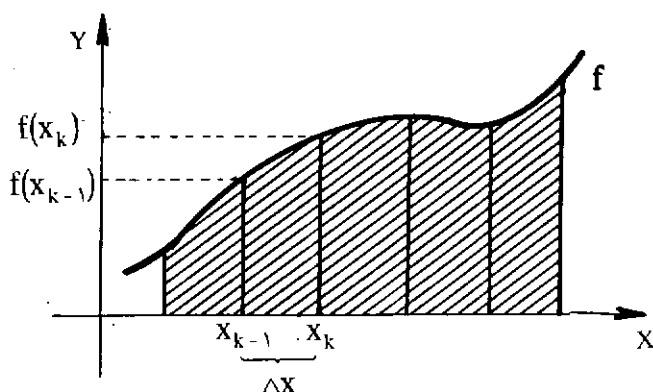
$$\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) = f(x_0) + \sum_{k=2}^n f(x_{k-1}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] \\ &= \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] \end{aligned}$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند f رسم شده است، توجه کنید :



با توجه به شکل مشاهده می کنیم که طول قاعده های هر یک از دوزنقه ها $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع آنها Δx است. بنابراین مساحت دوزنقه ای با قاعده های $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع Δx است.

با فرض $m = \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}$ می توان نوشت :

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = \Delta x \left[m + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

مثال: با استفاده از روش دوزنقه ای مقدار انتگرال

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

را تقریب بزنید.

حل: اگر بازه $[0, 1]$ را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم،

$(n=10)$ ، آنگاه $\Delta x = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$J_{10} = \frac{0.1}{2} \left[f(0) + f(1) + 2 \sum_{k=1}^9 f(x_k) \right]$$

به طور تقریبی محاسبه کرد، و به نتایج زیر رسید :

$$I_7 = \int_0^1 \sin(x^2) dx \approx I_{10} = 0.1 \sum_{k=1}^{10} \sin(c_k^2) \approx 0.3098$$

همچنین می توان به نتیجه زیر رسید :

$$I_7 = \int_0^1 \sin(x^2) dx \approx I_{10} = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} \sin(c_k^2) \approx 0.310$$

می دانیم امکان محاسبه مقدار واقعی I_7 وجود ندارد،

بنابراین با افزایش n می توان به مقدار واقعی انتگرال نزدیک شد. با انتخاب n بسیار بزرگ خواهیم دید که مقدار واقعی انتگرال با دقت سه رقم اعشار برابر 0.310 است.

$$I_7 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx I_{10} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} e^{-\frac{c_k^2}{2}} \approx 0.8558$$

همچنین می توان به نتیجه زیر رسید :

$$I_7 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx I_{10} = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} e^{-\frac{c_k^2}{2}} \approx 0.8557$$

بنابراین مقدار انتگرال I_7 با دقت سه رقم اعشار برابر

$$I_7 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.856 \text{ است.}$$

روش دوزنقه

در این روش برای محاسبه $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$ ، به جای این که نقطه c_k را میانگین x_{k-1} و x_k بگیریم، $f(c_k)$ را متوسط مقادیر $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ انتخاب می کنیم :

$$f(c_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

توجه کنید که اگر تابع پیوسته باشد، بنابر قضیه مقدار میانی

یک c_k بین x_{k-1} و x_k وجود دارد که مقدارش برابر $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ باشد.

پس می توان نوشت :

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

با توجه به برابریهای زیر :

روش سیمپسون

این قاعده با تقسیم $[a, b]$ به یک تعداد زوج از بازه‌های برابر (n زوج بازه برابر) و تقریب $f(x)$ به وسیله یک سه جمله‌ای درجه دوم:

$$y = f(x) \approx ax^2 + bx + c \quad (1)$$

که از سه نقطه متوالی متناظر به

$x_0, x_1, x_2; x_1, x_2, x_3; \dots; x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ می‌گذرد به دست

می‌آید. از نظر هندسی این قاعده به جای خم $y = f(x)$

مجموعه‌ای از کمان‌های سهمی تقریبی (۱) را قرار می‌دهد:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

مثال: مقدار انتگرال معین $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ را با استفاده از

روشهای دوزنقه‌ای و سیمپسون با تقسیم بازه $[0, 1]$ به $n = 4$

قسمت برابر، تقریب بزنید.

حل: با فرض $y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

حال مقدار y را با چهار رقم اعشار محاسبه می‌کنیم:

$$y_0 = f(0) = 1/0.0000 \text{ و } y_1 = f(0.25) = 0.9412$$

$$y_2 = f(0.5) = 0.8000 \text{ و } y_3 = f(0.75) = 0.6400$$

$$y_4 = f(1) = 0.5000$$

از قاعده دوزنقه‌ای نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \approx \frac{\Delta x}{3} [y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)] = \frac{0.25}{3}$$

$$[1 + 0.5 + 2(2/3 + 0.8 + 0.64)] = 0.7828$$

از قاعده سیمپسون نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{0.25}{3} (1 + 4(0.9412) + 2(0.8) + 4(0.64) + 0.5)$$

$$= 0.7854$$

در این جا مقدار واقعی $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\text{Arc tan } x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

با توجه به ضابطه تابع، یعنی $f(x) = \frac{1}{x+1}$ می‌توان نوشت:

$$J_{10} = 0.05 \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^9 \frac{1}{x_k + 1} \right]$$

$$\left(\sum_{k=1}^9 \frac{1}{x_k + 1} \approx 6/18742 \right)$$

$$= 0.05 \left[\frac{3}{2} + 2 \left(\frac{1}{1/1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3} + \dots + \frac{1}{1/9} \right) \right] \approx 0.69374$$

در این جا اگر مقدار J_{10} را با مقدار واقعی انتگرال یعنی

$$J = \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \ln 2$$

مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود که J_{10} با تقریب اضافی کمتر از 0.0006 با مقدار واقعی اختلاف دارد.

با مقایسه مقادیر I_{10} و J_{10} و نتیجه می‌شود:

$$I_{10} < J < J_{10} \quad (I_n < J < J_n)$$

تمرین: با استفاده از روش دوزنقه‌ای مقدار $J = \int_1^2 e^{-x^2} dx$

را تقریب بزنید.

مثال: با استفاده از روش دوزنقه‌ای مقادیر $J = \int_1^2 x^2 dx$

را تقریب بزنید.

حل: اگر بازه $[0, 1]$ را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم،

($n = 10$)، آنگاه $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$J_{10} = \frac{0.1}{2} \left[f(0) + f(1) + 2 \sum_{k=1}^9 f(x_k) \right]$$

برای تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ می‌توان نوشت:

$$J_{10} = 0.05 \left[0 + 1 + 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 \right]$$

$$= 0.05 [1 + 2(0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + \dots + 0.81)]$$

$$\Rightarrow J_{10} = 0.3350 \quad (I_n < J < J_n)$$

برای تابع با ضابطه $f(x) = e^{x^2}$ می‌توان نوشت:

$$J'_{10} = 0.05 [1 + e + 2(1/0.01 + \dots + 2/0.73)]$$

می‌دانیم $e \approx 2.7183$ پس:

$$J'_{10} \approx 1/3487$$

تمرین: با استفاده از روش نقطه میانی و روش دوزنقه‌ای

مقدار $S = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ را تقریب بزنید.