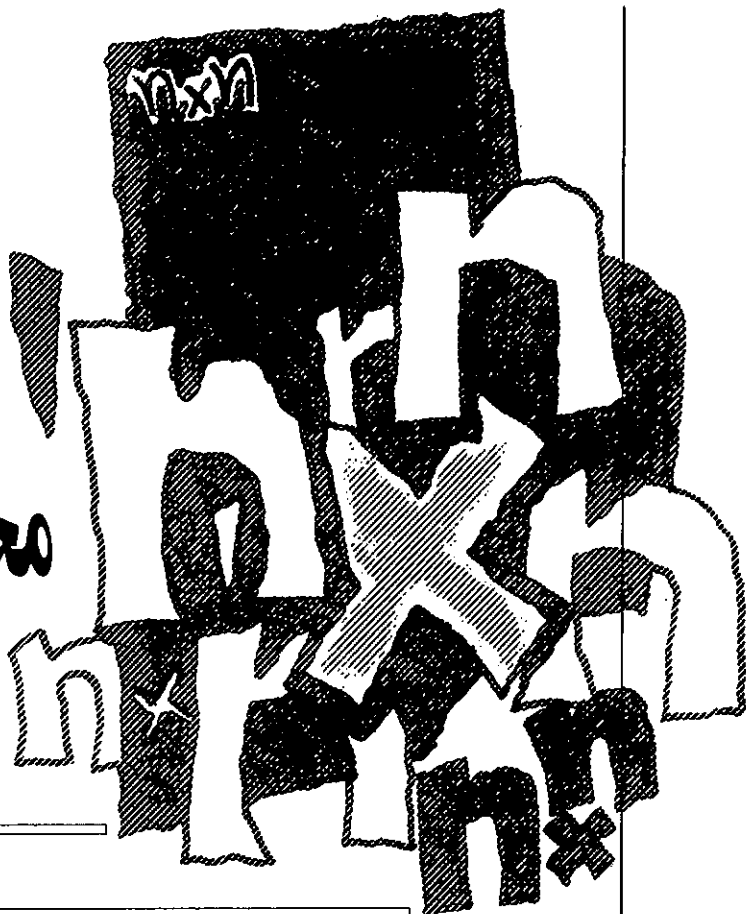


روش جدید و سریع برای محاسبه دترمینانهای $n \times n$

(برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی)



سید محمدرضا هاشمی موسوی

سوم قرار می‌دهیم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی تقسیم می‌کنیم و هر یک از دسته‌های چهارتایی را یک دترمینان 2×2 در نظر می‌گیریم، که در این صورت، یک دترمینان 2×2 داریم که هر یک از عناصرش، خود یک دترمینان 2×2 است. در آخر، برای محاسبه Δ_p کافی است مقدار حاصله را بر a_p تقسیم کنیم.

مراحل عمل: سطر دوم را یک بار دیگر نوشته و ستون اول حاصله را نیز بار دیگر میان ستون دوم و سوم صداده‌ایم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی افزایش کرده‌ایم:

$$\text{مرحله (۱)} \quad \left| \begin{array}{cc|c|c} a_1 & b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & a_4 & c_4 \end{array} \right|;$$

برای نشان دادن روش جدید محاسبه دترمینان، کافی است که به محاسبه چند دترمینان در حالت کلی و عددی بپردازیم. بنابراین، دترمینان مرتبه سوم و چهارم را در حالت کلی و عددی محاسبه می‌کنیم.

(۱) محاسبه دترمینان مرتبه سوم

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

روش محاسبه: با توجه به قوانین دترمینانها همواره می‌توان فرض کرد که عنصر میانی ستون اول، یعنی a_p مخالف صفر است ($a_p \neq 0$). بنابراین فرض Δ_p را به دترمینان مرتبه دوم زنجیره‌ای تحویل می‌دهیم. روش عمل به صورت زیر است.

روش عمل: ابتدا سطر دوم را بار دیگر می‌نویسیم. مرحله بعد، ستون اول حاصله را نیز یک مرتبه دیگر میان ستون دوم و

محاسبه به روش درمیان زنجیره‌ای مرتبه دوم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

(۱) سطر دوم را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

(۲) ستون اول حاصله را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

(۳) به درمیانهای مرتبه دوم افزاز کرده‌ایم

$$\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix};$$

(۴) درمیان زنجیره‌ای مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta_r = \frac{51}{3};$$

(۵) حاصل درمیان زنجیره‌ای مرتبه دوم را تقسیم بر عنصر میانی ستون اول درمیان می‌کنیم

$$\Delta_r = 17$$

(۶) مقدار محاسبه شده Δ_r

$$\text{مرحله (۲)} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & c_1 \\ a_r & b_r & a_r & c_r \\ a_r & b_r & a_r & c_r \\ a_r & b_r & a_r & c_r \end{vmatrix}$$

هریک از دسته‌های چهارتایی، یک درمیان 2×2 تشکیل می‌دهند. سپس از محاسبه هریک از درمیانهای 2×2 و محاسبه درمیان کلی و تقسیم عدد حاصل بر a_r ، مقدار Δ_r محاسبه می‌شود:

$$\text{مرحله (۳)} \quad \Delta_r = \frac{1}{a_r} \begin{vmatrix} \underbrace{a_1 b_r - a_r b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1 c_r - a_r c_1}_{B_1} \\ \underbrace{a_r b_r - a_r b_r}_{A_r} & \underbrace{a_r c_r - a_r c_r}_{B_r} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_r} (A_1 B_r - A_r B_1) \quad (a_r \neq 0)$$

بنابراین Δ_r چنین است:

$$\Delta_r = \frac{1}{a_r} [(a_1 b_r - a_r b_1)(a_r c_r - a_r c_1) - (a_r b_r - a_r b_r) \times (a_r c_r - a_r c_1)]$$

$$\Delta_r = \frac{1}{a_r} [a_1 a_r b_r c_r - a_r a_r b_r c_r - a_r^2 b_1 c_r + a_r a_r b_1 c_r - a_1 a_r b_r c_r + a_r^2 b_r c_1 + a_r a_r b_r c_r - a_r a_r b_r c_1]$$

پس از اختصار لازم:

$$\Delta_r = a_1 b_r c_r - a_r b_1 c_r + a_r b_r c_1 - a_1 b_r c_r + a_r b_r c_1 - a_r b_r c_1$$

مثال ۱: درمیان زیر را محاسبه کنید:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

ساده شده روش عمل دترمینان زنجیره‌ای

حال در این جا روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم را به صورتی مختصر و ساده تر ارائه می دهیم.
ابتدا ستون اول را جدا می کنیم و عملیات روی سطرها متوالی را به شکل زیر انجام می دهیم :

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_r & b_r & c_r \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}$$

(با توجه به قوانین دترمینانها، فرض شده است که $a_r \neq 0$)

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \underbrace{a_1 b_r - a_r b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1 c_r - a_r c_1}_{A_1} \\ \underbrace{a_r b_r - a_r b_r}_{B_1} & \underbrace{a_r c_r - a_r c_r}_{B_1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_r = A_1 B_r - A_r B_1; \quad \Delta_r = \frac{\Delta_r}{a_r} \quad (a_r \neq 0)$$

در این جا مثال ۱ را با روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم محاسبه می کنیم.
ابتدا ستون اول را جدا می کنیم و عملیات روی سطرها را انجام می دهیم و سپس Δ_r را محاسبه می کنیم.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = 51$$

$$\Delta_r = \frac{51}{3} = 17$$

با روشی مشابه، ابتدا Δ_r را به Δ_r تحویل داده و سپس Δ_r را مانند قبل به دترمینان مرتبه دوم زنجیره‌ای تحویل می دهیم.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_r & b_r & c_r & d_r \end{vmatrix}$$

برای افراز Δ_r به دترمینانهای مرتبه دوم، کافی است سطر دوم و سوم را بار دیگر نوشته و ستون اول حاصله را یک در میان به طور مکرر بنویسیم و سپس افراز را انجام دهیم. در این جا نیز با توجه به قوانین دترمینانها، a_r و a_r را مخالف صفر فرض می کنیم (مثلاً با تعویض دو سطر یا دو ستون). بنابراین همواره می توان فرض کرد که $a_r \neq 0$ و a_r سپس با این فرض، Δ_r را افراز می کنیم:

$$\Delta_r = \frac{1}{a_r a_r} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_r & b_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_r & c_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_r & d_r \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_r & b_r \\ a_r & b_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_r & c_r \\ a_r & c_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_r & d_r \\ a_r & d_r \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_r & b_r \\ a_r & b_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_r & c_r \\ a_r & c_r \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_r & d_r \\ a_r & d_r \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_r a_r} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_r & B_r & C_r \\ A_r & B_r & C_r \end{vmatrix}$$

* با توجه به قوانین دترمینانها می توان فرض کرد که $A_r \neq 0$

و در نتیجه :
(۲) محاسبه دترمینان مرتبه چهارم به روش افراز (دترمینان مرتبه دوم زنجیره‌ای):

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \underbrace{A_1 B_r - A_r B_1}_{\alpha_1} & \underbrace{A_1 C_r - A_r C_1}_{\beta_1} \\ \underbrace{A_r B_r - A_r B_r}_{\alpha_r} & \underbrace{A_r C_r - A_r C_r}_{\beta_r} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_r}{\alpha_1 \beta_r - \alpha_r \beta_1} \quad (\Delta_r: \text{حاصل دترمینان})$$

$$\Delta_r = \frac{1}{a_r a_r A_r} \begin{vmatrix} A_1 & B_r & A_1 & C_r \\ A_r & B_r & A_r & C_r \end{vmatrix} = \frac{1}{a_r a_r A_r} \begin{vmatrix} A_r & B_r \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} = \frac{A_r B_0 - A_0 B_r}{a_r a_r A_r}$$

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{a_r a_r A_r}$$

(فرض: $A_r \neq 0$ و a_r و $a_r \neq 0$)

اکنون روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم را ارائه می‌دهیم:
ابتدا ستون اول را جدا می‌کنیم و سپس عملیات روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم. فرض شده است:

$$A_r \neq 0 \text{ و } a_r \neq 0$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_r & b_r & c_r & d_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

محاسبه به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \underbrace{a_1 b_r - a_r b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1 c_r - a_r c_1}_{B_1} & \underbrace{a_1 d_r - a_r d_1}_{C_1} \\ \underbrace{a_r b_r - a_r b_r}_{A_r} & \underbrace{a_r c_r - a_r c_r}_{B_r} & \underbrace{a_r d_r - a_r d_r}_{C_r} \\ \underbrace{a_r b_r - a_r b_r}_{A_r} & \underbrace{a_r c_r - a_r c_r}_{B_r} & \underbrace{a_r d_r - a_r d_r}_{C_r} \end{vmatrix}$$

* این توضیح لازم است که برای محاسبه دترمینان مرتبه n ام وقتی $n \geq 5$ ، نیز از روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم استفاده می‌شود؛ زیرا هر قدر مرتبه دترمینان بالاتر رود، نیاز ما به روشی با سرعت بالا بیشتر می‌شود. برای محاسبه Δ_n باید توجه داشت که عناصر میانی ستون اول هر مرحله، یعنی Δ_{n-1} و Δ_{n-2} و ... باید مخالف صفر باشند. به عنوان مثال، برای محاسبه Δ_5 باید داشته باشیم: $\alpha_r \neq 0$ و A_r و $A_r \neq 0$ و a_r و $a_r \neq 0$ ؛ زیرا در مرحله (۱) Δ_5 باید داشته باشیم: $a_r \neq 0$ و a_r و $a_r \neq 0$ ، در مرحله (۲) Δ_r باید داشته باشیم: $A_r \neq 0$ و A_r و در مرحله (۳) Δ_r باید داشته باشیم: $\alpha_r \neq 0$. واضح است که با توجه به قوانین دترمینانها برای هر مرحله، این فرض مسلم است و به عام بودن مسأله هیچ خللی وارد نمی‌کند.

مثال ۲: دترمینان مرتبه چهارم زیر را به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبه دوم محاسبه کنید.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 15 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \Delta_r = \begin{vmatrix} 24 & -45 \\ 14 & -27 \end{vmatrix}; \Delta_r = -18$$

$$\Delta_r = \frac{\Delta_r}{(3)(-1)(1)} = \frac{-18}{(3)(-1)(1)} = 6; \boxed{\Delta_r = 6}$$

مثال ۳: دترمینان مرتبه پنجم زیر را محاسبه کنید.
حل: عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم و سپس
دترمینانهای Δ_r ، Δ_r و Δ_r را به دست می‌آوریم.

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 6 & -12 & 16 \\ -5 & 8 & -9 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} -12 & 26 \\ 23 & -19 \end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان چنین خواهد شد:

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_r}{(2)(1)(-1)(-1)(1)(-5)} = \frac{-370}{-10} = 37;$$

$$\boxed{\Delta_5 = 37}$$



$$\Delta_r = \frac{1}{(-1)(3)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & -3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 5 & -9 & 15 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-3)(1)} \begin{vmatrix} 5 & -9 & 15 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 24 & -45 \\ 14 & -27 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} [(24)(-27) - (-45)(14)];$$

$$\Delta_r = -\frac{1}{3}(-18) = 6; \boxed{\Delta_r = 6}$$

در این جا مثال ۲ را نیز با روش ساده شده دترمینان
زنجیره‌ای مرتبه دوم محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور، ابتدا ستون اول را جدا می‌کنیم و عملیات
روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم (مشابه دترمینان
مرتبه سوم):

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$