

روش مگس

در حل مسائل ریاضی

✪ مرتضی بیات و زهرا فاطمی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه‌ی زنجان

Bayat @iasbs.ac.ir

چکیده

ژورژ پریلیا می‌گوید: «اکثر یک مسأله یا یک قضیه چسبیدن بار به کنار روش به یک روش تبدیل می‌شود.»

در ابتدای این مقاله، چسبیدن روش تصمیمی حل مسأله‌ی ریاضی همانند «پرهان خلف» و «روش نزول نامتناهی فرما» و نیز «استقرای ریاضی» را بررسی می‌کنیم. در ادامه با استفاده از روش پرهان خلف و راه‌حلی ساده برای مسأله‌ی تصمیمی اشتباه‌آمیز، بررسی می‌کنیم که معنای اراته می‌بخشیم و نیز به تصمیمی از استقرا برای احکام حقیقی و کاربردی آن در اثبات ریاضی اشاره می‌کنیم.

هدف اصلی این مقاله، معرفی روش جدیدی به نام «تفسیر بُد» یا «روش مگس» و چگونگی پیوند آن است. روش مگس، در درک و فهم ساده‌ی مسائل و ارائه‌ی توضیحی شهودی برای آن‌ها و نیز حسی و تصمیم مسائل و قضایای روشی کار است. لازم به ذکر است، این روش به صورت پنهان در اکثر کارهای ریاضیدانان بزرگ دیده می‌شود. اما متأسفانه تا به حال به عنوان روشی کارآمد معرفی نشده است.

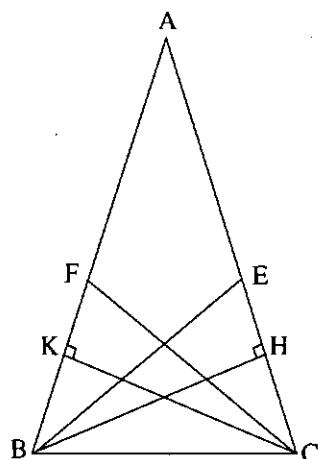
در پایان این مقاله، به بخشی از مسائلی می‌پردازیم که با روش مگس حل شده‌اند.

مقدمه

چنان‌که ریاضیدان بزرگ انگلیسی، هاردی^۱ در این باره گفته است:

«برهان خلف، این عزیز دردانه‌ی اقلیدس، یکی از برنده‌ترین سلاح‌های ریاضیدانان است. در بازی شطرنج، وقتی حرکتی انجام می‌گیرد، دیری نمی‌پایید که ارزش آن

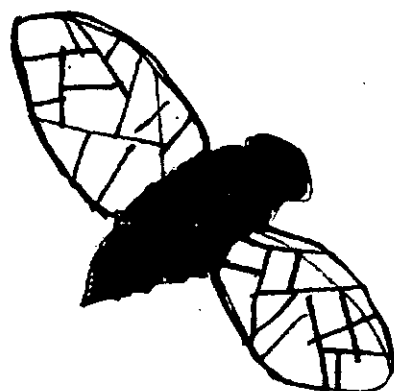
همان‌گونه که می‌دانیم، مسائل ریاضی با روش‌های متفاوت حل می‌شوند که بعضی از آن‌ها قدمت بسیار دارند. برای مثال، روش کلیدی «برهان خلف»^۱ که در حل اکثر مسائل ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارد، به زمان اقلیدس برمی‌گردد.



شکل ۱

گرچه با اصول پثانو (۱۸۸۹) رسمیت یافت، ولی قبل از آن هم توسط ددکیند به کار برده شده بود. باید اقرار کرد که همان روش نزول نامتناهی فرما^۳ شروع کننده استقرار است. روش نزول نامتناهی، به وسیله ی پیردو فرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱) در اثبات عدم وجود جواب های معادله ی سیال به کار برده شده است و به نظر می رسد، این تنها ابزار فرما برای حل معادلات سیال بوده است. فرما قصد داشت که روش خودش را در مورد عدم وجود جواب غیر بدیهی معادله ی $X^n + Y^n = Z^n$ برای $n \geq 3$ به کار ببرد، ولی این روش در مورد $n \geq 5$ دچار مشکل شد.

امروزه جمله ی «طبق فرض استقرا» بیشترین تکرار را در نوشته های ریاضی دارد. لازم به ذکر است، روش استقرا برای اعداد حقیقی نیز درست است. این موضوع را بلمبورگ در سال ۱۹۳۰ در شیکاگو، در یک سخنرانی ارائه کرد که بعدها در "Bull. AMS" به چاپ رسید. البته موضوع سخنرانی چیز دیگری بود و او به استقرا برای اعداد حقیقی، تنها اشاره ی کوتاهی کرد. ظاهر آهیچ کس بعدها به این استقرا اشاره ای نکرده است تا این که در سال ۱۹۸۹ یک چینی به نام ژانگ چینگ ژونگ، در گزارش هایی فنی که در ترست ایتالیا (IC/89/157) به چاپ رساند، این روش اثبات را به طور کامل بیان کرد. البته ظاهراً او از کار بلمبورگ بی خبر بوده است. ژانگ اکثر قضایای آنالیز مقدماتی را با این روش اثبات کرد. با توجه به این که روش استقرا از همان ابتدا به همه معرفی می شود، این روش شاید در آنالیز کارایی بهتری از روش



معین می شود. بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یک پیاده یا مهره ی دیگر را بپذیرد؛ اما برای او کل بازی مطرح است.

در این جا اثبات جدیدی از قضیه ی «اشتینر-لموس» [۵] را می آوریم که به وسیله ی برهان خلف ارائه شده است. در این راه حل، فقط از مقاله ی اول اقلیدس استفاده شده است. قضیه ی اشتینر-لموس: اگر دو نیمساز داخلی مثلثی با هم برابر باشند، آن گاه مثلث متساوی الساقین خواهد بود. برهان: مثلث مفروض ABC با دو نیمساز برابر BE و CF را در نظر می گیریم (شکل ۱). ابتدا دو ارتفاع BH و CK را رسم می کنیم. فرض خلفی را بنا می کنیم مبنی بر این که مثلث مفروض متساوی الساقین نباشد، پس $BH \neq CK$. حال فرض کنیم: $BH < CK$. دو مثلث قائم الزاویه ی BHE و CKF وتری یکسان دارند $(BE=CF)$ ، پس $\angle KFC < \angle BEH$. (*)

حال در دو مثلث قائم الزاویه BHC و BKC وتر BC مشترک است و چون $BH < CK$ است، پس $\hat{B} < \hat{C}$. نتیجه: $\hat{B} / 2 < \hat{C} / 2$. آن گاه داریم:

$$\angle EBF < \angle FCE$$

سپس خواهیم داشت: $\angle KFC > \angle BEH$ که مخالف نامساوی (*) و فرض اختیاری ماست. در حالت $CK > BH$ نیز به طور مشابه دچار تناقض می شویم. پس باید $CK=BH$ و مثلث متساوی الساقین باشد.

روش قدیمی دیگر، روش استقرای ریاضی است که



دداکند داشته باشد. حال بهتر است، به طور خلاصه اصل استقرای پیوسته را در جدول معرفی کنیم.

روش مگس

در این جا به روش جدیدی در حل مسائل ریاضی به نام روش تغییر بُعد یا روش مگس می پردازیم. لازم به ذکر است،

این روش بدون اطلاع مؤلفان دو مقاله ی [۱] و [۶] در فهرست منابع، و به طور مستقل از هم کشف شده است. الکساندر شن^۱ در مقاله ی [۱] با عنوان «حل مسائل سه بُعدی برای مسائل دو بُعدی»، تنها این روش را برای حل مسائل هندسی به کار برده است. در مقاله ی [۶] با عنوان «روش ها و نتایج کلیدی در ریاضیات» که به زبان فارسی نوشته شده است، دکتر امید علی شهنی کرمزاده، این روش را علاوه بر مسائل هندسی، به مسائل گوناگون ریاضی گسترش داده و تعدادی مسائل غیر هندسی را نیز به کمک آن حل کرده است. دکتر کرمزاده این روش را با عنوان روش تغییر بُعد (روش مگس) نامگذاری کرده و سپس دلیل این نامگذاری را به این صورت نقل کرده است: «علت نامیدن این روش به نام مگس، حکایت زیر است:

درست در سال ۱۳۴۸ خورشیدی (۱۹۷۸ میلادی) در دانشگاه تهران، در بخش ریاضی با دکتر محسن هشترودی کلاس داشتیم. ایشان طبق معمول از هر فرصتی استفاده می کرد و راجع به موضوعات علمی که خیلی هم در دانشجویان انگیزه ایجاد می کرد، صحبت می کرد [ایشان به واقع به این گفته ی آلبرت اینشتین که «تخیل بالاتر از علم است»، ایمان کامل داشت]. آن روز موضوع مفهوم بُعد فضا و ناتوانی انسان به عنوان موجودی که نمی تواند به طور فیزیکی از همه ی ابعادش استفاده کند، بود. او گفت: مثلاً ورق کاغذی را در نظر بگیرید که به شکلی در فضا نگه داشته شده است و روی آن سه موجود مثلاً یک عقرب و یک سوسک و

اصل استقرای اعداد حقیقی

فرض کنید $P(x)$ یک گزاره نما روی عدد حقیقی x باشد، به طوری که:

۱. یک عدد حقیقی x وجود دارد، به طوری که $P(x)$ برای $x < x_0$ درست است.
۲. اگر $P(x)$ برای $x < y$ درست باشد، آن گاه یک $\delta_y > 0$ وجود دارد که $P(x)$ برای $x < y + \delta_y$ نیز درست است.

در این صورت $P(x)$ برای تمام اعداد حقیقی درست است.

اصل استقرای اعداد طبیعی

فرض کنید $P(n)$ یک گزاره روی اعداد طبیعی n باشد؛ به طوری که:

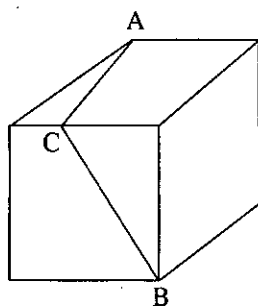
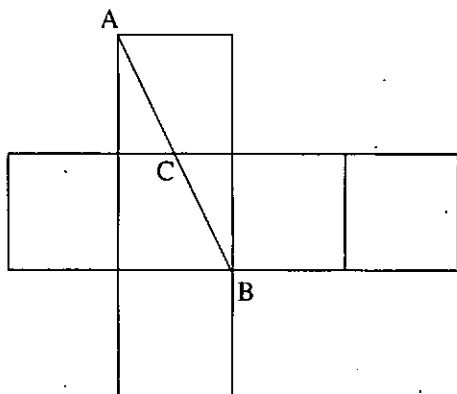
۱. یک عدد طبیعی n وجود دارد، به طوری که $P(n)$ برای $n < n_0$ درست است.
۲. اگر $P(n)$ برای $n < m$ درست باشد، آن گاه $P(n)$ برای $n < m+1$ درست است.

در این صورت $P(n)$ برای تمام اعداد طبیعی درست است.

یک مگس قرار دهید و بعد این ورق را آتش بزنید. مگس پرواز می کند، ولی دو موجود دیگر که ظاهراً قوی تر از مگس هستند، کشته می شوند. یعنی یک حادثه، ظاهراً در یک فضای دو بُعدی برای سه موجود سه بُعدی اتفاق می افتد، ولی فقط یکی از آن ها جان سالم به در می برد. و البته بحث می کرد که اگر سوسک و عقرب فکر داشتند نیز می توانستند خود را نجات دهند. به هر حال، این مثال روی من خیلی تأثیر گذاشت و نتیجه گیری های غیر ریاضی هم برای من داشت که در این جا به آن ها اشاره ای نمی کنم. ولی در مورد تأثیرش در فکر ریاضی ام باید بگویم، پیش خود فکر کردم، پس اگر ما هم یک مشکلی در صفحه داشتیم (مثل حل یک مسأله ی ریاضی)، باید بتوانیم بعضی اوقات با رفتن به فضا یا بالعکس این مشکل را ساده تر کنیم. بعدها دیدم، در عمل این طرز فکر کاملاً ریاضی است و کاربردهای فراوان دارد. از آن رو آن را روش مگس نامیدم. »

دکتر محسن هشترودی (۲۲ دی ۱۳۸۶ در تبریز - ۱۳ شهریور ۱۳۵۵ در تهران)، ریاضیدان و هنرشناس ایرانی است. در سال ۱۳۰۴ دارالفنون را تمام کرد، چند سال پزشکی خواند و بعد وارد دانش سرای عالی (تربیت معلم) و رشته ی ریاضی شد. سپس به فرانسه رفت، از دانشکده ی علوم پاریس لیسانس و از دانشگاه سوربون دکترای ریاضی گرفت (۱۹۱۷ میلادی). بعد به تهران آمد و به تدریس ریاضی در دانشکده ی علوم دانشگاه تهران مشغول شد. در سال ۱۳۲۰ به مرتبه ی استادی رسید و از سال ۱۳۳۶ ریاست

کرد. به این منظور مکعب را به صورت شکل ۲ باز می‌کنیم. پاره خط AB کوتاه‌ترین مسیر از A به B است. حال اگر شکل گسترده شده را به وضعیت اول برگردانیم، مسیر $AC+CB$ که در آن C وسط یک ضلع مکعب است، جواب مسأله خواهد بود.



شکل ۲ - مسیر حرکت مگس روی سطوح مکعب

اگر در مثال بالا، به جای مکعب یک استوانه و دو نقطه روی سطح جانبی آن در نظر بگیریم، به طریق کاملاً مشابه، به کوتاه‌ترین مسیر روی سطح جانبی دست پیدا خواهیم کرد. مثال بعدی در مورد «مسأله‌ی اشتاینر» است. یاکوب اشتاینر، هندسه‌دان معروف دانشگاه برلین در اوایل قرن نوزدهم، مسأله‌ی بسیار ساده، ولی آموزنده‌ی زیر را بررسی و حل کرد.

مثال ۲ (مسأله‌ی اشتاینر): سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه مفروضند. در جست‌وجوی نقطه‌ی چهارم P ای در صفحه هستیم، به طوری که $a+b+c$ می‌نیم باشد. a ، b و c به ترتیب نشان‌دهنده‌ی فاصله‌های P از A، B و C هستند.

دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران را به عهده داشت. رساله‌ی دکترای هشترودی «فضاهای تصویری - نقطه، خط، صفحه - با اتصال‌های نرمال» بود. در این زمینه، الی کارتان را استاد راهنما انتخاب کرده بود. هشترودی، به قول دکتر علی افضلی‌پور، استاد ریاضیات «دانشمند، استاد و انسان» بود. بی‌هیچ پروا عقیده‌اش را بیان می‌کرد و در دانشگاه همیشه جانبدار دانشجویان بود. هشترودی را در ضمن باید یک مربی بزرگ به شمار آورد. از او دو کتاب ریاضی به زبان فرانسوی «از انتشارات دانشگاه تهران» مجموعه‌ای از مقاله‌ها با عنوان‌های «دانش و هنر»، «تمرین‌های ریاضیات مقدماتی»، مجموعه‌ی شعری با عنوان «سایه‌ها» و تعداد زیادی مقاله در نشریه‌ی داخل و خارج از کشور» باقی مانده است. بیان لطیف و پر معنای زیر، در رابطه با علم و هنر، از این استاد فقید است:

«... تصور نکنید وقتی دانشمندی چیزی را تحقیق می‌کند، کاملاً مجرد فکر می‌کند. این هم مثل آن هنرمند، با ضمیر خود در کشمکش است. گاهی به قدری امر علمی نزدیک به هنر و آفرینش هنری می‌شود که اصلاً موجب اعجاز می‌شود. اگر احترامی به دانشمندانی چون نیوتن و اینشتین با دانشمندان بزرگ دیگر می‌گذاریم، در آن لحظاتی از آفرینش علمی آنان است که به هنر نزدیک شده‌اند.» [به نقل از گفت‌وگوی رادیویی با عنوان «مرزهای علم»].



چند کاربرد از روش مگس

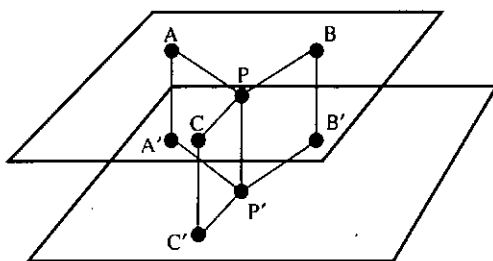
در این بخش به تعدادی از مسائل هندسی که به روش مگس حل شده‌اند، می‌پردازیم. تعدادی از این راه‌حل‌ها در مقاله‌های [۱] و [۶] فهرست منابع آمده‌اند.

مثال ۱ (کوتاه‌ترین مسیر حرکت مگس): مکعبی با ابعاد واحد داده شده است. مگسی از رأس A بدون آن‌که پرواز کند، روی سطوح این مکعب حرکت می‌کند و به B می‌رسد. کوتاه‌ترین مسیر حرکت این مگس را تعیین کنید.

حل: این مسأله به وسیله‌ی حساب دیفرانسیل با ساختن یک تابع یک بعدی مناسب قابل حل است. اما به وسیله‌ی روش مگس می‌توان راه‌حل بسیار ساده و زیبایی برای آن ارائه

حل: به علت پدیده‌ی کشش سطحی، لایه‌ای از محلول صابون، فقط وقتی در حالت تعادل است که مساحتش می‌نیمم باشد. این موضوع منبع زوال ناپذیری از آزمایش‌های مهم از لحاظ ریاضی است. دو صفحه‌ی شیشه‌ای یا ورقه‌ی پلاستیکی شفاف و موازی را به وسیله‌ی دو یا سه میله‌ی عمودی به هم وصل می‌کنیم. اگر شئی حاصل را در محلول صابون فرو بریم و درآوریم، لایه‌ی صابون، دستگاهی مرکب از چند صفحه‌ی قائم بین دو صفحه‌ی شفاف به وجود می‌آورد که میله‌های ثابت را به هم وصل می‌کنند. تصویری که روی صفحات شیشه‌ای ظاهر می‌شود، جواب مسأله‌ی مورد بحث است (شکل ۳).

بنابراین، اگر در مثلث ABC همه‌ی زاویه‌ها کم‌تر از 120° درجه باشند، آن‌گاه P نقطه‌ای است که هر سه ضلع AB ، BC و CA از آن نقطه به زاویه‌ی 120° درجه دیده می‌شوند. ولی اگر زاویه‌ای از ABC ، مثلاً زاویه‌ی رأس C ، برابر با 120° یا بزرگ‌تر از آن باشد، آن‌گاه نقطه‌ی P بر رأس C منطبق است.



شکل ۳

تعمیمی از مسأله‌ی اشتاینر برای n نقطه به صورت زیر بیان می‌شود:

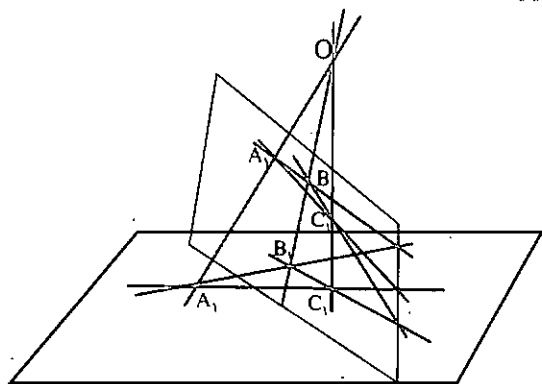
« n نقطه‌ی $A_1, A_2, \dots, A_n$ داده شده‌اند. شبکه‌ی به هم پیوسته‌ای از پاره‌خط‌ها را با کم‌ترین طول کل ممکن پیدا کنید، به طوری که دو تا از نقطه‌ها را بتوان با یک خط شکسته‌ی مرکب از پاره‌خط‌هایی از شبکه، به هم وصل کرد. البته، شکل جواب بستگی به آرایش نقطه‌های مفروض دارد.»
به ازای n نقطه‌ی مفروض، حداکثر $(n-2)$ تقاطع



چندگانه وجود دارد که در هر یک از آن‌ها سه پاره‌خط یکدیگر را به زاویه‌های 120° درجه قطع می‌کنند. لازم به ذکر است، جواب مسأله همواره به‌طور یکتا معین نمی‌شود ([۱۰] ببینید).

مثال ۳ (قضیه‌ی دزارگ): دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط‌های مستقیم A_1A_2 و B_1B_2 از نقطه‌ی O عبور می‌کنند. در این صورت، سه نقطه‌ی اشتراک اضلاع متناظر A_1B_1 و A_2B_2 ، B_1C_1 و B_2C_2 ، و C_1C_2 و A_1C_1 هم‌چنین A_2C_2 و A_1C_1 روی یک خط مستقیم قرار دارند.

اثبات: فرض کنید که قضیه حل شده باشد. مثلث $A_1B_1C_1$ را روی یک صفحه‌ی شفاف، و مثلث $A_2B_2C_2$ را روی یک سطح افقی رسم کنید. با به کارگیری یک لامپ بالای صفحه‌ی شفاف، در نقطه‌ی O ، صفحه‌ی شفاف را در یک سطح افقی، به گونه‌ای متمایل کنید که سایه‌ای از مثلث $A_1B_1C_1$ در صفحه‌ی افقی روی مثلث $A_2B_2C_2$ قرار بگیری (این یک اصل کلی است: هر دو مثلث می‌توانند به این طریق به هم مربوط شوند). محل تقاطع دو صفحه‌ی شفاف و صفحه‌ی افقی، همان خط مورد نظر قضیه است (شکل ۴ را ببینید).



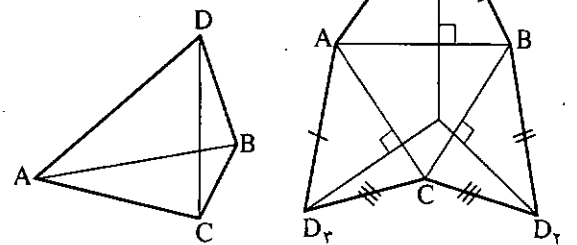
شکل ۴

مثال ۴: مثلث ABC و سه مثلث دیگر ABD ، BCD و ACD را در نظر می‌گیریم که ضلع مشترکی با آن دارند. فرض کنید، اضلاع مجاور با هر یک از رأس‌های مثلث ABC برابر

باشند (یعنی: $AD_1=AD_2$, $BD_1=BD_2$ و $CD_1=CD_2$). ارتفاع‌های نظیر سه رأس D_1 , D_2 و D_3 از سه مثلث را بر اضلاع مثلث ABC رسم کنید. در این صورت، امتداد این ارتفاع‌ها از یک نقطه عبور می‌کند.

اثبات: یک چهار وجهی کاغذی ABCD، با وجه افقی ABC را در نظر بگیرید (شکل ۵). فرض کنید، چهار وجهی را در امتداد خطوط AD , BD و CD بریده‌ایم و وجه را طوری باز می‌کنیم که یال‌های چهار وجهی روی یک صفحه‌ی افقی قرار گیرند. با این روش، شش ضلعی $AD_1BD_1CD_2$ را به دست خواهیم آورد که رأس‌های آن به وسیله‌ی سه کپی D_1 , D_2 و D_3 از رأس D به دست آمده‌اند.

در زیر با حرکت دادن سه کپی از وجوه ABD , BCD و ACD ، مثلث‌های جانبی ABD_1 , BCD_2 و ACD_3 را به دست خواهیم آورد. هر کپی در امتداد یک دایره حرکت می‌کند که بر صفحه‌ی افقی عمود است و در یک طرف مثلث ABC می‌باشد. بنابراین، در نگاهی به رأس، رأس‌های D_1 , D_2 و D_3 در امتداد یک خط مستقیم عمود بر یک طرف مثلث ABC حرکت می‌کند.



شکل ۵

مثال بعدی به «مسأله‌ی سیلوستر» معروف است. این مسأله به مدت چهار سال (۱۸۹۲ تا ۱۹۳۳) بدون جواب مانده است. در آن سال‌ها، ریاضیدانانی چون هیلبرت، هاردی، کلاین، مینکوفسکی، وبلن، آرتین، نویر، یورسیون، و ده‌ها تن دیگر که فعالانه کار می‌کردند، هیچ کدام جوابی به این مسأله ندادند. در این جابه‌روش مگس، برای این مسأله اثبات

جدیدی می‌آوریم [۷] ببینید).

ابتدال ساده‌ی زیر را که با فرمول اویلر (اگر G یک گراف مسطح هم‌بند با n رأس، e یال و f وجه باشد، آن‌گاه $n-e+f=2$) ثابت می‌شود، می‌آوریم.

لم: فرض کنید G گراف مسطح ساده‌ی ناتهنی هم‌بند باشد. در این صورت، G رأس با درجه‌ی حداکثر ۵ دارد. اثبات: هر وجه G، دست کم ۳ ضلع دارد (زیرا G ساده است). پس خواهیم داشت:

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$$

$$\text{بنابراین: } 2e - 3f \geq 0$$

حال اگر هر رأس درجه‌ای حداقل برابر ۶ داشته باشد، مشابه بالا داریم:

$$n = n_6 + n_7 + n_8 + \dots$$

$$2e = 6f_6 + 7f_7 + 8f_8 + \dots$$

$$\text{بنابراین: } 2e - 6n \geq 0$$

$$6(e - n - f) = (2e - 6n) + 2(2e - 3f) \geq 0$$

و بنابراین: $e \geq n + f$ که با فرمول اویلر مغایر است.

مثال ۵ (قضیه‌ی سیلوستر): می‌دانیم که اگر n نقطه در صفحه داشته باشیم که روی یک خط نباشند، آن‌گاه یک خط وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: اگر صفحه‌ی حاوی نقاط را نزدیک کره‌ای قرار دهیم، آن‌گاه هر نقطه در صفحه با یک نقطه متقاطع (هم‌قطر) روی کره است، و خط‌های صفحه، متناظر با دایره‌های عظیمه‌ی روی کره هستند. پس قضیه را به صورت زیر بازسازی می‌کنیم:

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ جفت نقطه و متقاطع روی کره داده شده باشد که همگی روی یک دایره‌ی عظیمه نباشند، همواره دایره‌ی عظیمه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از جفت‌های متقاطع است.»

حال دوباره این صورت از قضیه را می‌نویسیم. به این منظور، به جای هر جفت نقطه‌ی متقاطع، دایره‌ی عظیمه‌ی متناظر روی کره را قرار می‌دهیم. در این صورت، قضیه

سیلوستر از ما می‌خواهد که ثابت کنیم:

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ دایره‌ی عظیمه روی کره داده باشند که همه‌ی آن‌ها از یک نقطه نگذرد، همواره نقطه‌ای وجود دارد که روی دقیقاً دو تا از دایره‌های عظیمه است.»

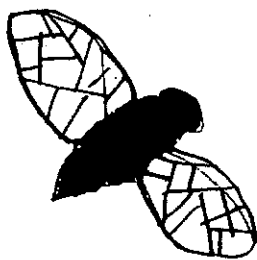
اما آرایش دایره‌های عظیمه، گراف مسطح ساده‌ای روی کره به دست می‌دهد که رأس‌هایش نقاط تقاطع دو تا از دایره‌های عظیمه اند که دایره‌های عظیمه را به یال‌هایی تجزیه می‌کنند. همه‌ی درجه‌های رأس‌ها زوجند و بنا به طرز ساختن گراف، دست کم چهار عدد هستند. حال لم قبل نشان می‌دهد که رأسی از درجه‌ی ۴ وجود دارد و این اثبات را تمام می‌کند. حال اگر بخواهیم تعمیم آن را در فضا بگوییم، باید بگوییم، اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن گاه یک صفحه وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد. اما متأسفانه این نتیجه غلط است، زیرا کافی است دو خط متناظر در نظر بگیریم و روی هر خط چهار نقطه قرار دهیم.

حال با توجه به این که خط قضیه‌ی سیلوستر را می‌توان دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت در نظر گرفت، تعمیم زیر را ارائه می‌دهیم که آن را مدیون روش مگس هستیم.

مثال ۶ (تعمیم قضیه‌ی سیلوستر): اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن گاه دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: از چهار نقطه از این نقاط یک کره می‌گذرانیم. بعد یکی از این نقاط، مثلاً A را به عنوان مرکز انعکاس در نظر می‌گیریم و کره را منعکس می‌کنیم (یعنی همان تصویر گنج‌نگاری) تا به صفحه‌ی مماس منعکس شود. می‌دانیم، دایره‌ای که روی کره از A بگذرد، به خط تبدیل می‌شود و اگر A نگذرد، به یک دایره تبدیل می‌شود. در این تبدیل، آن تعداد از n نقطه که روی کره قرار دارند، به نقاطی در صفحه می‌روند که روی یک خط نیستند. اکنون طبق قضیه‌ی سیلوستر، یک خط d وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط روی صفحه می‌گذرد و آشکارا تصویر آن روی کره دایره است. این دایره دقیقاً از سه نقطه که یکی از آن‌ها نقطه‌ی A است، می‌گذرد. در حقیقت ما ثابت کرده‌ایم، دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این n نقطه می‌گذرد؛ به طوری که یکی از این نقاط را همواره می‌توان از قبل انتخاب کرد.

در این جا دیدیم، برای این که قضیه‌ی سیلوستر را تعمیم دهیم، اول به فضا رفتیم، بیان گزاره را حدس زدیم و بعد برای اثبات آن به صفحه برگشتیم؛ یعنی دوباره تغییر بعد دادیم.



زیرنویس.....

1. Reductio and Absudum
2. G.H. Hardy
3. Infinite Descent
4. Alexander Shen

منابع.....

1. Shen, Alexander. "Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problem". The Mathematical Intelligencer. 19 (1937)44-47.
2. Hachtroudi, M. Les espaces d'éléments à projective normale. Hermann. Paris. (1937).
3. Chern, Shiing-Shen & Nji, Shany. Projective Geometry and Poincaré's Mapping Problem. Math. An 302 (1995) 582-600.
4. Aigner, M. and Ziegler, G.M. Proofs From THE BOOK. Springer. Berlin. 1998.
5. کاری مجیدآبادی، عباس. «برهانی بر قضیه‌ی لموس-اشتینر». رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۵۱. بهار ۱۳۷۷.
6. شهنی کرمزاده، امیدعلی. نتایج باورینکردنی در ریاضیات. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز. ۱۳۸۰.
7. کاظمی، سیامک. کتاب اثبات. انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی. ۱۳۷۹. (این کتاب ترجمه کتاب [۲] است).
8. علی مرصعی، علی. «حل‌های سه بعدی برای مسائل دو بعدی». گزارش سومین کنفرانس آموزش ریاضی کرمان-ایران. ۱۳۷۷. (این مقاله ترجمه‌ی بخشی از مقاله‌ی [۱] است).
9. شهریار، پرویز. گاهنامه‌ی ریاضیدانان ۱۳۸۰. انتشارات مهاجر. ۱۳۸۰.
10. کورانت، ریچارد و رایتز، هربرت. ریاضیات چیست؟. ترجمه‌ی: سیامک کاظمی. انتشارات نشر نی. ۱۳۷۹.

